ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1. Основні поняття

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, яке містить незалежну змінну x, невідому функцію $y = y(x)$ та її похідну y':

$$F(x,\ y,\ y') = 0. \tag{1}$$

Розв'язавши рівняння (1) відносно y' (якщо це можливо), приходимо до диференціального рівняння

$$y' = f(x,\ y), \tag{2}$$

яке називають *розв'язаним відносно похідної*.

Розв'язком рівняння (1) (або (2)) на інтервалі $(a,\ b)$ називають диференційовну на цьому інтервалі функцію $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння перетворює його в тотожність при всіх x з інтервалу $(a,\ b)$.

Загальним розв'язком рівняння (1) (або (2)) називають функцію $y = \varphi(x,\ C)$, яка є розв'язком даного рівняння при будь-якому фіксованому значенні сталої C і для довільної *початкової умови* $y(x_0) = y_0$ існує єдине значення $C = C_0$, при якому розв'язок $y = \varphi(x,\ C_0)$ задовольняє початкову умову. Розв'язок $y = \varphi(x,\ C_0)$ називають *частинним* або *розв'язком задачі Коші*.

Співвідношення $G(x,\ y,\ C) = 0$, яким загальний розв'язок $y = \varphi(x,\ C)$ рівняння (1) задається неявно, називають *загальним інтегралом* рівняння (1). При конкретному значенні $C = C_0$ співвідношення $G(x,\ y,\ C_0) = 0$ називають *частинним інтегралом*.

Найпростіше диференціальне рівняння першого порядку

$$y' = f(x) \tag{3}$$

зводиться до обчислення невизначеного інтеграла. Так як $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то маємо $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$, або $dy = f(x)dx$. Інтегруємо $\int dy = \int f(x)dx + C$ і отримуємо $y=\int f(x)\,dx+C$. Тут під невизначеним інтегралом розуміємо одну з первісних функції $f(x)$.

Розв'язати диференціальні рівняння:

1. $y'=x^2+4x-7$.

⌈ Це рівняння виду (3). Розв'яжемо його за наведеною вище схемою:

$$\frac{dy}{dx}=x^2+4x-7, \quad dy=\left(x^2+4x-7\right)dx,$$

$$\int dy=\int\left(x^2+4x-7\right)dx, \quad y=\frac{x^3}{3}+4\frac{x^2}{2}-7x+C, \text{ або}$$

$y=\frac{x^3}{3}+2x^2-7x+C$ – загальний розв'язок заданого диференціального рівняння. ⌋

2. $y'=8^x$.

⌈ $\frac{dy}{dx}=8^x$, $dy=8^x\,dx$, $\int dy=\int 8^x\,dx$, звідки знаходимо загальний розв'язок $y=\frac{8^x}{\ln 8}+C$. ⌋

3. $y'=\cos x$, якщо $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$.

⌈ Спочатку знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y'=\cos x, \quad \frac{dy}{dx}=\cos x, \quad dy=\cos x\,dx,$$

$\int dy=\int\cos x\,dx$, $y=\sin x+C$ – загальний розв'язок.

Тепер знайдемо розв'язок задачі Коші. За умовою задачі $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$. Тому, підставляючи в загальний розв'язок $y=3$ та $x=\frac{\pi}{2}$, маємо $3=\sin\frac{\pi}{2}+C$, $3=1+C$, $C=3-1=2$. Підставивши $C=2$ в загальний розв'язок, знаходимо частинний розв'язок $y=\sin x+2$. ⌋

Вправи для самостійного розв'язання

Розв'язати диференціальні рівняння:

4. $y' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

5. $y' = x^3 - 5x^2 + 4$.

6. $y' = \operatorname{arctg} x$.

7. $y' = \dfrac{1}{x^2}$, якщо $y(-1) = 5$.

Відповіді:

4. $y = -\operatorname{ctg} x + C$.

5. $y' = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{5}{2}x^2 + 4x + C$.

6. $y = \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$.

7. $y = -\dfrac{1}{x} + 4$.

2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння виду

$$y' = f(x)\cdot g(y) \qquad (4)$$

називають *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними*. Права частина рівняння (4) є добутком двох функцій, залежних лише від однієї змінної: перша функція залежить лише від x, а друга – лише від y.

Подамо схему розв'язання диференціального рівняння (4). Так як $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то маємо $y' = f(x)\cdot g(y)$, або $\dfrac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$.

Помножимо обидві частини рівності на вираз $\dfrac{dx}{g(y)}$ (припускаємо, що $g(y) \neq 0$). Отримаємо рівняння з *відокремленими змінними*

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx. \qquad (5)$$

У лівій частині рівності (5) маємо диференціал деякої функції по змінній y, а у правій – по змінній x.

Інтегруючи рівняння (5)

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C, \qquad (6)$$

отримаємо загальний інтеграл (розв’язок) диференціального рівняння (4).

Диференціальне рівняння

$$f_1(x)g_1(y)dy + f_2(x)g_2(y)dx = 0 \qquad (7)$$

зводиться до диференціального рівняння (4). Поділимо ліву і праву частини рівняння (7) на добуток функцій $f_1(x)\cdot g_2(y) \neq 0$ і перенесемо вираз, який містить диференціал dx, вправо:

$$\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = -\frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx.$$

Інтегруючи ліву частину за змінною y, а праву – за змінною x, дістанемо загальний інтеграл диференціального рівняння (7):

$$\int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = -\int \frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx + C.$$

Розв’язати диференціальні рівняння:

8. $y' = \dfrac{y}{x}$.

⌜ Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними: $y' = \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x}\cdot y$. Оскільки $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то запишемо його у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Для відокремлення змінних помножимо дану рівність на dx і поділимо на y. Отримаємо

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруємо дане рівняння:

$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$, $\quad \ln|y| = \ln|x| + \ln C$, $\quad \ln|y| = \ln|Cx|$, звідки знаходимо загальний розв’язок заданого диференціального рівняння – $y = Cx$. ⌟

9. $\dfrac{dy}{dx} = 3\sqrt{\dfrac{x}{y}}$, якщо $y(1) = 9$.

⌈ Так як $\frac{dy}{dx}=3\sqrt{\frac{x}{y}}=3\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}$, то це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Помноживши рівняння на $\sqrt{y}\,dx$, дістанемо

$$\sqrt{y}\,dy=3\sqrt{x}\,dx .$$

Інтегруємо дане рівняння:

$$\int\sqrt{y}\,dy=3\int\sqrt{x}\,dx , \quad \int y^{\frac{1}{2}}\,dy=3\int x^{\frac{1}{2}}\,dx , \quad \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}=3\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+C ,$$ звідки

знаходимо загальний інтеграл $y^{\frac{3}{2}}=3x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}C$, або

$$y^{\frac{3}{2}}=3x^{\frac{3}{2}}+C . \qquad (8)$$

Знайдемо частинний інтеграл. За умовою задачі $y=9$ при $x=1$. Підставляючи вказані значення y та x у формулу (8), знаходимо сталу C:

$$9^{\frac{3}{2}}=3\cdot1^{\frac{3}{2}}+C , \quad 27=3+C , \quad C=24 .$$

Підставивши знайдене значення $C=24$ у формулу (8), дістаємо частинний інтеграл заданого диференціального рівняння – $y^{\frac{3}{2}}=3x^{\frac{3}{2}}+24$. ⌋

10. $\left(1+e^{2x}\right)y^2y'=e^x$.

⌈ Розв’яжемо задане рівняння відносно y':

$$y'=\frac{e^x}{\left(1+e^{2x}\right)y^2} .$$

Отже, це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Підставимо $y'=\frac{dy}{dx}$ і відокремимо змінні, помноживши рівняння на y^2dx:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x}{\left(1+e^{2x}\right)y^2} , \quad y^2\,dy=\frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx .$$

Звідси маємо

$\int y^2\,dy = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$, $\qquad \int y^2 dy = \int \frac{e^x dx}{1+\left(e^x\right)^2}$, $\qquad \frac{y^3}{3} = \operatorname{arctg} e^x + C$,

$y^3 = 3\operatorname{arctg} e^x + C$, звідки маємо загальний розв'язок $y = \sqrt[3]{3\operatorname{arctg} e^x + C}$. $\lrcorner$

11. $y\sqrt{1+x^2}\,y' + x\sqrt{1+y^2} = 0$, якщо $y\left(\sqrt{3}\right) = 0$.

$\ulcorner$ Розв'яжемо задане рівняння відносно y':

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+y^2}}{y} .$$

Отже, це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Підставимо $y' = \frac{dy}{dx}$ і відокремимо змінні, помноживши рівняння на $\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dx$:

$$\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} .$$

Звідси маємо

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} , \quad \sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + C \text{, або}$$

$$\sqrt{1+y^2} = C - \sqrt{1+x^2} . \qquad (*)$$

Знайдемо частинний інтеграл. За умовою задачі $y = 0$ при $x = \sqrt{3}$. Тому, підставляючи вказані значення y та x у формулу ($*$), знаходимо сталу C :

$$\sqrt{1+0^2} = C - \sqrt{1+3} , \quad 1+2 = C , \quad C = 3 .$$

Отже, частинний інтеграл заданого рівняння має вигляд $\sqrt{1+y^2} = 3 - \sqrt{1+x^2}$. $\lrcorner$

12. $x^2\left(y^3+5\right)dx + \left(x^3+5\right)y^2 dy = 0$, якщо $y(0) = 1$.

$\ulcorner$ Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними виду (7).

$$\frac{y^2}{y^3+5}dy = -\frac{x^2}{x^3+5}dx , \quad \int \frac{y^2}{y^3+5}dy = -\int \frac{x^2}{x^3+5}dx ,$$

$$\frac{1}{3}\ln\left|y^3+5\right| = -\frac{1}{3}\ln\left|x^3+5\right| + \frac{1}{3}\ln C, \quad \ln\left|y^3+5\right| = -\ln\left|x^3+5\right| + \ln C,$$

$$\ln\left|y^3+5\right| + \ln\left|x^3+5\right| = \ln C, \quad \ln\left|\left(y^3+5\right)\times\left(x^3+5\right)\right| = \ln C,$$

$$\left(y^3+5\right)\left(x^3+5\right) = C.$$

За умовою задачі $y=1$ при $x=0$. Тому маємо $C=\left(1^3+5\right)\left(0^3+5\right)=30$. Отже, частинний інтеграл рівняння – $\left(y^3+5\right)\left(x^3+5\right)=30$. ⌋

13. $\left(x^2+1\right)y'+2xy^2=0$, якщо $y(0)=1$.

⌈ $y'=-\dfrac{2xy^2}{x^2+1}$, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2xy^2}{x^2+1}$, $\dfrac{dy}{y^2}=-\dfrac{2x}{x^2+1}dx$,

$$\int\frac{dy}{y^2}=-\int\frac{2x}{x^2+1}dx, \quad \frac{-1}{y}=-\ln\left|x^2+1\right|+C,$$

$$\frac{1}{y}=\ln\left(x^2+1\right)+C, \text{ звідки } \quad y=\frac{1}{\ln\left(x^2+1\right)+C}.$$

За умовою задачі $y=1$ при $x=0$. Тому

$$1=\frac{1}{\ln\left(0^2+1\right)+C}, \quad 1=\frac{1}{C}, \quad C=1.$$

Частинний розв’язок рівняння – $y=\dfrac{1}{\ln\left(x^2+1\right)+1}$. ⌋

Вправи для самостійного розв’язання

Розв’язати диференціальні рівняння:

14. $x^2y'+y=0$.

15. $y'=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y$.

16. $yy'=\dfrac{1-2x}{y}$.

17. $y'\left(x^2+1\right)=2xy$, якщо $y(0)=1$.

18. $y=2y'\sqrt{x}$, якщо $y(4)=1$.

19. $y'=(2y+1)\operatorname{ctg}x$, якщо $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Відповіді:

14. $y = Ce^{\frac{1}{x}}$.

15. $\sin y = \dfrac{C}{\cos x}$.

16. $y = \sqrt[3]{3\left(x - x^2 + C\right)}$.

17. $y = x^2 + 1$.

18. $y = e^{\sqrt{x} - 2}$.

19. $y = \dfrac{1}{2}\left(4\sin^2 x - 1\right)$.

3. Однорідні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ називають *однорідним*, якщо функція $f(x, y)$ є *однорідною функцією нульового виміру*, тобто для будь-якого $t > 0$

$$f(tx, ty) = f(x, y). \tag{9}$$

Покладемо $t = \dfrac{1}{x}$: $f(tx, ty) = f\left(1, \dfrac{y}{x}\right) = g\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Тоді, з урахуванням (9), рівняння (2) запишеться у вигляді

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right). \tag{10}$$

Для розв’язання рівняння (10) введемо допоміжну невідому функцію $u = u(x)$, поклавши

$$\frac{y}{x} = u \quad \text{або}$$

$$y = ux, \tag{11}$$

і перетворимо однорідне рівняння у рівняння з відокремлюваними змінними. З (11) знаходимо $y' = u'x + u$. Тому рівняння (10) запишеться у вигляді

$$u + xu' = g(u), \quad \text{або} \quad x\frac{du}{dx} = g(u) - u.$$

Відокремимо змінні:

$$\frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}. \tag{12}$$

Проінтегрувавши рівняння (12), одержимо $\int \frac{du}{g(u)-u} = \ln|x| + C$. Обчисливши інтеграл у лівій частині і підставивши замість u вираз $\frac{y}{x}$, отримаємо загальний інтеграл диференціального рівняння.

Розв’язати диференціальні рівняння:

20. $y' = \frac{x^2+y^2}{2x^2}$.

Γ Права частина даного рівняння – функція $f(x,\ y) = \frac{x^2+y^2}{2x^2}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx,\ ty) = \frac{(tx)^2+(ty)^2}{2(tx)^2} = \frac{t^2(x^2+y^2)}{2t^2x^2} = \frac{x^2+y^2}{2x^2} = f(x,\ y),$$

тобто має місце рівність (9).

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$:

$$u'x + u = \frac{x^2+x^2u^2}{2x^2},\ \ u'x+u = \frac{x^2(1+u^2)}{2x^2},\ \ u'x+u = \frac{1+u^2}{2},$$

$$u'x = \frac{1+u^2}{2} - u, \qquad u'x = \frac{u^2-2u+1}{2}, \qquad u'x = \frac{(u-1)^2}{2},$$

$$u' = \frac{(u-1)^2}{2}\cdot\frac{1}{x}. \qquad (*)$$

Диференціальне рівняння $(*)$ – рівняння з відокремлюваними змінними. Розв’яжемо його:

$$\frac{du}{dx} = \frac{(u-1)^2}{2}\cdot\frac{1}{x}, \qquad \frac{2du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{x}, \qquad \int\frac{2du}{(u-1)^2} = \int\frac{dx}{x},$$

$$\frac{-2}{u-1} = \ln|x| + \ln C,\ \ \frac{-2}{u-1} = \ln C|x|.$$

Підставимо в отримане рівняння $u = \frac{y}{x}$:

$\frac{-2}{\frac{y}{x}-1} = \ln C|x|$, $\quad \frac{-2x}{y-x} = \ln C|x|$, звідки знаходимо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння – $y = x - \frac{2x}{\ln C|x|}$. ⌟

21. $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

⌜ Права частина рівняння – функція $f(x,\ y) = \frac{x+y}{x-y}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx,\ ty) = \frac{tx+ty}{tx-ty} = \frac{t(x+y)}{t(x-y)} = \frac{x+y}{x-y} = f(x,\ y),$$

тобто має місце рівність (9).

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$.

$$u'x + u = \frac{x+ux}{x-ux}, \qquad u'x + u = \frac{x(1+u)}{x(1-u)}, \qquad u'x + u = \frac{1+u}{1-u},$$

$$u'x = \frac{1+u}{1-u} - u, \qquad u'x = \frac{1+u-u+u^2}{1-u}, \qquad u'x = \frac{u^2+1}{1-u},$$

$$u' = \frac{u^2+1}{1-u} \cdot \frac{1}{x}, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{u^2+1}{1-u} \cdot \frac{1}{x}, \qquad \frac{1-u}{u^2+1}\,du = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{1-u}{u^2+1}\,du = \int \frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{du}{u^2+1} - \int \frac{udu}{u^2+1} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\ln\left|u^2+1\right| = \ln|x| + \ln C, \qquad \operatorname{arctg} u = \ln C|x| + \ln\sqrt{u^2+1},$$

$$\operatorname{arctg} u = \ln\left(C|x|\sqrt{u^2+1}\right), \qquad \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\left(C|x|\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1}\right),$$

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\left(C|x| \cdot \sqrt{\frac{y^2+x^2}{x^2}}\right), \text{ або } \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln C\sqrt{y^2+x^2}. \ ⌟$$

22. $(x+y)dx - xdy = 0$.

⌜ $xdy = (x+y)dx$, $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$, $y' = \frac{x+y}{x}$.

Права частина рівняння – функція $f(x,\ y) = \frac{x+y}{x}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f\left(tx,\,ty\right)=\frac{tx+ty}{tx}=\frac{t\left(x+y\right)}{tx}=\frac{x+y}{x}=f\left(x,\,y\right).$$

Застосуємо підстановку $y=ux$, $y'=u'x+u$.

$$u'x+u=\frac{x+ux}{x},\;\; u'x+u=\frac{x\left(1+u\right)}{x},\;\; u'x+u=1+u,\;\; u'x=1,\;\; u'=\frac{1}{x},$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x},\quad du=\frac{dx}{x},\quad \int du=\int\frac{dx}{x},\quad u=\ln|x|+\ln C,\quad u=\ln C|x|,$$

$\frac{y}{x}=\ln C|x|$, звідки маємо загальний розв'язок $y=x\ln C|x|$. $\lrcorner$

23. $\left(x^2-xy\right)dy+y^2dx=0$.

$\ulcorner$ $\left(x^2-xy\right)dy=-y^2dx$, $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{-y^2}{x^2-xy}$, $\quad y'=\frac{-y^2}{x^2-xy}$.

Права частина рівняння – функція $f\left(x,\,y\right)=\frac{-y^2}{x^2-xy}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f\left(tx,\,ty\right)=\frac{-\left(ty\right)^2}{\left(tx\right)^2-txty}=\frac{-t^2y^2}{t^2\left(x^2-y^2\right)}=\frac{-y^2}{x^2-y^2}=f\left(x,\,y\right).$$

Застосуємо підстановку $y=ux$, $y'=u'x+u$.

$$u'x+u=\frac{-u^2x^2}{x^2-x\cdot ux},\quad u'x+u=\frac{-u^2x^2}{x^2\left(1-u\right)},\quad u'x+u=\frac{-u^2}{1-u},$$

$$u'x=\frac{-u^2}{1-u}-u,\quad u'x=\frac{-u^2-u+u^2}{1-u},\quad u'x=\frac{-u}{1-u},\quad u'x=\frac{u}{u-1},$$

$$u'=\frac{u}{u-1}\cdot\frac{1}{x},\quad \frac{du}{dx}=\frac{u}{u-1}\cdot\frac{1}{x},\quad \frac{u-1}{u}\cdot du=\frac{dx}{x},\quad \int\frac{u-1}{u}du=\int\frac{dx}{x},$$

$$\int du-\int\frac{du}{u}=\int\frac{dx}{x},\qquad u-\ln|u|=\ln|x|+\ln C,\;\; u=\ln C|x|+\ln|u|,$$

$$u=\ln\left(C|xu|\right),\;\; \frac{y}{x}=\ln\left(C\left|x\cdot\frac{y}{x}\right|\right),\text{ звідки } y=x\ln C|y|.\;\lrcorner$$

24. $\left(2\sqrt{xy}-x\right)dy+ydx=0$.

$\ulcorner$ $\left(2\sqrt{xy}-x\right)dy=-y\,dx$, $\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{2\sqrt{xy}-x}$, $y'=\frac{-y}{2\sqrt{xy}-x}$.

Права частина рівняння – функція $f\left(x,\, y\right)=\dfrac{-y}{2\sqrt{xy}-x}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f\left(tx,\, ty\right)=\frac{-ty}{2\sqrt{tx\,ty}-tx}=\frac{-ty}{2t\sqrt{xy}-tx}=\frac{-ty}{t\left(2\sqrt{xy}-x\right)}=\frac{-y}{2\sqrt{xy}-x}=$$

$$=f\left(x,\, y\right).$$

Застосуємо підстановку $y=ux$, $y'=u'x+u$.

$$u'x+u=\frac{-ux}{2\sqrt{x\cdot ux}-x},\quad u'x+u=\frac{-ux}{2x\sqrt{u}-x},\quad u'x+u=\frac{-ux}{x\left(2\sqrt{u}-1\right)},$$

$$u'x+u=\frac{-u}{2\sqrt{u}-1},\qquad u'x=\frac{-u}{2\sqrt{u}-1}-u,\qquad u'x=\frac{-u-2u\sqrt{u}+u}{2\sqrt{u}-1},$$

$$u'x=\frac{-2u\sqrt{u}}{2\sqrt{u}-1},\qquad u'=\frac{-2u\sqrt{u}}{2\sqrt{u}-1}\cdot\frac{1}{x},\qquad \frac{du}{dx}=\frac{-2u\sqrt{u}}{2\sqrt{u}-1}\cdot\frac{1}{x},$$

$$\frac{2\sqrt{u}-1}{-2u\sqrt{u}}du=\frac{dx}{x},\qquad \int\frac{2\sqrt{u}-1}{-2u\sqrt{u}}du=\int\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{2\sqrt{u}}{-2u\sqrt{u}}du+\int\frac{du}{2u\sqrt{u}}=\int\frac{dx}{x},\qquad -\int\frac{du}{u}+\frac{1}{2}\int u^{-\frac{3}{2}}du=\int\frac{dx}{x},$$

$$-\ln|u|-\frac{1}{\sqrt{u}}=\ln C|x|,\qquad \frac{-1}{\sqrt{u}}=\ln C|x\cdot u|,\qquad -\sqrt{\frac{x}{y}}=\ln C\left|x\cdot\frac{y}{x}\right|,$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}}+\ln C|y|=0.\ \lrcorner$$

25. $y'=\dfrac{y}{x}+\sin\dfrac{y}{x}$.

⌜ Права частина рівняння – функція $f\left(x,\, y\right)=\dfrac{y}{x}+\sin\dfrac{y}{x}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f\left(tx,\, ty\right)=\frac{ty}{tx}+\sin\frac{ty}{tx}=\frac{y}{x}+\sin\frac{y}{x}=f\left(x,\, y\right).$$

Застосуємо підстановку $y=ux$, $y'=u'x+u$.

$$u'x+u=\frac{ux}{x}+\sin\frac{ux}{x},\qquad u'x+u=u+\sin u,\qquad u'x+u-u=\sin u,$$

$$u'x = \sin u, \qquad u' = \sin u \cdot \frac{1}{x}, \qquad \frac{du}{dx} = \sin u \cdot \frac{1}{x}, \qquad \frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{dx}{x}, \qquad \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| = \ln C|x|, \qquad \operatorname{tg}\frac{u}{2} = Cx,$$

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2x} = Cx. \quad \lrcorner$$

Вправи для самостійного розв'язання

Розв'язати диференціальні рівняння:

26. $y' = \frac{y}{x} + 5\cos^2\frac{y}{x}$.

27. $y' + \sqrt{4 - \frac{y^2}{x^2}} = \frac{y}{x}$.

28. $xy' - y = \sqrt{y^2 + 2x^2}$.

29. $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}$.

30. $\left(x^2 + 3xy + y^2\right)dx - x^2 dy = 0$.

31. $xy' = y\ln\frac{y}{x}$, якщо $y(1) = 1$.

Відповіді:

26. $\operatorname{tg}\frac{y}{x} = \ln C\left|x^5\right|$.

27. $\arcsin\frac{y}{2x} + \ln C|x| = 0$.

28. $y = \frac{Cx^2}{2} - \frac{1}{C}$.

29. $\sin\frac{y}{x} = Cx$.

30. $y = -x\left(1 + \frac{1}{\ln C|x|}\right)$.

31. $y = xe^{1-x}$.