## Інтерполяція в середині таблиці

Позначимо через *x*0 внутрішній вузол таблиці. Припустимо, що точка інтерполяції *х* лежить поблизу *x*0, з того чи іншого боку. Будемо залучати для інтерполяції табличні точки в такому порядку: спочатку виберемо *x*0, а потім пари точок (*x*0 + *h*; *x*0 – *h*), (*x*0 + 2*h*, *x*0 – 2*h*), ..., (*x*0 + *kh*, *x*0 – *kh*). Число взятих вузлів буде непарним і рівним 2*k* + 1. Позначимо, як і раніше,

*t* = (*x* – *x*0)/*h*,

*f*(*x*0) = *f*0, *f*(*x*1) = *f*1, *f*(*x*–1) = *f*–1 ....

Формула Гауcса для випадку, коли *х* > *x*0, має такий вигляд:

|  |  |
| --- | --- |
| C:\Users\Loerin\AppData\Local\Temp\FineReader10\media\image1.jpeg  | (1) |

Якщо шукана точка *х* знаходиться в середині таблиці і зв'язана з *x*0 співвідношенням *х* < *x*0, формула Гаусса використовується у вигляді:

|  |  |
| --- | --- |
| C:\Users\Loerin\AppData\Local\Temp\FineReader10\media\image2.jpeg | (2) |

На основі двох представлених формул Гаусса можна одержати в результаті перетворень формули Стирлінга і Бесселя.

Обчисливши середнє арифметичне першої та другої інтерполяційних формул Гаусса (1) і (2), одержимо формулу Стирлінга:

|  |  |
| --- | --- |
| C:\Users\Loerin\AppData\Local\Temp\FineReader10\media\image3.jpeg | (3) |

 Легко бачити, що *Sn*(x*i*) = *yi* коли і = 0, ± 1, ± 2,..., ± k. Для виведення формули Бесселя використовується друга інтерполяційна формула Гаусса (1). Після нескладних перетворень одержимо:

|  |  |
| --- | --- |
|  C:\Users\Loerin\AppData\Local\Temp\FineReader10\media\image4.jpeg | (4) |

У формулі Бесселя всі члени, які містять різниці непарного порядку, мають множник *t* –1/2, тому, якщо *t* = 1/2, формула (4) значно спрощується, оскільки всі члени, які містять *t* –1/2 перетворюються на нуль.

За інтерполяції функцій, заданих таблично з постійним кроком аргументу *h*, слід керуватися такими правилами. Якщо значення *х* знаходиться близько до початку відрізка, на якому задана таблиця значень функції, то для інтерполяції потрібно використовувати формулу Ньютона для інтерполяції вперед, а коли *х* близькі до кінця відрізка — формулу Ньютона для інтерполяції назад, тому що ці формули допускають застосування правильних різниць до максимального порядку. Якщо аргумент х, для якого потрібно обчислити значення функції, знаходиться в середині таблиці, рекомендується використовувати формулу Стирлінга, якщо I*t*| ≤ 1/4, і формулу Бесселя — якщо 1/4 ≤ I*t*l ≤ 3/4. (Крім того, в разі використання формули Стирлінга слід враховувати в ній останню, правильну різницю непарного порядку, а у формулі Бесселя — останню, правильну різницю парного порядку.)

## Похибка інтерполяції

Графік інтерполяційного многочлена *у* = *φ*(x) проходить через задані точки, тобто значення многочлена і даної функції *у* = *f*(*x*) співпадають у вузлах *х* = *хi* (*i* = 0, 1, ..., *n*). Якщо функція *f*(*x*) сама є многочленом степеня *n*, то має місце тотожність *f*(*x*) ≡ *φ*(x). У загальному випадку в точках, відмінних від вузлів інтерполяції, *R*(*x*) = *f*(x) – *φ*(x) ≠ 0. Ця різниця є похибкою інтерполяції і називається *залишковим членом інтерполяційної формули*. Оцінка його визначається наступним чином.

Припустимо, що задані числа *уi* є значеннями деякої функції *у* = *f*(*x*) в точках *х* = *хi*. Нехай ця функція неперервна і має неперервні похідні до (*n* + 1)-го порядку включно. Можна показати, що в цьому випадку залишковий член інтерполяційного алгебраїчного многочлена (Лагранжа, Ньютона і т.п.) має вигляд

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

Тут *f*(*n*+1)(*x*\*) – похідно (*n*+ 1)-го порядку функції *f*(*x*) в деякій точці *x* = *x*\*, *x*\* ϵ [*x*0, *xn*]. Якщо максимальне значення цієї похідної дорівнює

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6) |

То можна записати формулу для оцінки залишкового члена:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |

де функція ω*n*(*x*) визначена як:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8) |

Проаналізувавши поведінку функції ω*n*(*x*), можна зробити висновок, що похибка інтерполяції *R*(*x*) в середньому буде тим вище, чим ближче точка *х* лежить до кінців відрізку [*x*0,*xn*]. Якщо ж використати інтерполяційний многочлен для апроксимації функції зовні відрізку [*x*0,*xn*] (екстраполяція) то похибку зросте істотно.

Вид залишкового члена інтерполяційного многочлена Ньютона в випадку рівновіддалених вузлів можна легко отримати з (5):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9) |

Якщо припустити, що різниця Δ*n*+ 1*yn* постійна, то можна записати наступну формулу залишкового члена першого інтерполяційного многочлена Ньютона:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (10) |

З (9) аналогічно до (7) можна також записати:

|  |  |
| --- | --- |
| $$\left|R\_{N}\left(x\right)\right|<\sqrt{\frac{2}{nπ}}M\_{n+1}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1}≈O(h^{n+1})$$ | (11) |

Виходячи з цього кажуть, що інтерполяція алгебраїчними поліномами забезпечує (*n*+ 1)-й порядок точності. Тобто похибка інтерполяції порівняно з точним значенням пропорційна кроку інтерполяції в степені (*n*+ 1).

Похибки інтерполяційних формул дорівнюють добутку двох множників, один з яких, *f*(*n*+ 1)(*x*\*), залежить від властивостей функції *f*(*x*) і не піддається корегуванню, а величина ω*n*(*x*), визначається винятково вибором вузлів інтерполяції.

Задача про раціональний вибір вузлів інтерполяції *хi*, (коли задана кількість вузлів *x*) для того, щоб поліном ω*n*(*x*) мав найменше максимальне значення за абсолютною величиною на відрізку [*a*, *b*], була розв’язана Чебишевим, який довів, що найкращий вибір задається формулою:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (12) |

де

|  |  |
| --- | --- |
|  | (13) |

Таким чином, підвищення точності інтерполяції доцільно виконувати за рахунок зменшення кроку (при незмінному порядку інтерполяційного полінома *n*) і спеціального вибору точок *xi*. Підвищення степеня полінома при локальній інтерполяції також зменшує похибку, але тут не завжди відома поведінка похідної *f*(*n*+ 1)(*x*) при збільшенні *n*.

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

Приклад

|  |
| --- |
|  |