## Інтерполяційний многочлен Ньютона

Інтерполяційний поліном Ньютона має наступний вигляд:

|  |  |
| --- | --- |
| *Pn*(*x*)= *a*0 + *a*1(*x*–*x*0) + *a*2(*x*–*x*0)(*x*–*x*1) + … +*an*(*x*–*x*0)(*x*–*x*1) … (*x*–*xn*­ 1) | (1) |

Відмітимо, що на відміну від многочлену Лагранжа, поліном Ньютона володіє рекурентною властивістю, тобто поліном степеня *n* *Pn*(*x*) можна просто отримати за поліномом степеня *n*– 1 *Pn*– 1(*x*) за допомогою рекурентного співвідношення:

|  |  |
| --- | --- |
| *Pn*(*x*)= *Pn*– 1(*x*) +*an*(*x*–*x*0)(*x*–*x*1) … (*x*–*xn*­ 1) | (2) |

Ця властивість буває досить корисною на практиці, коли будується декілька поліномів *P*1(*x*), *P*2(*x*), …, *Pn*(*x*), щоб вибрати той, який задовольняє конкретні потреби.

Невідомі коефіцієнти многочлена Ньютона можна знайти використавши умову проходження його через вузли інтерполяції, тобто *Pn*(*xi*) = *yi* (*I* = 0,1,…*n*).

|  |  |
| --- | --- |
| *P*0(*x*0)= *a*0 = *y*0,*P*1(*x*1)= *a*0 + *a*1(*x*1–*x*0) = *y*0 + *a*1(*x*1–*x*0) = *y*1,$$a\_{1}=\frac{y\_{1}-y\_{0}}{x\_{1}-x\_{0}},$$*P*2(*x*2)= *a*0 + *a*1(*x*2–*x*0)  + *a*2(*x*2–*x*0)(*x*2–*x*1) = *y*2,$$a\_{2}=\frac{y\_{2}-a\_{0}-a\_{1}(x\_{2}-x\_{0})}{(x\_{2}-x\_{0})(x\_{2}-x\_{1})}={\left(\frac{y\_{2}-y\_{1}}{x\_{2}-x\_{1}}-\frac{y\_{1}-y\_{0}}{x\_{1}-x\_{0}}\right)}/{(x\_{2}-x\_{0})}$$ | (3) |

Для подальшого викладення необхідно ввести поняття різниць. Нехай ми маємо набір значень заданої функції *f*(*x*): *f*(*x*0), *f*(*x*1), …, *f*(*xn*) в вузлах інтерполяції *x*0, *x*1, …, *xn*, *xi ≠ xj*, при *i ≠ j*. Для цієї функції і вузлів можна представити наступні відношення, які називаються розділеними різницями першого порядку

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

Отримавши різниці першого порядку, можна утворити розділені різниці другого порядку:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

Взагалі, якщо розділені різниці *k-*го порядку вже визначені, то розділені різниці (*k*+1)-го порядку знаходять за допомогою формули:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *i* = 1, 2, …, *n – k* | (6) |

Іноді замість *f*(*xi*; *xi*+1; …; *xi*+*k*) для позначення розділених різниць використовують вираз *f*[*xi*; *xi*+1; …; *xi*+*k*] або [*xi*; *xi*+1; …; *xi*+*k*].

При обчислення розділені різниці записують у виді таблиці

Таблиця 1



Використовуючи розділені різниці можна отримати формулу Ньютона для нерівних проміжків:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Pn*(*x*)= |  | (7) |

Досить часто вузли інтерполяції будуються регулярно. Розглянемо випадок, коли вузли рівновіддалені, тобто *xi*– –*xi*+1 = *h* = const (*i* = 0, 1, …, *n*). Величина *h* називається *кроком*.

Введемо також поняття *кінцевих різниць*. На системі значень заданої функції *f*(*x*): *f*(*x*0), *f*(*x*1), …, *f*(*xn*) в рівновіддалених вузлах інтерполяції *x*0, *x*1 =*x*0 + *h*, …, *xn* =*x*0 + *nh* можна обчислити наступні величини, які називаються *скінченними різницями першого порядку*.

|  |  |
| --- | --- |
| Δ*f*(*x*0) = *f*(*x*1) – *f*(*x*0)Δ*f*(*x*1) = *f*(*x*2) – *f*(*x*1)… … …Δ*f*(*xn*– 1) = *f*(*xn*) – *f*(*xn –*1) | (8) |

Скінченні різниці другого порядку:

|  |  |
| --- | --- |
| Δ2*f*(*x*0) = Δ*f*(*x*1) – Δ*f*(*x*0)Δ2*f*(*x*1) = Δ*f*(*x*2) – Δ*f*(*x*1)… … …Δ2*f*(*xn*– 2) = Δ*f*(*xn*–1) – Δ*f*(*xn –*2) | (9) |

У загальному вигляді різниця *k*-го порядку обчислюється за формулою

|  |  |
| --- | --- |
| Δ*kf*(*xi*) = Δ*k*–1*f*(*xi*+ 1) – Δ*k*–1*f*(*xi*) *i* = 0, 1, …, *n –*1 | (10) |

Кінцеві різниці можна безпосередньо виразити через значення функції:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (11) |

Аналогічно для будь-якого *k*:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (12) |

Цю формулу можна записати і для різниці у вузлі *xi*:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (13) |

Використовуючи кінцеві різниці, можна визначити *yk*:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (14) |

Використавши кінцеві різниці, отримаємо наступний вид інтерполяційного полінома Ньютона для рівновіддалених вузлів:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Pn*(*x*)= |  | (15) |

Формулу (15) часто записують в іншому виді. Для цього вводиться змінна *t* = (*x* – *x*0)/*h*, тоді

|  |  |
| --- | --- |
|  | (16) |

Враховуючи (16) отримаємо:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Pn*(*x*)= |  | (17) |

Отриманий вираз називається *першим інтерполяційним многочленом Ньютона для інтерполювання вперед*. Він може апроксимувати задану функцію *у* = *f*(x) на усьому відрізку зміни аргументу [*х*0, *хn*]. Проте з точки зору підвищення точності розрахунків (шляхом зменшення погрішностей округлення) доцільніше використовувати (17) для обчислення значень функції в точках лівої половини даного відрізку.

Для правої половини відрізку [*х*0, *хn*] різниці краще обчислювати справа наліво. В цьому випадку *t* = (*х* – *xn*)/h, тобто t < 0, і інтерполяційний многочлен Ньютона можна отримати у виді

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Pn*(*x*)= |  | (18) |

Отриманий вираз називається *другим інтерполяційним многочленом Ньютона для інтерполювання назад*.

Якщо обчислювані скінченні різниці записувати в таблиці (як, наприклад табл. 2), то для формули (17) буде використовуватись верхній рядок різниць, а для формули (18) – нижній косий рядок різниць. Необхідно пам’ятати, що кожна з отриманих формул Ньютона є іншою формою запису многочлена Лагранжа, і що різняться ці формули лише застосовуваними скінченними різницями (за умови, що в них використані ті ж самі вузли інтерполяції). Обираючи конкретну формулу, потрібно зважати на те, що краще вести обчислення використовуючи спочатку найближчі до *x* вузли поступово підключаючи більш віддалені. В загальному випадку вибір способу інтерполяції визначається з міркувань точності, часу обчислень, похибок округлень та ін.

Розглянемо приклад використання інтерполяційної формули Ньютона при ручному обчисленні.

Приклад

|  |
| --- |
| Таблиця 2Вичислити в точці *х* = 0.1 значення функції *у* = *f*(*x*), заданої в таблиці. 2.Процес обчислень зручно звести в ту ж таблицю. 2. Кожна наступна кінцева різниця виходить шляхом віднімання в попередній колонці верхнього рядка з нижнього. При х = 0.1 маємо *t* = (*х* – *x*0)/h = (0.1 – 0)/0.2 = 0.5. Проводячи обчислення з п'ятьма розрядами по формулі (17), отримаємоДля порівняння проведемо аналогічні обчислення за формулою (18). В цьому випадку *t* = (*х* – *xn*)/h = (0.1 – – 1)/0.2 = –4.5. ТодіВидно, що тут відбувається помітна втрата точності. Якщо проводити обчислення точніше, то формули (17) і (18) приведуть до одного результату *y*(0.1) ≈ 3.3975. |

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

Приклад

|  |
| --- |
|  |