Лекція 5. Числові методи розв’язання систем нелінійних рівнянь

Багато практичних задач зводяться до розв’язання системи нелінійних рівнянь.

Нехай для обчислення невідомих *x*1, *х*2, ..., *хn* необхідно розв’язати систему *n* нелінійних рівнянь:

|  |  |
| --- | --- |
| *F*1(*x*1, *x*2, …, *xn*) = 0,*F*2(*x*1, *x*2, …, *xn*) = 0,………………………………*Fn*(*x*1, *x*2, …, *xn*) = 0. | (1) |

В векторній формі цю систему можна записати так

|  |  |
| --- | --- |
| **F**(**x**) = 0, |  |

де **F** = {*F*1, *F*2, …, *Fn*}, **x** = {*x*1, *x*2, …, *xn*}.

На відміну від систем лінійних рівнянь не існує прямих методів рішення нелінійних систем загального вигляду. Лише в окремих випадках систему (1) можна розв’язати безпосередньо. Наприклад, для випадку двох рівнянь іноді вдається виразити одну невідому через іншу і таким чином звести завдання до рішення одного нелінійного рівняння відносно одної невідомої.

Для розв’язання систем нелінійних рівнянь зазвичай використовуються ті ж ітераційні методи, що і для розв’язання рівнянь з однією змінною. Нижче будуть розглянуті деякі з цих методів: метод простої ітерації, метод Зейделя і метод Ньютона.

## Метод простої ітерації

Систему рівнянь (1) представимо у вигляді

|  |  |
| --- | --- |
| *x*1 = *f*1(*x*1, *x*2, …, *xn*),*x*2 = *f*2(*x*1, *x*2, …, *xn*),………………………………*xn* = *fn*(*x*1, *x*2, …, *xn*). | (2) |

Для розв’язання цієї системи можна використати метод простої ітерації, аналогічний відповідному методу для одного рівняння. Значення невідомих на *k*-й ітерації будуть знайдені з використанням їх значень на попередній ітерації як

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

Ітераційний процес в більшості методів розв’язання систем нелінійних рівнянь триває до тих пір, поки зміни усіх невідомих в двох послідовних ітераціях не стануть малими, тобто в якості критерію завершення ітерацій вибирається одна з умов:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |
|  | (6) |
|  | (7) |

де *ε* > 0 – допустима похибка розв’язку.

Тут в першому випадку відмінність векторів **х**(*k*) і **х**(*k*–1) "на *ε*" розуміється в сенсі малості модуля їх різниці, в другому – в сенсі малості різниць усіх відповідних компонент векторів, в третьому – в сенсі малості відносних різниць компонент.

Приклад

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Найти положительное решение системы методом простой итерации с точностью ε=10–4.РешениеДля выбора начального приближения применяем графический способ. Построив на плоскости (*x*1, *х*2) в интересующей нас области кривые *f*1(х1.х2) = 0 и *f*2(х1.х2) = 0 (рис. 1), определяем, что положительное решение системы уравнений находится в квадрате 0 < х1 < 0.5, 0.5 < х2 < 1.0 .Рис. 1Преобразуем исходную систему уравнений к видуВ качестве начального приближения примем *х*1(0)= 0, 25.*х*2(0) =0.75. Последующие приближения определяем какРезультаты вычислений содержатся в таблице 1Таблица 1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *k* |  |  |
| 0 | 0.250000.75000 | 0.181250.70702 |
| 1 | 0.181250.70702 | 0.196740.70617 |
| 2 | 0.196740.70617 | 0.196390.70615 |
| 3 | 0.196390.70615 | 0.196410.70615 |
| 4 | 0.196410.70615 |  |

х1\* = 0.1964, x2\* = 0.7062. |

## Метод Зейделя

Систему (2) можна розв’язувати і методом Зейделя, що подібний до методу Гауса-Зейделя розв’язання систем лінійних рівнянь. Значення *хi*(*k*) знаходиться з *i*-го рівняння системи (2) з використанням вже вичислених на поточній ітерації значень невідомих. Таким чином, значення невідомих на *k*-й ітерації знаходитимуться не з допомогою (3), а з допомогою співвідношення

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

В якості критерію завершення ітерацій вибирається одна з умов (5)-(7) як і в методі простої ітерації.

При використанні методу простої ітерації і методу Зейделя успіх багато в чому визначається вдалим вибором початкових наближень невідомих: вони мають бути досить близькими до істинного розв’язку. Інакше ітераційний процес може не збігтися.

## Метод Ньютона

Цей метод має набагато швидшу збіжність, ніж метод простої ітерації і метод Зейделя. У разі одного рівняння *F*(*x*) = 0 алгоритм методу Ньютона був легко отриманий шляхом запису рівняння дотичної до кривої *у* = *F*(*x*). По суті для знаходження нового наближення функція *F*(*x*) замінювалася лінійною функцією, тобто розкладалася в ряд Тейлора, при цьому член, що містить другу похідну, відкидався (як і усі подальші члени). Та ж ідея лежить в основі методу Ньютона для системи рівнянь: функції *Fi*(*x*1, *х*2, ..., *хn*) розкладаються в ряд Тейлора, причому в розкладанні відкидаються члени, що містять другі (і більш високих порядків) похідні.

Нехай наближені значення невідомих системи (1), отримані на попередній ітерації, рівні відповідно *х*1(*k*– 1), *х*2(*k*– 1),... ..., *хn*(*k*– 1). Задача полягає в знаходженні приростів (поправок) до цих значень Δ*x*1, Δ*x*2, …, Δ*xn* завдяки яким наступне наближення до розв’язку системи(1) запишеться у виді

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8) |

Проведемо розкладання лівих частин рівнянь (1) в ряд Тейлора, обмежуючись лише лінійними членами відносно приростів:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9) |

У правих частинах цих співвідношень значення *F*1, *F*2, ..., *Fn* і їх похідних обчислюються в точці **х**(*k*–1) = (*х*1(*k*–1), *х*2(*k*–1), ..., *хn*(*k*–1)).

Оскільки відповідно до (1) ліві частини (9) повинні перетворюватися на нуль, прирівняємо нулю і праві частини, тобто знайдемо нове наближення з умови рівності нулю розкладань функцій *Fi*. Отримаємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно приростів:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (10) |

Визначником системи (10) є *якобіан*

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Для існування єдиного рішення системи (10) він має бути відмінним від нуля на кожній ітерації.

Таким чином, ітераційний процес розв’язання системи рівнянь (1) методом Ньютона полягає у визначенні приростів Δ*x*1, Δ*x*2, …, Δ*xn* до значень невідомих на кожній ітерації за допомогою розв’язання системи (10). Рахунок припиняється при виконанні однієї з умов (5) – (7) або

|  |  |
| --- | --- |
| , в цьому випадку нев’язка визначається як  |  |

Наприклад, умова (6), яка з врахуванням (8) зведеться до виду . У методі Ньютона також важливий вдалий вибір початкового наближення для забезпечення хорошої збіжності. Збіжність погіршується зі збільшенням числа рівнянь системи.

Як приклад розглянемо використання методу Ньютона для вирішення системи двох рівнянь

|  |  |
| --- | --- |
|  | (11) |

Нехай наближені значення невідомих рівні *а*, *b*. Припустимо, що якобіан системи (11) .при *х* = *а*, *у* = *b* відмінний від нуля, тобто

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Тоді наступні наближення невідомих можна записати у вигляді

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Величини, що стоять в правих частинах, обчислюються при *х* = *а*, *у* = *b*.

Приклад

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Найти положительное решение системы методом Ньютонас точностью ε=10–4.РешениеДля выбора начального приближения применяем графический способ (рис. 1). В качестве начального приближения примем *х*1(0)= 0, 25, *х*2(0) =0.75.Для системы двух уравнений расчетные формулы (8), (10) удобно записать в виде разрешенном относительно *х*1(k+1), *х*2(k+1):В рассматриваемом примере:Подставляя в правые части соотношений выбранные значения *х*1(0), *х*2(0), получим приближение *х*1(1), *х*2(1), используемое, в свою очередь, для нахождения *х*1(2), *х*2(2). Итерации продолжаются до выполнения условия (6)Результаты вычислений содержатся в таблице 2Таблица 2

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *k* |  |  |  |  | det A1(k) | det A2(k) | det J(k) |
| 0 | 0.250000.75000 | 0.068750.04375 | 1.012500.02500 | 0.300000.97500 | 0.05391 | 0.04258 | 0.97969 |
| 1 | 0.194980.70654 | -0.001380.00037 | 1.007600.00734 | 0.282620.98050 | -0.00146 | 0.00038 | 0.98588 |
| 2 | 0.196460.70615 | 0.000050.00000 | 1.007720.00797 | 0.282460.98035 | 0.00005 | 0.00000 | 0.98567 |
| 3 | 0.196410.70615 |  |  |  |  |  |  |

х1\* = 0.1964, x2\* = 0.7062. |

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

Приклад

|  |
| --- |
|  |