10. Однорідні системи диференціальних рівнянь

Система диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \qquad (35)$$

де коефіцієнти a_{ij} – сталі, t – незалежна змінна, $x(t)$, $y(t)$ – невідомі функції, називається *однорідною системою двох лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.*

Задача Коші для системи (35) полягає у знаходженні функцій $x(t)$ і $y(t)$, що задовольняють дану систему і задані початкові умови

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0. \qquad (36)$$

Розв'язання системи (35) виконують таким чином. Вважаючи, що в першому рівнянні системи $a_{12} \neq 0$, виразимо в ньому y через x:

$$y = \frac{1}{a_{12}}\frac{dx}{dt} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x. \qquad (37)$$

Продиференціюємо цю рівність по t:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{a_{12}}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{a_{11}}{a_{12}}\frac{dx}{dt}. \qquad (38)$$

Підставляючи вирази (37) і (38) в друге рівняння системи (35), отримаємо

$$\frac{1}{a_{12}}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{a_{11}}{a_{12}}\frac{dx}{dt} = a_{21}x + a_{22}\left(\frac{1}{a_{12}}\frac{dx}{dt} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x\right),$$

$$\frac{1}{a_{12}}\frac{d^2x}{dt^2} - \left(\frac{a_{11}}{a_{12}} + \frac{a_{22}}{a_{12}}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{a_{11}}{a_{12}}a_{22} - a_{21}\right)x = 0,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (a_{11} + a_{22})\frac{dx}{dt} + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = 0. \qquad (39)$$

Рівняння (39) є лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами виду (30) з незалежною змінною t і невідомою функцією $x(t)$. Розв'язуємо його відносно $x(t)$. Після цього за формулою (37) знаходимо функцію $y(t)$ і записуємо остаточну відповідь.

Зауваження. Якщо в першому рівнянні системи (35) коефіцієнт $a_{12} = 0$, то це рівняння матиме вигляд

$$\frac{dx}{dt}=a_{11}x .$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язавши його, підставимо знайдену функцію $x(t)$ в друге рівняння системи (35) і отримаємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно $y(t)$. Розв'язуємо його і записуємо остаточну відповідь.

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

108. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x+5y\\ \dfrac{dy}{dt}=x+3y.\end{cases}$

Γ Маємо систему виду (35). З першого рівняння виражаємо y:

$$\frac{dx}{dt}=-x+5y,\quad 5y=\frac{dx}{dt}+x,\quad y=\frac{1}{5}\frac{dx}{dt}+\frac{1}{5}x .$$

Диференціюємо останню рівність по t і отримуємо

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{5}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{5}\frac{dx}{dt} .$$

Підставимо знайдені y та $\dfrac{dy}{dt}$ в друге рівняння системи:

$$\frac{1}{5}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{5}\frac{dx}{dt}=x+3\left(\frac{1}{5}\frac{dx}{dt}+\frac{1}{5}x\right),\quad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}=5x+3\frac{dx}{dt}+3x,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-8x=0 .$$

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами виду (30). Коренями його характеристичного рівняння $k^2-2k-8=0$ є $k_1=-2$ і $k_2=4$. Тоді загальний розв'язок цього рівняння буде мати вигляд: $x(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{4t}$, де C_1 і C_2 –

довільні сталі. Так як $\frac{dx}{dt} = -2C_1e^{-2t} + 4C_2e^{4t}$, то підставляючи знайдені $x(t)$ та $\frac{dx}{dt}$ у вираз для y ($y = \frac{1}{5}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{5}x$), отримаємо

$$y(t) = \frac{1}{5}\left(-2C_1e^{-2t} + 4C_2e^{4t}\right) + \frac{1}{5}\left(C_1e^{-2t} + C_2e^{4t}\right), \ y(t) = -\frac{1}{5}C_1e^{-2t} + C_2e^{4t}.$$

Запишемо тепер загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{4t} \\ y(t) = -\frac{1}{5}C_1e^{-2t} + C_2e^{4t}. \end{cases}$$ ┘

109. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 8y \\ \frac{dy}{dt} = x + 4y. \end{cases}$

┌ Маємо систему виду (35). З першого рівняння виражаємо y: $\frac{dx}{dt} = 2x + 8y$, $8y = \frac{dx}{dt} - 2x$, $y = \frac{1}{8}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{4}x$. Диференціюємо останню рівність по t і отримуємо: $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{8}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{4}\frac{dx}{dt}$.

Підставляємо останні дві рівності в друге рівняння системи:

$$\frac{1}{8}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{4}\frac{dx}{dt} = x + 4\left(\frac{1}{8}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{4}x\right), \ \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} = 8x + 4\frac{dx}{dt} - 8x,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} = 0.$$

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами виду (31). Коренями його характеристичного рівняння $k^2 - 6k = 0$ є $k_1 = 0$ і $k_2 = 6$. Тоді загальний розв'язок цього рівняння буде мати вигляд:

$x(t) = C_1 + C_2e^{6t}$, де C_1 і C_2 довільні сталі. Так як $\frac{dx}{dt} = 6C_2e^{6t}$, то підставивши ці вирази у вираз для y ($y = \frac{1}{8}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{4}x$), отримаємо

$$y(t)=\frac{1}{8}\cdot 6C_2e^{6t}-\frac{1}{4}\left(C_1+C_2e^{6t}\right)=-\frac{1}{4}C_1+\frac{1}{2}C_2e^{6t}.$$

Запишемо загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases}x(t)=C_1+C_2e^{6t}\\ y(t)=-\dfrac{1}{4}C_1+\dfrac{1}{2}C_2e^{6t}.\end{cases}$$ ┘

110. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x+y\\ \dfrac{dy}{dt}=8x+y,\end{cases}$

якщо $x(0)=4$, $y(0)=2$.

┌ Маємо систему виду (35). З першого рівняння виражаємо y: $\frac{dx}{dt}=3x+y$, $y=\frac{dx}{dt}-3x$. Диференціюємо останню рівність по t і отримуємо $\frac{dy}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}$.

Підставляємо останні дві рівності в друге рівняння системи:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}=8x+\frac{dx}{dt}-3x,\quad \frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}-5x=0.$$

Це рівняння виду (30). Коренями його характеристичного рівняння $k^2-4k-5=0$ є $k_1=-1$ і $k_2=5$. Тоді загальний розв'язок цього рівняння буде мати вигляд: $x(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{5t}$. Так як $\frac{dx}{dt}=-C_1e^{-t}+5C_2e^{5t}$, то підставляючи ці вирази у вираз для y $\left(y=\frac{dx}{dt}-3x\right)$, отримаємо

$$y(t)=-C_1e^{-t}+5C_2e^{5t}-3\left(C_1e^{-t}+C_2e^{5t}\right)=-4C_1e^{-t}+2C_2e^{5t}.$$

Запишемо загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases}x(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{5t}\\ y(t)=-4C_1e^{-t}+2C_2e^{5t}.\end{cases}$$

Знайдемо розв'язок задачі Коші з початковими умовами виду (36) $x(0)=4$, $y(0)=2$:

$$\begin{cases}C_1+C_2=4\\ -4C_1+2C_2=2,\end{cases}\qquad \begin{cases}C_1=1\\ C_2=3.\end{cases}$$

Записуємо частинний розв'язок системи, підставляючи в загальний розв'язок знайдені значення $C_1=1$ і $C_2=3$:

$$\begin{cases}x(t)=e^{-t}+3e^{5t}\\ y(t)=-4e^{-t}+6e^{5t}.\end{cases}$$ ┘

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

111. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=5x+4y\\ \dfrac{dy}{dt}=2x+3y.\end{cases}$

112. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+y\\ \dfrac{dy}{dt}=2x+3y,\end{cases}$ якщо $x(0)=8$, $y(0)=1$.

113. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-5x-4y\\ \dfrac{dy}{dt}=-2x-3y,\end{cases}$ якщо $x(0)=7$, $y(0)=5$.

Відповіді:

111. $\begin{cases}x(t)=C_1e^{t}+C_2e^{7t}\\ y(t)=-C_1e^{t}+\dfrac{1}{2}C_2e^{7t}.\end{cases}$ **112.** $\begin{cases}x(t)=5e^{t}+3e^{4t}\\ y(t)=-5e^{t}+6e^{4t}.\end{cases}$

113. $\begin{cases}x(t)=8e^{-7t}-e^{-t}\\ y(t)=4e^{-7t}+e^{-t}.\end{cases}$