6. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння (ЛНДР) другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Рівняння вигляду

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (1)$$

де p, q – дійсні числа, називається ЛНДР другого порядку із сталими коефіцієнтами, якщо $f(x) \neq 0$.

Згідно з теоремою 5 п. 4 загальний розв'язок ЛНДР (1) має вид

$$y = \tilde{y} + y^*,$$

де $\tilde{y}$ – загальний розв'язок відповідного ЛОДР: $y''+ py'+ qy = 0$,
а y^* – який-небудь частинний розв'язок ЛНДР (1).

Якщо права частина рівняння (1) f(x) має певний вигляд, то частинний розв'язок y^* можна знаходити методом невизначених коефіцієнтів. Розглянемо кілька випадків:

а) права частина f(x) має вигляд

$$f(x) = P_n(x)e^{mx}, \qquad (2)$$

де $P_n(x)$ – многочлен степеня n; m – дійсне число, що може дорівнювати й нулю.

У цьому випадку частинний розв'язок шукають у вигляді

$$y^* = x^r Q_n(x)e^{mx},$$

де $Q_n(x)$ – многочлен того ж степеня, що й $P_n(x)$, r – кратність, з якою входить m у число коренів характеристичного рівняння

$$k^2 + pk + q = 0.$$

$r = 0$, якщо m не є коренем характеристичного рівняння $m \neq k_1$ і $m \neq k_2$;

$r = 1$, якщо m є простим коренем характеристичного рівняння
$m = k_1 \neq k_2$ ($m = k_2 \neq k_1$);

$r = 2$, якщо m є двократним коренем характеристичного рівняння
$m = k_1 = k_2$.

Невідомі коефіцієнта многочлена $Q_n(x)$ шукають методом невизначених коефіцієнтів, суть якого розглянемо на конкретному прикладі.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 4y' + 3y = 4xe^{3x}$$

Маємо ЛНДР II-го порядку із сталими коефіцієнтами і правою частиною $f(x) = 4xe^{3x}$.

Загальний розв'язок даного рівняння має вид

$$y = \tilde{y} + y^*,$$

1) Знайдемо $\tilde{y}$ – загальний розв'язок відповідного ЛОДР:

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

Характеристичне рівняння

$$k^2 - 4k + 3 = 0$$

має дійсні і різні корені $k_1 = 1$, $k_2 = 3$.

Тому $\tilde{y} = C_1e^x + C_2e^{3x}$.

2) Знайдемо y^* – частинний розв'язок ЛНДР. Права частина рівняння $4xe^{3x}$ має вигляд $P_1(x)e^{3x}$, де $P_1(x) = 4x$ – многочлен першого степеня. Оскільки $m = 3$ є простим кореним характеристичного рівняння, т. б. $m = k_2 = 3$, то $r = 1$ і частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y^* = xQ_n(x)e^{3x},$$

або

$$y^* = x(Ax + B)e^{3x}.$$

Маємо $y^{*\prime} = (Ax^2 + Bx)'e^{3x} + (Ax^2 + Bx)'(e^{3x})' = (2Ax + B)\, e^{3x} + + (Ax^2 + Bx)e^{3x} \cdot 3 = (3Ax^2 + (2A + 3B)x + B)e^{3x}$,

$y^{*\prime\prime}=(6Ax + 2A + 3B)\, e^{3x} + (3Ax^2 + (2A + 3B)x + B)e^{3x} \cdot 3= = (9Ax^2 + (12A + 9B)x + 2A + 6B)\, e^{3x}$

Підставляючи значення y^*, $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ в задане рівняння дістаємо

$y^{*\prime\prime} - 4y^{*\prime} + 3y^* = (9Ax^2 + (12A + 9B)x + 2A + 6B)\, e^{3x} -$

$- (12Ax^2 + (8A + 12B)x + 4B)e^{3x} + (3Ax^2 + 3Bx)e^{3x} = 4xe^{3x}$,

або
$$(4Ax + 2A + 2B)e^{3x} = 4xe^{3x}.$$

Скоротивши на $2e^{3x} \neq 0$ і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах, дістанемо систему

$$\begin{array}{c|l} x^1 & 2A = 2 \\ x^0 & A + B = 0 \end{array} \Bigg\} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = -1 \end{cases}$$

Отже, шуканий частинний розв'язок ЛНДР має вигляд

$y^* = x(x - 1)\, e^{3x}$.

Загальний розв'язок даного рівняння:

$y = \tilde{y} + y^* = C_1e^x + C_2e^{3x} + x(x - 1)e^{3x}$;

б) права частина f(x) має вигляд

$$f(x) = M\cos bx + N\sin bx, \qquad (3)$$

де M, N, b – дійсні числа, причому $b \neq 0$.

Тоді частинний розв'язок ЛНДР (1) шукають у вигляді

$$y^* = A\cos bx + B\sin bx,$$

якщо bi не є коренем характеристичного рівняння, і

$$y^* = x(A\cos bx + B\sin bx),$$

якщо bi є коренем характеристичного рівняння.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 4y' + 13y = 29\sin 2x.$$

Маємо ЛНДР ІІ-го порядку із сталими коефіцієнтами і правою частиною $f(x) = 29\sin 2x$.

Загальний розв'язок цього рівняння має вид

$$y = \tilde{y} + y^*,$$

1) Знайдемо $\tilde{y}$ – загальний розв'язок відповідного ЛОДР:

$$y'' + 4y' + 13y = 0$$

Характеристичне рівняння

$$k^2 + 4k + 13 = 0$$

має комплексні корені

$$k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-13} = -2 \pm 3i \quad (\alpha = -2; \beta = 3).$$

Тому $\tilde{y} = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

2) Знайдемо y* – частинний розв'язок ЛНДР. Права частина його 29sin2x має вигляд Mcos 2x + Nsin 2x, де M = 0, N = 29. Оскільки число 2i не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y^* = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Продиференціювавши двічі, отримаємо

$$y^{*\prime} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x.$$

$$y^{*\prime\prime} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x.$$

Підставляючи значення y^*, $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ в задане рівняння дістаємо

$$y^{*\prime\prime} + 4y^{*\prime} + 13y^* = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 8A\sin 2x + 8B\cos 2x +$$
$$+ 13A\cos 2x + 13B\sin 2x = 29\sin 2x,$$

або $(9A + 8B)\cos 2x + (-8A + 9B)\sin 2x = 29\sin 2x$

Прирівнюючи коефіцієнти при cos 2x і sin 2x в обох частинах рівності, маємо систему

$$\left.\begin{array}{l|l} \cos 2x & 9A + 8B = 0 \\ \sin 2x & -8A + 9B = 29 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{8}{5}, \\ B = \frac{9}{5}. \end{cases}$$

Отже, шуканий частинний розв'язок ЛНДР має вигляд

$$y^* = -\frac{8}{5}\cos 2x + \frac{9}{5}\sin 2x$$

Загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = \tilde{y} + y^* = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) - \frac{8}{5}\cos 2x + \frac{9}{5}\sin 2x;$$

в) права частина f(x) має вигляд

$$f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx), \qquad (4)$$

де $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлени степеня n і m відповідно a, в – дійсні числа, причому $b \neq 0$.

Тоді частинний розв'язок ЛНДР (1) шукають у вигляді

$$y^* = e^{ax}(U_k(x)\cos bx + V_k(x)\sin bx),$$

де $U_k(x)$, $V_k(x)$ – многочлени степеня $k = \max(n, m)$ з невизначеними коефіцієнтами, якщо число $a + bi$ не є коренем характеристичного рівняння $y^* = xe^{ax}(U_k(x)\cos bx + V_k(x)\sin bx)$,
якщо число $a + bi$ є коренем характеристичного рівняння

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + y = 4x\sin x$$

Маємо ЛНДР II-го порядку із сталими коефіцієнтами і правою частиною $f(x) = 4x\sin x$.

Загальний розв'язок рівняння має вид

$$y = \tilde{y} + y^*,$$

1) Знайдемо $\tilde{y}$ – загальний розв'язок відповідного ЛОДР:

$$y'' + y = 0$$

Його характеристичне рівняння

$$k^2 + 1 = 0$$

має комплексні корені $k_{1,2} = \pm i \quad (\alpha = 0; \beta = 1)$.

Тому $\tilde{y} = e^{0\cdot x}(C_1\cos x + C_2\sin x) = C_1\cos x + C_2\sin x$.

2) Знайдемо y^* – частинний розв'язок ЛНДР. Права частина рівняння $4x\sin x$ має структуру (4) $P_0(x)\cos x + Q_1(x)\sin x$, де $a=0, b = 1$, $P_0(x) \equiv 0$ – многочлен степеня $n = 0$, $Q_1(x) = 4x$ – многочлен степеня $m = 1$. Визначимо найвищий степень многочленів $P_0(x)$, $Q_1(x)$: $k = \max(n, m) = \max(0, 1) = 1$. Оскільки число i є коренем характеристичного рівняння і $k = 1$, то частинний розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді

$$y^* = x((Ax + B)\cos x + (Cx + Д)\sin x)$$

Визначаємо похідні функції $y^*=(Ax^2 + Bx)\cos x + (Cx^2 + Дx)\sin x$

$y^{*\prime} = (2Ax + B)\cos x - (Ax^2 + Bx)\sin x + (2Cx + Д)\sin x + (Cx^2 + +Дx)\cos x = (Cx^2 + (2A + Д)x+B)\cos x+(-Ax^2+(-B+2C)x+Д)\sin x$

$y^{*\prime\prime}=(2Cx + 2A + Д)\cos x + (Cx^2 + (2A + Д)x + B)\sin x - (- 2Ax - B + +2C)\cdot\sin x + (- Ax^2 + (- B + 2C)x + Д)\cos x = (- Ax^2 + + (-B + 4C)x + 2A + 2Д)\cos x +(-Cx^2 -(4A + Д)x -2B + 2C)\sin x$

і підставляємо отримані значення в задане рівняння

$y^{*\prime\prime}+ y = (- Ax^2 + (- B + 4C)x + 2A + 2Д)\cos x +(- Cx^2 - (4A + Д)x - 2B + 2C)\sin x + (Ax^2 + Bx)\cos x + (Cx^2 + Дx)\sin x = 4x\sin x$,

або $(4Cx + 2A + 2Д)\cos x + (- 4Ax - 2B + 2C)\sin x = 4x\sin x$, Прирівнюючи коефіцієнти при cosx і sinx в обох частинах рівності, дістаємо систему

$$\left.\begin{array}{l|l} \cos x & 4Cx + 2A + 2D = 0 \\ \sin x & -4Ax - 2B + 2C = 4x \end{array}\right\}$$

Звідки, прирівнюючи коефіцієнти правої і лівої частин при однакових степенях x,

$$\begin{cases} 4C = 0, \\ 2A + 2D = 0, \\ -4A = 4, \\ -2B + 2C = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 0, \\ A = -1, \\ D = 1, \\ B = 0. \end{cases}$$

Таким чином, частнний розв'язок ЛНДР має вигляд

$$y^* = (-x\cos x + \sin x) = x^2\cos x + x\sin x.$$

Загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1\cos x + C_2\sin x - x^2\cos x + x\sin x = (C_1 - x^2)\cos x +$$

$$+ (C_2 + x^2)\sin x.$$