МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЖИТОМИРСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О.В. Підтиченко
А.Г. Ткачук
А.Г. Тютюнник

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

ДЛЯ ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ З КУРСІВ
«ОПТИМАЛЬНЕ ТА АДАПТИВНЕ УПРАВЛІННЯ»
(ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ 6.050201) ТА
«СИСТЕМИ ОПТИМАЛЬНОГО ТА АДАПТИВНОГО КЕРУВАННЯ»
(ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ 6.050202)
ДЛЯ ВСІХ ФОРМ НАВЧАННЯ

Житомир 2015

Міністерство освіти і науки України
Житомирський державний технологічний університет

Затверджено на засіданні кафедри
Автоматизованого управління
технологічними процесами та
комп'ютерних технологій

(протокол № 10 від 25.06.15 р.)

О.В. Підтиченко, А.Г. Ткачук, А.Г. Тютюнник

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для виконання лабораторних робіт з курсів

«Оптимальне та адаптивне управління»

(для студентів напряму підготовки 6.050201) та

«Системи оптимального та адаптивного керування»

(для студентів напряму підготовки 6.050202) для всіх форм навчання

Житомир 2015

Методичні вказівки для виконання лабораторних робіт з курсів «Оптимальне та адаптивне управління» (для студентів напряму підготовки 6.050201) та «Системи оптимального та адаптивного керування» (для студентів напряму підготовки 6.050202) для всіх форм навчання.

Укладачі: О.В. Підтиченко, А.Г. Ткачук, А.Г. Тютюнник. –
Житомир: ЖДТУ, 2015. – 40 с.

Навчальне видання

Методичні вказівки для виконання лабораторних робіт з курсів «Оптимальне та адаптивне управління» (для студентів напряму підготовки 6.050201) та «Системи оптимального та адаптивного керування» (для студентів напряму підготовки 6.050202) для всіх форм навчання.

В даних Методичних вказівках викладені основні теоретичні відомості та порядок виконання лабораторних робіт з курсів «ОАУ» та «СОАК», що проводяться в ЖДТУ для студентів відповідних напрямів підготовки впродовж багатьох років. Викладена стисла теорія щодо призначення, будови та принципу дії ряду оптимальних та адаптивних систем керування, що є предметом вивчення на лабораторних роботах. Представлені моделі систем керування, що реалізовані в програмних продуктах, на яких виконуються лабораторні дослідження.

Укладачі: Підтиченко Олександр Владиславович, к.т.н., доцент кафедри
Ткачук Андрій Геннадійович, к.т.н., старший викладач кафедри
Тютюнник Анатолій Гнатович, к.т.н., доцент, доцент кафедри

Рецензент: Безвесільна О.М., д.т.н., професор,
заслужений діяч науки і техніки України

Лабораторна робота №1
Синтез та аналіз термінальних систем автоматичного керування

<u>Мета роботи</u> – засвоїти методи синтезу термінальних систем автоматичного керування з використанням моделей на ЕОМ для їх аналізу.

1.1. Теоретичні відомості
1.1.1. Загальна постановка задачі та підхід до її розв’язання

Нехай задано об’єкт керування (ОК). Стан ОК характеризується фазовими координатами (ФК), які є вихідними величинами ОК $X_i(t)$ (рис. 1.1). Наприклад, положення об’єкта, сила струму в навантаженні, температура, тиск в певній установці тощо.

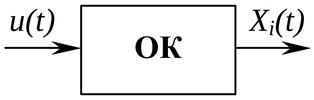


Рис.1.1

Нехай в початковий момент часу ($t = 0$) значення ФК об’єкта $X_i(t=0) = X_{i0}$.

Задача полягає в тому, що необхідно перевести ОК з заданого початкового стану X_{i0} в заданий кінцевий стан $X_{ік}$ за заданий час T.

Таким чином, задано стан ОК в початковий та кінцевий моменти часу:

$$\text{для } t = 0 : X_i(t=0) = X_{i0} \ \Big\}\, n; \qquad (1.1)$$
$$\text{для } t = T : X_i(t=T) = X_{ik} \ \Big\}\, r.$$

Нехай кількість значень ФК, заданих в початковий момент часу = n. Кількість значень ФК, заданих в кінцевий момент часу – r. Нехай разом загальна кількість цих значень $k = n+r$.

<u>Визначення.</u> Значення ФК об’єкта в початковий момент часу називають **початковими умовами**. Значення ФК об’єкта в кінцевий момент часу називають **кінцевими умовами**. Разом початкові та кінцеві умови називають **крайовими або граничними умовами**. Кількість заданих значень ФК може не відповідати порядку ОК, тобто можуть бути задані крайові умови не для всіх ФК.

Таким чином, <u>змістовно</u> задача полягає в тому, щоб знайти таке керування $u(t)$ (такий вхідний вплив на ОК), при дії якого на ОК, він буде переходити з заданого початкового стану в заданий кінцевий стан за заданий час. Або іншими словами, знайти закон керування (аналітичний вираз) або синтезувати регулятор, або побудувати систему керування, що є еквівалентними задачами.

В даній роботі будемо вважати, що сигнал керування один (один вхідний вплив на ОК).

Якщо об’єкт змінює свій стан в часі, кажуть, що він здійснює рух (по певній траєкторії). Отже ОК має під дією сигналу $u(t)$ здійснити рух із заданої початкової точки в задану кінцеву точку, причому за чітко визначений час (не більше і не менше).

<u>Визначення.</u> Керування, яке переводить об’єкт з заданого початкового стану в заданий кінцевий стан за заданий (встановлений) час, називається **термінальним**. Відповідно система керування, що переводить об’єкт з заданого початкового стану в заданий кінцевий стан за заданий термін (час), називається **термінальною**.

Існує 2 постановки задачі термінального керування.

1. Перша передбачає наявність додаткових вимог до процесу переведення об’єкта з заданого початкового стану в заданий кінцевий стан, які формулюються у вигляді певних критеріїв оптимізації. Наприклад, мінімум довжини траєкторії, мінімум енерговитрат, мінімум перерегулювання, мінімум помилки системи. Відповідні задачі відносяться до задач пошуку оптимальних керувань і вирішуються так званими варіаційними методами.

2. В другій постановці додаткові вимоги відсутні.

<u>Визначення.</u> Термінальне керування, при якому додаткових вимог до процесу переведення ОК не ставиться, називається **чисто термінальним**. Якраз в цій постановці і розглядається задача в даній лабораторній роботі. Приклади: стикування модулів космічних кораблів, задача захопити

або поставити деталь роботом на конвеєр (необхідно узгодити об'єкти за положенням, швидкістю, прискоренням) тощо.

Проілюструємо цю задачу (рис. 1.2). Оскільки задано лише початкову та кінцеву точки траєкторії руху ОК, а сама траєкторія не задана, то ОК може рухатись по будь-якій з них. Отже існує нескінченна множина траєкторій руху ОК, що задовольняють крайовим умовам.

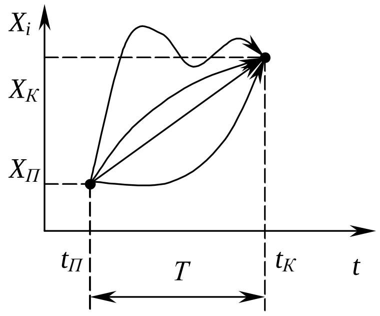


Рис. 1.2

Розглянемо методику пошуку термінального керування. Безпосередньо шукати термінальне керування складно, оскільки до нього не задано ніяких вимог. Вимоги задані лише до траєкторії руху ОК. Зокрема те, що вона повинна проходити через початкову та кінцеву точки. Тому підхід до пошуку чисто термінального керування базується на тому, що спочатку шукають будь-яку задовільну траєкторію руху ОК (з міркувань простоти пошуку та опису), а потім, користуючись мат. моделлю ОК, визначають керування, відповідно до якого ОК має рухатись по запланованій траєкторії. ОК можна описати передаточною функцією, одним диференційним рівнянням (ДР) певного порядку (рівний порядку ОК), системою ДР першого порядку – все це еквівалентні способи опису ОК. Можна завжди перейти від одного способу до іншого.

Нехай ОК l-того порядку задано у вигляді системи з l диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\dot{X}_i = f_i(X_1, X_2, \ldots, X_l, u), \quad i = \overline{1, l}\,. \tag{1.2}$$

Можна завжди перейти до одного ДР відповідно l-того порядку. Будемо вважати, що координата X_1 має реальний фізичний зміст (є виходом ОК). Запишемо ДР від цієї координати. Якщо керування можна відокремити від інших змінних, тоді це буде певна функція від координати X_1 та всіх її похідних аж до l-тої, рівна функції керування від часу:

$$F(X_1, X_1', X_1'', \ldots, X_1^{(l)}) = u(t)\,. \tag{1.3}$$

Якщо знайти аналітичний вираз для траєкторії руху ОК $X_1(t)$, знайти його похідні та підставити в ДР, отримаємо шукане термінальне керування $u(t)$.

Залишається визначити, як шукати траєкторію руху ОК $X_1(t)$. Вимогою до функції, що її описує є те, що ця функція має бути диференційованою, тобто повинна мати похідні. Найбільш простим способом опису траєкторії руху ОК є опис у вигляді функції-поліному від часу, яка завжди має похідні:

$$X_1(t) = C_0 + C_1 \cdot t + C_2 \cdot t^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{N} C_i \cdot t^i\,. \tag{1.4}$$

Залишається визначити, якого порядку має бути поліном та як шукати невідомі константи C_i. На перший погляд може здатися, що чим більший порядок поліному, тим краще (можна задати більшу кількість можливих траєкторій руху, більшу кількість вимог врахувати), але у полінома, наприклад, 10-го порядку є 11 невідомих коефіцієнтів, які треба визначати. Коефіцієнти можна визначити, підставляючи в рівняння траєкторії руху об'єкта значення часу та координати з крайових умов. При цьому одержимо систему лінійних рівнянь з невідомими коефіцієнтами C_i. Треба зазначити: якщо задано k значень в крайових умовах, то можна скласти систему з k незалежних рівнянь, яка має однозначний розв'язок, якщо містить k невідомих. З іншої сторони k невідомих коефіцієнтів є в поліномі (k-1)-го порядку. Отже будемо шукати траєкторію руху ОК $X_1(t)$ у вигляді поліному (k-1)-го порядку:

$$X_1(t) = C_0 + C_1 \cdot t + C_2 \cdot t^2 + \dots + C_{k-1} \cdot t^{k-1} = \sum_{i=0}^{n+r-1} C_i \cdot t^i \ . \tag{1.5}$$

Склавши систему з k рівнянь, розв'язавши її та підставивши аналітичні вирази в ДР ОК, отримується аналітичний вираз керування *u(t)*.

1.1.2. Пошук термінального керування для ОК 2-го порядку

Нехай задано ОК 2-го порядку у вигляді системи рівнянь першого порядку:

$$\dot{x}_1 = -a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ ; \tag{1.6}$$

$$\dot{x}_2 = -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + bu \ .$$

Нехай задано крайові умови:

$$\text{для } t = 0 : \begin{cases} x_1(t=0) = x_{10} \ ; \\ x_2(t=0) = x_{20} \ , \end{cases} \tag{1.7}$$

$$\text{для } t = T : \begin{cases} x_1(t=T) = x_{1k} \ ; \\ x_2(t=T) = x_{2k} \ . \end{cases}$$

Запишемо ДР 2-го порядку для об'єкта відносно x_1. ДР має містити лише координату x_1, її першу та другу похідну, а також функцію керування. Інші координати мають бути відсутні. Для цього візьмемо похідну за часом від першого рівняння системи:

$$\ddot{x}_1 = -a_{11}\dot{x}_1 + a_{12}\dot{x}_2 \ . \tag{1.8}$$

Підставимо замість похідної $\dot{x}_2$ друге рівняння:

$$\ddot{x}_1 = -a_{11}\dot{x}_1 + a_{12}(-a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + bu) \ . \tag{1.9}$$

Розкриємо дужки, а змінну x_1 виразимо з першого рівняння:

$$\ddot{x}_1 = -a_{11}\dot{x}_1 - a_{12}a_{21}x_1 - \frac{a_{12}a_{22}}{a_{12}}(\dot{x}_1 + a_{11}x_1) + a_{12}bu = \tag{1.10}$$

$$= -a_{11}\dot{x}_1 - a_{12}a_{21}x_1 - a_{22}\dot{x}_1 - a_{22}a_{11}x_1 + a_{12}bu \ .$$

Перенесемо всі доданки, крім керування, в ліву частину рівняння:

$$\ddot{x}_1 + (a_{11} + a_{22})\dot{x}_1 + (a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22})x_1 = a_{12}bu \tag{1.11}$$

або

$$\ddot{x}_1 + a_1\dot{x}_1 + a_0x_1 = b_0u \ , \tag{1.12}$$

де

$b_0 = a_{12}b$,

$a_0 = a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22}$;

$a_1 = a_{11} + a_{22}$.

Будемо шукати аналітичний вираз для траєкторії руху об'єкта у вигляді полінома 3-го порядку:

$$x_1(t) = C_0 + C_1 \cdot t + C_2 \cdot t^2 + C_3 \cdot t^3 , \tag{1.13}$$

який має 4 невідомі коефіцієнти. Якщо підставити замість часу моменти $t=0$ та $t=T$, а замість $x_1(t)$ – x_{10} та x_{1k} відповідно, то отримаємо два рівняння (див. далі 1.16).

З рівняння $x_1(t=0)=C_0$ можна безпосередньо визначити коефіцієнт C_0. З другого рівняння (для $t=T$) визначити безпосередньо нічого не можливо.

Щоб знайти всі 4 коефіцієнти треба скористатися крайовими умовами не тільки для $x_1(t)$, а і для $x_2(t)$, склавши 4 рівняння. Для цього можна 2 інших рівняння скласти для похідної $x_1(t)$.

Тому знайдемо вираз похідної $x_1(t)$:

$$\dot{x}_1(t) = C_1 + 2C_2 \cdot t + 3C_3 \cdot t^2 \ . \tag{1.14}$$

Щоб знайти значення $\dot{x}_1(t)$ в початковий та кінцевий моменти часу, треба скористатися першим рівнянням системи ДР ОК (1.6), записавши його для моментів часу $t=0$ та $t=T$:

$$\dot{x}_{10} = -a_{11}x_{10} + a_{12}x_{20} \qquad (1.15)$$
$$\dot{x}_{1k} = -a_{11}x_{1k} + a_{12}x_{2k} \;.$$

Ця дія називається **перерахунок крайових умов**.

Отже записуємо систему 4-ох рівнянь:

$$\text{для } t=0: \quad x_1(0) = C_0; \qquad (1.16)$$
$$\dot{x}_1(0) = C_1;$$
$$\text{для } t=T: \quad x_1(T) = C_0 + C_1\cdot T + C_2\cdot T^2 + C_3\cdot T^3;$$
$$\dot{x}_1(T) = C_1 + 2C_2\cdot T + 3C_3\cdot T^2 .$$

Таким чином, алгоритм пошуку термінального керування є наступним:

1) на основі системи ДР записати одне ДР об'єкта 2-го порядку – формула (1.12);

2) виконати перерахунок крайових умов – формула (1.15);

3) записати рівняння траєкторії руху ОК як поліном від часу 3-го порядку та знайти його похідну – формули (1.13) та (1.14);

4) скласти на основі рівнянь координати $x_1(t)$ та її похідної систему лінійних рівнянь (1.16) з невідомими C_i. Визначити з перших двох рівнянь C_0 та C_1, підставити їх у третє та четверте рівняння, отримавши систему 2-х рівнянь з 2-ма невідомими та розв'язати її.

5) записати вирази для $x_1(t)$ та її першої та другої похідних, підставити їх в ДР ОК та знайти аналітичний вираз керування $u(t)$.

Знайдемо розв'язок задачі для розглядуваного прикладу.

Із системи рівнянь (1.16) для C_i знаходимо відразу C_0 та C_1, підставляємо їх у третє та четверте рівняння:

$$C_0 = x_{10} \qquad (1.17)$$
$$C_1 = \dot{x}_{10}$$
$$C_2\cdot T^2 + C_3\cdot T^3 = x_{1k} - x_{10} - \dot{x}_{10}\cdot T$$
$$2C_2\cdot T + 3C_3\cdot T^2 = \dot{x}_{1k} - \dot{x}_{10} .$$

Розв'язуємо систему рівнянь, що включає 3-тє та 4-те рівняння, методом Крамера. Для цього позначимо:

$$M = x_{1k} - x_{10} - \dot{x}_{10}\cdot T \qquad (1.18)$$
$$N = \dot{x}_{1k} - \dot{x}_{10} .$$

Тоді система рівнянь:

$$\begin{cases} C_2\cdot T^2 + C_3\cdot T^3 = M \\ 2C_2\cdot T + 3C_3\cdot T^2 = N \end{cases} . \qquad (1.19)$$

Знаходимо визначники:

$$D = \begin{vmatrix} T^2 & T^3 \\ 2T & 3T^2 \end{vmatrix} = 3T^4 - 2T^4 = T^4 \;, \qquad (1.20)$$
$$D_{C2} = \begin{vmatrix} M & T^3 \\ N & 3T^2 \end{vmatrix} = 3T^2M - T^3N \;,$$
$$D_{C3} = \begin{vmatrix} T^2 & M \\ 2T & N \end{vmatrix} = T^2N - 2TM \;.$$

Тоді невідомі C_2 та C_3:

$$C_2 = \frac{D_{C2}}{D} = \frac{3T^2M - T^3N}{T^4} = \frac{3M - NT}{T^2} \,, \qquad (1.21)$$
$$C_3 = \frac{D_{C3}}{D} = \frac{T^2N - 2TM}{T^4} = \frac{NT - 2M}{T^3} \,.$$

Отже знайшли аналітичні вирази для траєкторії руху ОК, швидкості та прискорення руху:

$$x_1(t) = C_0 + C_1 \cdot t + C_2 \cdot t^2 + C_3 \cdot t^3, \tag{1.22}$$

$$\dot{x}_1(t) = C_1 + 2C_2 \cdot t + 3C_3 \cdot t^2,$$

$$\ddot{x}_1(t) = 2C_2 + 6C_3 \cdot t.$$

Виразимо з ДР ОК

$$\ddot{x}_1 + a_1\dot{x}_1 + a_0 x_1 = b_0 u \tag{1.23}$$

функцію керування *u(t)* та підставимо вирази для $x_1(t)$ та похідних:

$$u(t) = \frac{1}{b_0}\left[\ddot{x}_1 + a_1\dot{x}_1 + a_0 x_1\right] = \tag{1.24}$$

$$= \frac{1}{b_0}\left[2C_2 + 6C_3 \cdot t + a_1(C_1 + 2C_2 \cdot t + 3C_3 \cdot t^2) + a_0(C_0 + C_1 \cdot t + C_2 \cdot t^2 + C_3 \cdot t^3)\right] =$$

$$= \frac{1}{b_0}\left[2C_2 + a_1 C_1 + a_0 C_0\right] + \frac{1}{b_0}\left[6C_3 + 2a_1 C_2 + a_0 C_1\right] \cdot t +$$

$$+ \frac{1}{b_0}\left[3a_1 C_3 + a_0 C_2\right] \cdot t^2 + \frac{1}{b_0}\left[a_0 C_3\right] \cdot t^3 .$$

Позначимо

$$k_0 = \frac{1}{b_0}\left[2C_2 + a_1 C_1 + a_0 C_0\right], \tag{1.26}$$

$$k_2 = \frac{1}{b_0}\left[6C_3 + 2a_1 C_2 + a_0 C_1\right],$$

$$k_2 = \frac{1}{b_0}\left[3a_1 C_3 + a_0 C_2\right],$$

$$k_3 = \frac{1}{b_0}\left[a_0 C_3\right].$$

Отримали аналітичний вираз функції керування теж як поліном від часу третього порядку:

$$u(t) = k_0 + k_1 \cdot t + k_2 \cdot t^2 + k_3 \cdot t^3. \tag{1.27}$$

Визначений алгоритм керування відповідає наступній розімкнутій системі керування, схема якої наведена на рис. 1.3.

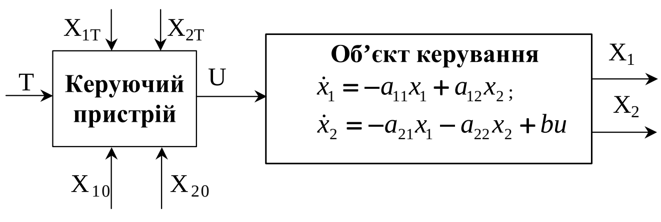


Рис. 1.3. Розімкнута термінальна система керування

1.1.3. Синтез замкнутої системи керування в задачі термінального керування

Треба зазначити, що розглянутий підхід до визначення термінального керування дозволяє отримати так зване "програмне керування", що відповідає роботі розімкнутої системи керування. Цей підхід має відомі недоліки, а саме не враховує вплив можливих збурень на ОК під час руху, тобто відповідність руху ОК запланованій траєкторії. Розглянемо дану ситуацію на прикладі. Нехай є ОК – ракета, якою треба влучити в ціль – вертоліт, що знаходиться в повітрі і не рухається. Припустимо прийнято певний час руху ракети, за який вона має влучити в ціль, сформульовано крайові умови та розраховане термінальне керування.

Розглянемо перший випадок. Припустимо, що під час польоту на ракету дує вітер – збурення, внаслідок якого ракета зміщується від запланованої траєкторії. В такому випадку рух ОК можна описати наступним чином:

$$x_1(t) = C_0 + C_1 \cdot t + C_2 \cdot t^2 + C_3 \cdot t^3 + \alpha \cdot t\,. \tag{1.28}$$

Тобто під час руху до положення об'єкта додається певна величина, пропорційна часу руху. Нехай коефіцієнт α враховує вплив збурення на ОК. Внаслідок цього ракета прийде не туди, де знаходиться вертоліт, а в інше місце.

Для того, щоб врахувати вплив збурення і компенсувати його, поступають наступним чином. Весь інтервал руху ОК (наприклад 10 секунд) розбивають на m підінтервалів (наприклад 5 інтервалів по 2 секунди):

$$(0..T) = (0..\frac{T}{m}; \frac{T}{m}..\frac{2T}{m}; ..; \frac{m-1}{m}T..T)\,. \tag{1.30}$$

Припустимо, що ОК виконав рух напротязі першого інтервалу, і його положення внаслідок дії збурення не відповідає запланованому. Тоді перед наступним інтервалом виконується новий розрахунок керування, але в якості початкових умов приймається поточне положення об'єкта (поточне значення ФК). Це дозволяє певним чином компенсувати вплив збурення на об'єкт і привести його більш точно в необхідну точку (хоча все рівно певне відхилення буде, тому що на протязі останнього інтервалу збурення ніяк не враховується, і воно теж трохи зміщує ОК).

Розглянемо другий випадок. Нехай збурення на ОК не діє, але вертоліт рухається, наприклад з постійною швидкістю, тому координати цілі будуть лінійно змінюватись в часі. Як наслідок, ракета прийде в те положення, в якому була ціль на початку руху, а не туди, де вона знаходиться в кінці руху. Отже ціль також не буде досягнута. У такому випадку (тобто випадку рухомих кінцевих точок траєкторії) поступають аналогічним чином, як в першому випадку. Але при цьому на початку кожного нового інтервалу руху оновлюють не лише початкові умови задачі, а й кінцеві, в якості яких приймається поточні координати цілі.

Наявність корекції закону керування (інтервалів перерахунку) відповідає побудові замкненої системи керування, схема якої наведена на рис. 1.4.

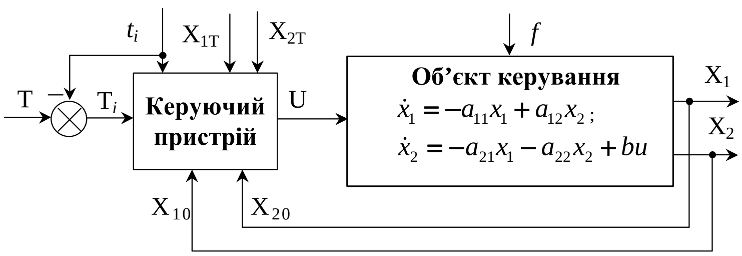


Рис. 1.4. Замкнута термінальна система керування

1.2. Порядок виконання роботи

1. Розрахувати (теоретично) керування для двох випадків:
   1.1. Для об'єкту, що відповідає даним за варіантом.
   1.2. Для об'єкту, в якому фазові координати мають реальний фізичний зміст (для цього прийняти коефіцієнти a11 = 0, a12 = 1).
2. Виконати моделювання для об'єкту, що відповідає даним варіанту (отримати **7 знімків** вікна програми з графіками). Всі значення параметрів моделювання, крім заданих за варіантом, встановити в значення за замовченням (m=1, збурення α=0, коефіцієнти зміщення за X1 та X2 в 0). **Виконуючи досліди, залишати ввімкненими для спостереження лише сигнали X1(t) та X2(t).** Дослідити вплив зміни початкових та кінцевих умов, а також часу руху на перехідний процес. Для зміни граничних умов необхідно збільшувати та зменшувати значення X10 та X1k або X20 та X2k (для якої саме координати досліджувати зміну граничних умов – для X1 чи X2 –

визначається викладачем). Отже, виконати моделювання (та знімки з вікна програми) для таких випадків.

2.1. Для заданих за варіантом початкових та кінцевих умов.
2.2. Для зменшеного початкового значення X1 або X2.
2.3. Для збільшеного початкового значення X1 або X2.
2.4. Для зменшеного кінцевого значення X1 або X2.
2.5. Для збільшеного кінцевого значення X1 або X2.
2.6. Для зменшеного часу керування T.
2.7. Для збільшеного часу керування T.

3. Повторити п.2 для об'єкту, в якому фазові координати мають реальний фізичний зміст, прийнявши коефіцієнти a11 = 0, a12 = 1 (отримати **7 знімків**).
4. Задати всі параметри згідно варіанту. Дослідити керування об'єктом з кінцевими координатами, що змінюються в часі (отримати **2 знімка**). **Виконуючи досліди, залишати ввімкненими для спостереження сигнали X1(t), X2(t) та U(t). Для спостереження за зміною в часі кінцевих координат X1k(t) та X2k(t) для даного досліду також ввімкнути показ графіків цих сигналів**. Задати певні зміщення за X1 та X2 (10-відсоткові значення від значень кінцевих умов, заданих за варіантом), та виконати моделювання для наступних випадків.
   4.1. Відсутності перерахунку керування (кількість інтервалів перерахунку m=1).
   4.2. Заданої кількості інтервалів перерахунку m (з інтервалу 5..20).
5. Встановити всі параметри в значення за замовченням (m=1, зміщення за X1 та X2 в 0). Дослідити рух об'єкта при дії на нього збурення. **Виконуючи досліди, залишати ввімкненими для спостереження сигнали X1(t), X2(t) та U(t). Для спостереження результату дії збурення (можливості порівняння рухів збуреного та незбуреного об'єктів) також ввімкнути показ графіків руху незбуреного об'єкта (сигнали X1(t) та X2(t) без дії α)**. Для чотирьох комбінацій параметрів – двох різних α (з діапазону 2-10) та двох різних m (з діапазону 5-40) виконати моделювання (отримати **4 знімки**).
6. Задати всі параметри згідно варіанту, встановити інші параметри в значення за замовченням (m=1, збурення α=0, коефіцієнти зміщення за X1 та X2 в 0). Дослідити рух нестійкого об'єкта, змінивши коефіцієнт a21 так, щоб об'єкт став нестійким (отримати **1 знімок**).

Увага. Починаючи новий дослід, потрібно повертатися до даних, заданих у варіанті.

1.3. Зміст звіту

В звіті необхідно навести:

1. Короткі теоретичні відомості.
2. Структурні схеми систем керування.
3. <u>Теоретичні розрахунки</u> керування (для двох випадків).
4. <u>Знімки</u> графіків програми для всіх випадків (21 знімок).
5. Висновки по роботі. У висновках обов'язково проаналізувати вплив зміни граничних умов та часу руху на форму траєкторії руху об'єкта; вплив збурень на траєкторію та корекцію введенням інтервалів перерахунку; випадок з рухомими кінцевими точками траєкторії та корекцію траєкторії введенням інтервалів перерахунку.

1.4. Контрольні питання

1. Що таке термінальне (чисто термінальне) керування?
2. Чим відрізняється термінальне керування від чисто термінального?
3. За які два умовні етапи виконується пошук чисто термінального керування?
4. Навіщо виконується перерахунок крайових умов?
5. Навіщо вводять інтервали перерахунку термінального керування?
6. Чим визначається кількість рівнянь для знаходження траєкторії руху об'єкта?
7. Як виконується перехід від запису математичної моделі об'єкта у вигляді передатної функції до диференціального рівняння та навпаки?

Лабораторна робота №2
Синтез оптимальних систем автоматичного керування за допомогою методу динамічного програмування

Мета роботи – засвоїти метод синтезу оптимальних САК за допомогою диференціального рівняння Р.Беллмана; отримати навички аналізу динаміки САК на ЕОМ із використанням математичних моделей.

2.1. Теоретичні відомості
2.1.1. Загальна постановка задачі та підхід до її розв’язання

Сутність задачі, що розглядається в роботі, полягає в тому, щоб синтезувати оптимальну систему керування (СК) для об’єкта керування (ОК), заданого у відхиленнях. Розглянемо детально загальну постановку даної задачі.

Нехай задано ОК *n*-го порядку (рис. 2.1). Поточний стан ОК характеризується фазовими координатами (ФК), які є вихідними (реальними) величинами ОК $X_{i\,вих}(t)$. Є задані значення ФК, що визначають, куди необхідно привести ОК, – $X_{i\,з}(t)$. Віднявши від заданих значень ФК поточні, отримаємо різницеві сигнали – сигнали відхилення або помилки системи $x_i(t)$. Нехай є регулятор (обчислювальний пристрій), який на основі поточних сигналів відхилень $x_i(t)$ видає (розраховує) сигнали керування u_k, що подаються на ОК. Всього маємо в загальному випадку r компонентів керування (координат вектору керування). Таким чином маємо синтезувати замкнуту СК за відхиленнями.

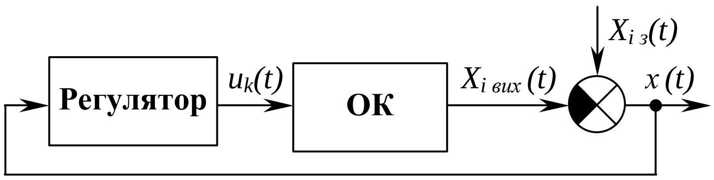


Рис. 2.1

Отже, математична модель (ММ) ОК задана у вигляді системи диференційних рівнянь (ДР) відносно відхилень $x_i(t)$:

$$\dot{x}_i = f_i(x,u),\ i=\overline{1,n}. \tag{2.1}$$

Якщо ММ ОК задана відносно реальних вихідних координат, то, очевидно, завжди можна перейти до ДР, заданих відносно відхилень, виконавши заміну реальних координат $X_{i\,вих}(t)$ на різницю $X_{i\,з}(t) - x_i(t)$, де $X_{i\,з}(t)$ є константами (заданими числами).

В роботі розглядаються лінійні ОК, тому функції в правій частині ДР є лінійними комбінаціями змінних x та u:

$$\dot{x}_i = f_i(x,u) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot x_j + \sum_{k=1}^{r} b_{ik}\cdot u_k\ ,\ i=\overline{1,n}. \tag{2.2}$$

Систему з n ДР, кожне з яких першого порядку, можна записати одним матричним ДР

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{BU}\,, \tag{2.3}$$

позначивши:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix},\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},\ \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_r \end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

де **X** – вектор стану ОК;
A – матриця стану;
U – вектор керування;
B – матриця керування.

Задано критерій оптимальності, у вигляді наступного функціоналу (в загальному вигляді):

$$J = \int_{t_0}^{t_k} F(x,u)dt\,. \tag{2.5}$$

Розглядаються такі функціонали *J*, в яких підінтегральна функція *F(x, u)* є квадратичною формою. Нагадаємо, що квадратична форма (КФ) – це однорідний многочлен другого порядку (кожен доданок має степінь 2), або простіше – сума всіх можливих комбінацій попарних добутків змінних, помножених на відповідні коефіцієнти. В критеріях оптимальності до функції *F(x, u)* входять лише змінні, піднесені до квадрату (тобто пари однакових змінних). В такому випадку критерій оптимальності можна записати в алгебраїчному або матричному вигляді:

$$J = \int_{t_0}^{t_k} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 + \sum_{k=1}^{r} \beta_k u_k^2 \right) dt = \int_{t_0}^{t_k} \left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\alpha}\, \mathbf{X} + \mathbf{U}^T \boldsymbol{\beta}\, \mathbf{U} \right) dt\,, \tag{2.6}$$

де α_i, β_i – вагові коефіцієнти функціоналу;

$\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ – матриці вагових коефіцієнтів (для квадратичної форми, в яку входять лише квадрати змінних, матриці коефіцієнтів є квадратними діагональними матрицями, тобто їх недіагональні елементи рівні нулю).

Доданки, в які входять квадрати відхилень, виражають узагальнену точність (сумарне відхилення в процесі руху ОК) та швидкість переведення ОК в заданий стан. Доданки, в які входять квадрати сигналу керування – сумарні енерговитрати в процесі керування. Піднесення до квадрату необхідно для того, щоб додатні та від'ємні величини взаємно не компенсувалися (взято найменший парний степінь, з іншої сторони, якщо взяти з такою метою функцію модуля числа, то загальна функція не буде диференційованою).

Задача полягає в тому, щоб знайти таке керування *U* (всі його компоненти, якщо їх декілька) як функцію ФК $x_i(t)$, яке переводить ОК із заданого початкового стану $X_{i\,поч}(t_0)$ в заданий кінцевий стан $X_{i\,кін} = X_{i\,з}(t_k)$ при умові мінімуму функціоналу (2.6); час переведення об'єкта t_k при цьому не регламентується (теоретично вважається, що перехідний процес триває до нескінченності):

$$J = \int_{0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 + \sum_{k=1}^{r} \beta_k u_k^2 \right) dt \to \min\,. \tag{2.7}$$

Проілюструємо графічно цю задачу (рис. 2.2). ОК може рухатись по будь-якій з траєкторій, що проходить через початкову точку та виходить на кінцеве значення. Отже існує нескінченна множина траєкторій руху ОК, що задовольняють крайовим умовам.

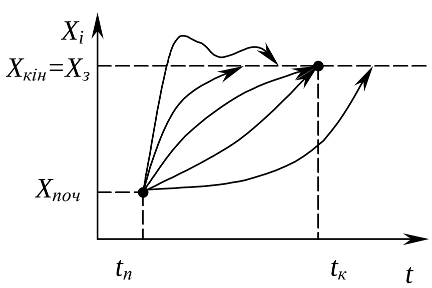


Рис. 2.2

Очевидно, що існує така траєкторія (і така залежність функції керування *U* від сигналів відхилень *x*), якій відповідає мінімум функціоналу (2.6). Такий мінімальний вираз функціоналу позначається наступним чином (в найпростішому випадку – як функція від фазових координат):

$$\mu(x) = \min J\,. \tag{2.8}$$

Функція $\mu(x)$ називається функцією Беллмана (за ім'ям розробника методу вирішення даної задачі). Для кожного конкретного випадку (заданого ОК, граничних умов, критерію оптимальності) складається рівняння Беллмана (РБ), що пов'язує заздалегідь невідому функцію $\mu(x)$, керування *U*, та фазові координати x_i:

$$\min_{U}\left[F(x,u)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\cdot f_i(x,u)\right)\right]=0\,. \qquad (2.9)$$

В кожному конкретному випадку розв’язують рівняння Беллмана (знаходять умову мінімуму) і виражають компоненти оптимального керування U_{opt} через функцію $\mu(x)$, а точніше через її похідні. Отримуються вирази, що пов’язують u_k з частковими похідними μ за x_i, такого типу:

$$u_k=\varphi\left(\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\right). \qquad (2.10)$$

Якщо підставити (2.10) в РБ (2.9), то вираз в квадратних дужках набуде мінімального значення, отже позначення мінімуму за U вже не потрібно. Отримується рівняння, в яке входять x_i, часткові похідні невідомої функції μ та коефіцієнти системи ДР ОК та функціоналу.

Вираз для функції μ підбирають з таких міркувань. Якщо підінтегральна функція $F(x, u)$ є КФ, то $\mu(x)$ також можна шукати у вигляді КФ (в яку вже будуть входити загалом всі попарні добутки – комбінації змінних x_i). В загальному вигляді функція $\mu(x)$ записується наступним чином:

$$\mu(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}k_{ij}\cdot x_i\cdot x_j=\mathbf{X}^T\mathbf{K}\mathbf{X}\,. \qquad (2.11)$$

Матриця K є квадратною симетричною відносно діагоналі матрицею невідомих коефіцієнтів:

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n}\\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn}\end{bmatrix},\ k_{ij}=k_{ji}\,. \qquad (2.12)$$

Для знаходження функції μ знаходять вирази для її похідних і також підставляють в РБ. Отримують рівняння, в яке входять x_i, відомі коефіцієнти системи ДР ОК та функціоналу, а також невідомі коефіцієнти k_{ij}. Якщо згрупувати доданки за змінними x_i, то можна отримати рівняння, ліва частина якого є поліномом від x_i. Нехай наприклад, це рівняння має наступний вигляд:

$$(3k_{11}^2+2k_{12}k_{21}+k_{31}+\dots)x_1^2+(\dots)x_1x_2+\dots=0\,. \qquad (2.13)$$

Такого типу рівняння має виконуватися для будь-яких законів зміни x_i, тобто має бути тотожністю. Єдиний можливий випадок, коли це виконується, є рівність нулю всіх коефіцієнтів при змінних, тобто виразів в дужках. Це дозволяє скласти систему рівнянь (нелінійних в загальному випадку), що розв’язується, як правило, чисельними методами. Якщо знайдено її задовільний розв’язок, то значення k_{ij} підставляються в вираз функції Беллмана (2.11), знаходяться вирази часткових похідних, вони підставляються в вирази для оптимального керування типу (2.10). Отримуються вирази для u_k як функцій фазових координат, що дозволяє побудувати замкнену СК із керуванням за зворотними зв’язками (за відхиленнями).

Нелінійна система рівнянь, що отримується з умови тотожності типу (2.13), може не мати розв’язку, а може мати декілька розв’язків. Проте, навіть якщо розв’язок один, це не означає, що він є задовільним. В будь-якому випадку, коли підбирається закон керування (або його визначальні складові, як у випадку з функцією Беллмана), необхідно забезпечити стійкість синтезованої системи керування.

Існують методи, що дозволяють для таких задач заздалегідь визначити, чи буде система стійка чи ні. Один з них – метод функцій Ляпунова. По відношенню до даної задачі, цей метод полягає в наступному. Функція Беллмана (2.11) розглядається як функція Ляпунова. Тоді для стійкості СК необхідно, щоб вона була додатно-визначеною квадратичною формою (КФ), а її похідна за часом – від’ємно-визначеною КФ. Нагадаємо, що додатно-визначена КФ – це така КФ, що завжди додатна або рівна нулю у єдиному випадку, коли всі її аргументи одночасно рівні 0. Існує правило, що дозволяє перевірити КФ на те, чи є вона додатно визначеною, – критерій Сільвестра, який формулюється наступним чином. Для того, щоб КФ (2.11) була додатно визначеною, необхідно, щоб всі діагональні мінори (визначники) відповідної матриці коефіцієнтів

(2.12) були додатними (включаючи визначник самої матриці коефіцієнтів). Тобто додатними мають бути всі визначники, отримані послідовним викреслюванням крайніх рядків та стовпчиків:

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \ldots & k_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{n1} & k_{n2} & \ldots & k_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (2.14)$$

Отже, $\mu(x)$ має бути додатно визначеною КФ, а для цього коефіцієнти її матриці K мають задовольняти критерію Сільвестра. Якщо жоден з розв'язків системи рівнянь для тотожності типу (2.13) не задовольняє критерію Сільвестра, значить за даних вихідних умов задача не розв'язується даним методом.

2.1.2. Існуючі постановки задачі синтезу оптимального керування

Розглянемо три постановки задачі синтезу оптимального керування.

І. Синтез оптимального керування лінійним ОК при відсутності обмежень на керування

Задано ОК загалом n-го порядку, що описується системою ДР (2.2), та критерій оптимальності (2.7).

Складаємо РБ:

$$\min_{U}\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^2+\sum_{k=1}^{r}\beta_k u_k^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot x_j+\sum_{k=1}^{r}b_{ik}\cdot u_k\right)\right)\right]=0. \qquad (2.15)$$

Оскільки керування необмежене, то цілком можна вважати, що всі компоненти керування змінюються плавно, тобто є гладкими функціями, а тому є диференційованими (для них існують похідні) в усіх точках. Тим більше, сигнали ФК є гладкими функціями та є також диференційованими (ОК, як відомо, згладжують вхідні сигнали).

Припускається, що функція $\mu(x)$ також є диференційованою (якщо ні, то розв'язку даним методом отримано не буде). Таким чином, вираз в квадратних дужках є диференційованою функцією, тому можна брати від нього похідні за компонентами керування та прирівняти їх до 0 (згідно умови екстремуму функцій багатьох змінних):

$$\text{за } u_k\text{:}\ \ 2\beta_k u_k+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\cdot b_{ik}\right)=0,\ \ k=\overline{1,r}. \qquad (2.16)$$

Звідки вирази для оптимального керування:

$$u_{k_{opt}}=-\frac{1}{2\beta_k}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\cdot b_{ik}\right),\ \ k=\overline{1,r}. \qquad (2.17)$$

Далі шукається вираз для функції Беллмана згідно підходів, викладених в п.2.1.1.

Розглянемо викладену постановку задачі на <u>прикладі</u> ОК 2-го порядку, що досліджується в даній лабораторній роботі.

Нехай задано ОК 2-го порядку (у відхиленнях) у вигляді системи з 2-ох рівнянь першого порядку (для простоти розгляду вважаємо, що компонентів керування всього один, тобто просто u):

$$\begin{cases}\dot{x}_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+b_1u;\\ \dot{x}_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+b_2u,\end{cases} \qquad (2.18)$$

Необхідно синтезувати оптимальну СК при умові мінімуму функціоналу:

$$J=\int_0^{\infty}\left(\alpha_1x_1^2+\alpha_2x_2^2+\beta u^2\right)dt\to\min. \qquad (2.19)$$

Складаємо РБ:

$$\min_{U}\left[\alpha_1 x_1^2+\alpha_2 x_2^2+\beta u^2+\frac{\partial\mu}{\partial x_1}\cdot\left(a_{11}x_1+a_{12}x_2+b_1u\right)+\frac{\partial\mu}{\partial x_2}\cdot\left(a_{21}x_1+a_{22}x_2+b_2u\right)\right]=0\,. \tag{2.20}$$

Оскільки можна брати похідну від виразу в квадратних дужках, записуємо умову мінімуму:

$$2\beta u+\frac{\partial\mu}{\partial x_1}\cdot b_1+\frac{\partial\mu}{\partial x_2}\cdot b_2=0\,. \tag{2.21}$$

Звідки оптимальне керування:

$$u_{opt}=-\frac{1}{2\beta}\left(b_1\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x_1}+b_2\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x_2}\right). \tag{2.22}$$

Функція Беллмана, як було вказано вище, шукається у вигляді додатно-визначеної КФ (функції Ляпунова). Матрицю коефіцієнтів К можна прийняти симетричною відносно головної діагоналі. Позначимо коефіцієнти k_{ij} з одинарними індексами, тоді $\mu(x)$ запишеться, наприклад, в такому вигляді:

$$\mu(x)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}k_{ij}\cdot x_i\cdot x_j=\mathbf{X}^T\mathbf{K}\mathbf{X}=\begin{vmatrix}x_1\\ x_2\end{vmatrix}^T\cdot\begin{vmatrix}k_1 & \dfrac{k_3}{2}\\ \dfrac{k_3}{2} & k_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x_1\\ x_2\end{vmatrix}= \tag{2.23}$$

$$=\begin{vmatrix}x_1 & x_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}k_1x_1+\dfrac{k_3}{2}x_2\\ \dfrac{k_3}{2}x_1+k_2x_2\end{vmatrix}=k_1x_1^2+k_3x_1x_2+k_2x_2^2\,.$$

Часткові похідні функції Беллмана (2.23) будуть лінійними функціями відносно змінних x:

$$\frac{\partial\mu}{\partial x_1}=2k_1x_1+k_3x_2\,;\ \frac{\partial\mu}{\partial x_2}=2k_2x_2+k_3x_1\,. \tag{2.24}$$

Якщо ці вирази підставити в (2.22), то очевидно, функція керування буде також лінійною функцією відносно змінних x:

$$u_{opt}=-\frac{1}{2\beta}\left[b_1\cdot\left(2k_1x_1+k_3x_2\right)+b_2\cdot\left(2k_2x_2+k_3x_1\right)\right]= \tag{2.25}$$

$$=-\frac{1}{2\beta}\left(2b_1k_1+b_2k_3\right)x_1-\frac{1}{2\beta}\left(2b_2k_2+b_1k_3\right)x_2=r_1x_1+r_2x_2\,.$$

Отже, можна побудувати замкнену СК за відхиленнями x.

Таким чином, вираз (2.22) підставляється в РБ (2.20), а також в РБ підставляються вирази часткових похідних функції Беллмана (2.24). Отримується рівняння типу (2.13), в яке входять змінні x, відомі коефіцієнти ОК та функціоналу, та невідомі коефіцієнти k. Як вже зазначалося, складається система рівнянь, вона розв'язується (якщо має дійсні розв'язки) та знаходяться коефіцієнти k, які перевіряються за критерієм Сільвестра:

$$\begin{cases}k_1>0;\\ k_1k_2>\dfrac{k_3^2}{4}.\end{cases} \tag{2.26}$$

Для даного прикладу виконаємо виведення системи рівнянь для знаходження коефіцієнтів k_{ij} функції Беллмана.

Перетворимо РБ (2.20), виносячи за дужки u:

$$\min_{U}\left[\alpha_1x_1^2+\alpha_2x_2^2+\beta u^2+\frac{\partial\mu}{\partial x_1}\cdot\left(a_{11}x_1+a_{12}x_2\right)+\frac{\partial\mu}{\partial x_2}\cdot\left(a_{21}x_1+a_{22}x_2\right)+\right. \tag{2.27}$$

$$\left.+\left(\frac{\partial\mu}{\partial x_1}\cdot b_1+\frac{\partial\mu}{\partial x_2}\cdot b_2\right)u\right]=0\,.$$

Підставляємо (2.22) в РБ (2.27), при цьому вираз в квадратних дужках РБ набуде мінімального значення, отже позначення мінімуму за U вже не потрібно:

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \frac{1}{4\beta}\left(b_1 \cdot \frac{\partial\mu}{\partial x_1} + b_2 \cdot \frac{\partial\mu}{\partial x_2}\right)^2 + \frac{\partial\mu}{\partial x_1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + \frac{\partial\mu}{\partial x_2}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) - $$
$$- \frac{1}{2\beta}\left(\frac{\partial\mu}{\partial x_1}\cdot b_1 + \frac{\partial\mu}{\partial x_2}\cdot b_2\right)\cdot\left(\frac{\partial\mu}{\partial x_1}\cdot b_1 + \frac{\partial\mu}{\partial x_2}\cdot b_2\right) = 0 \quad . \tag{2.28}$$

Після підстановки виразу для u отримаємо в (2.28) в якості останнього доданку вираз квадрату суми, як і в третьому доданку. Тоді (2.28) набуває вигляду:

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 - \frac{1}{4\beta}\left(b_1 \cdot \frac{\partial\mu}{\partial x_1} + b_2 \cdot \frac{\partial\mu}{\partial x_2}\right)^2 + \frac{\partial\mu}{\partial x_1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + \frac{\partial\mu}{\partial x_2}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) = 0 \,. \tag{2.29}$$

Розкривши квадрат суми та інші дужки, отримаємо:

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 - \frac{b_1^{\,2}}{4\beta}\left(\frac{\partial\mu}{\partial x_1}\right)^2 - \frac{b_1 b_2}{2\beta}\frac{\partial\mu}{\partial x_1}\frac{\partial\mu}{\partial x_2} - \frac{b_2^{\,2}}{4\beta}\left(\frac{\partial\mu}{\partial x_2}\right)^2 +$$
$$+ a_{11}x_1\frac{\partial\mu}{\partial x_1} + a_{21}x_1\frac{\partial\mu}{\partial x_2} + a_{12}x_2\frac{\partial\mu}{\partial x_1} + a_{22}x_2\frac{\partial\mu}{\partial x_2} = 0 \,. \tag{2.30}$$

Підставимо в (2.30) вирази для похідних функції Беллмана (2.24):

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 - \frac{b_1^{\,2}}{4\beta}(2k_1x_1 + k_3x_2)^2 -$$
$$- \frac{b_1 b_2}{2\beta}(2k_1x_1 + k_3x_2)(2k_2x_2 + k_3x_1) - \frac{b_2^{\,2}}{4\beta}(2k_2x_2 + k_3x_1)^2 +$$
$$+ a_{11}x_1(2k_1x_1 + k_3x_2) + a_{21}x_1(2k_2x_2 + k_3x_1) +$$
$$+ a_{12}x_2(2k_1x_1 + k_3x_2) + a_{22}x_2(2k_2x_2 + k_3x_1) = 0 \,. \tag{2.31}$$

Розкриємо дужки:

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 - \frac{b_1^{\,2}}{4\beta}\cdot 4k_1^{\,2}x_1^{\,2} - \frac{b_1^{\,2}}{4\beta}\cdot 4k_1k_3x_1x_2 - \frac{b_1^{\,2}}{4\beta}\cdot k_3^{\,2}x_2^{\,2} -$$
$$- \frac{b_1b_2}{2\beta}\cdot 4k_1k_2x_1x_2 - \frac{b_1b_2}{2\beta}\cdot 2k_1k_3x_1^{\,2} - \frac{b_1b_2}{2\beta}\cdot 2k_2k_3x_2^{\,2} - \frac{b_1b_2}{2\beta}\cdot k_3^{\,2}x_1x_2 -$$
$$- \frac{b_2^{\,2}}{4\beta}\cdot 4k_2^{\,2}x_2^{\,2} - \frac{b_2^{\,2}}{4\beta}\cdot 4k_2k_3x_1x_2 - \frac{b_2^{\,2}}{4\beta}\cdot k_3^{\,2}x_1^{\,2} +$$
$$+ 2a_{11}k_1x_1^{\,2} + a_{11}k_3x_1x_2 + 2a_{21}k_2x_1x_2 + a_{21}k_3x_1^{\,2} +$$
$$+ 2a_{12}k_1x_1x_2 + a_{12}k_3x_2^{\,2} + 2a_{22}k_2x_2^{\,2} + a_{22}k_3x_1x_2 = 0 \,. \tag{2.32}$$

Приведемо подібні доданки:

$$x_1^2\left[\alpha_1 - \frac{b_1^{\,2}}{\beta}\cdot k_1^{\,2} - \frac{b_1b_2}{\beta}\cdot k_1k_3 - \frac{b_2^{\,2}}{4\beta}\cdot k_3^{\,2} + 2a_{11}k_1 + a_{21}k_3\right] +$$
$$+ x_2^2\left[\alpha_2 - \frac{b_1^{\,2}}{4\beta}\cdot k_3^{\,2} - \frac{b_1b_2}{\beta}\cdot k_2k_3 - \frac{b_2^{\,2}}{\beta}\cdot k_2^{\,2} + a_{12}k_3 + 2a_{22}k_2\right] +$$
$$+ x_1x_2\left[-\frac{b_1^{\,2}}{\beta}\cdot k_1k_3 - \frac{2b_1b_2}{\beta}\cdot k_1k_2 - \frac{b_1b_2}{2\beta}\cdot k_3^{\,2} - \frac{b_2^{\,2}}{\beta}\cdot k_2k_3 + \right.$$
$$\left. + a_{11}k_3 + 2a_{21}k_2 + 2a_{12}k_1 + a_{22}k_3\right] = 0 \,. \tag{2.33}$$

Прирівнюючи вирази в дужках до нуля, отримаємо систему рівнянь для визначення функції Беллмана та її похідних:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \frac{b_1^{\ 2}}{\beta} \cdot k_1^{\ 2} - \frac{b_1 b_2}{\beta} \cdot k_1 k_3 - \frac{b_2^{\ 2}}{4\beta} \cdot k_3^{\ 2} + 2a_{11}k_1 + a_{21}k_3 = 0; \\ \alpha_2 - \frac{b_1^{\ 2}}{4\beta} \cdot k_3^{\ 2} - \frac{b_1 b_2}{\beta} \cdot k_2 k_3 - \frac{b_2^{\ 2}}{\beta} \cdot k_2^{\ 2} + a_{12}k_3 + 2a_{22}k_2 = 0; \\ -\frac{b_1^{\ 2}}{\beta} \cdot k_1 k_3 - \frac{2b_1 b_2}{\beta} \cdot k_1 k_2 - \frac{b_1 b_2}{2\beta} \cdot k_3^{\ 2} - \frac{b_2^{\ 2}}{\beta} \cdot k_2 k_3 + \\ + a_{11}k_3 + 2a_{21}k_2 + 2a_{12}k_1 + a_{22}k_3 = 0. \end{cases} \quad (2.34)$$

ІІ. Синтез оптимального керування лінійним ОК при наявності обмежень на керування

Розглянемо другу постановку також на прикладі ОК 2-го порядку.

Отже, аналогічно до першої постановки, задано ОК, що описується системою ДР (2.18), та критерій оптимальності (2.19). Задано лінійні обмеження на керування, що полягають в тому, щоб за абсолютною величиною сигнал керування не перевищував певної максимальної величини:

$$|u| \le U_{\max} \quad (2.35)$$

Така постановка обумовлена реальними інженерними ситуаціями, наприклад, величина напруги живлення на виконавчі механізми не може перевищувати максимальну напругу джерела живлення, положення регулюючих органів (заслінок тощо) має межі від мінімальної до максимальної, зокрема, наприклад, рулі висоти літака можуть займати проміжне положення від одного крайнього до другого крайнього положення.

Для ОК (2.18) та функціоналу (2.19) складається РБ, що є таким самим, як в першій постановці (2.20).

Наявність обмежень призводить до наступного. Якщо був би розрахований сигнал керування за методикою для першої постановки задачі (і мав, наприклад, вигляд, показаний на рис. 2.3), то при перевищенні рівня U_{max} сигнал би зрізався (очевидно, могла б змінитися також форма сигналу і в межах коридору $\pm U_{max}$), що і показано на рис. 2.3.

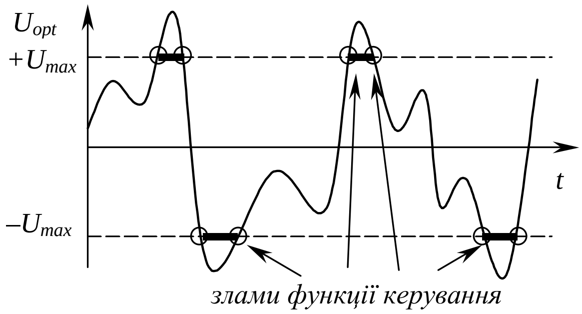


Рис. 2.3

Головне те, що в точках, де функція починає та закінчує зрізатися (відмічені колами на рис. 2.3), вона має злам, тобто не є диференційованою, а отже не є диференційованим весь вираз в квадратних дужках РБ (2.20). Відповідно брати похідну від цього виразу не можна, а тому шукати умову мінімуму необхідно на основі іншого підходу, за допомогою логічних міркувань.

Для цього аналізують лише ту частину виразу в квадратних дужках, яка безпосередньо залежить від керування u, і саме її приводять до мінімуму. При цьому для зручності аналізу перетворюють її в повний квадрат, виділяючи його з квадратичної функції відносно u в (2.20), згідно відомої всім формули квадрату суми:

$$(u+m)^2 = u^2 + 2mu + m^2. \quad (2.36)$$

Перший та другий доданок в (2.20) вже присутні; залишається виділити доданок, що є квадратом половини другого доданку. Це можна виконати додавши і віднявши один і той самий вираз у функції в квадратних дужках. Таким чином РБ запишеться в наступному вигляді:

$$\min_{U}\left[\beta\left(u^2+2\frac{1}{2\beta}\left(b_1\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x_1}+b_2\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x_2}\right)u+\frac{1}{4\beta^2}\left(b_1\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x_1}+b_2\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x_2}\right)^2\right)-\right.$$
$$-\frac{1}{4\beta}\left(b_1\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x_1}+b_2\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x_2}\right)^2+$$
$$\left.+\alpha_1x_1^2+\alpha_2x_2^2+\frac{\partial\mu}{\partial x_1}\cdot(a_{11}x_1+a_{12}x_2)+\frac{\partial\mu}{\partial x_2}\cdot(a_{21}x_1+a_{22}x_2)\right]=0. \quad (2.37)$$

Від керування залежить лише вираз в першому рядку (2.37). Випишемо його окремо, згорнувши до повного квадрату (коефіцієнт β можна не записувати, оскільки він є додатним числом). Тоді умова мінімуму в РБ буде записана наступним чином:

$$\left(u+\frac{1}{2\beta}\left(b_1\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x_1}+b_2\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x_2}\right)\right)^2\to\min. \quad (2.38)$$

Мінімальне можливе значення для квадрату виразу є 0, тому якщо б керування було необмежене, то в якості оптимального його виразу треба було б брати значення, рівне за модулем другому доданку в дужках, але протилежне за знаком (так, щоб в результаті вирази компенсувалися).

Позначимо для зручності:

$$U_1=-\frac{1}{2\beta}\left(b_1\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x_1}+b_2\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x_2}\right), \quad (2.39)$$

тоді оптимальне керування:

$$u_{opt}=\begin{cases}U_1,\ \text{якщо}\ |U_1|\le U_{\max};\\ -U_{\max}\cdot Sign\left(b_1\cdot\dfrac{\partial\mu}{\partial x_1}+b_2\cdot\dfrac{\partial\mu}{\partial x_2}\right),\ \text{інакше.}\end{cases} \quad (2.40)$$

Як видно, перша постановка є частковим випадком другої: якщо величина обмеження є достатньо великою (ніколи не перевищується значенням U_1), то результат першої та другої постановки співпадають.

Функція Беллмана для цього випадку шукається аналогічно першій постановці задачі.

III. Синтез оптимального керування лінійним ОК при наявності обмежень на керування та функціоналу, що не містить керування

Розглянемо другу постановку також на прикладі ОК 2-го порядку.

Отже, аналогічно до першої постановки, задано ОК, що описується системою ДР, та критерій оптимальності в наступному вигляді:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+b_1u;\\ \dot{x}_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+b_2u,\end{cases} \quad (2.41)$$

$$J=\int_0^\infty\left(\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2\right)dt=\int_0^\infty\left(\mathbf{X}^T\cdot\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{X}\right)dt=\int_0^\infty\left(\mathbf{X}^T\cdot\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{vmatrix}\cdot\mathbf{X}\right)dt\to\min.$$

Задано лінійні обмеження на величину керування, аналогічні обмеженням в другій постановці (2.35).

Записуємо РБ:

$$\min_{U}\left[\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\frac{\partial\mu}{\partial x_1}\cdot(a_{11}x_1+a_{12}x_2+b_1u)+\frac{\partial\mu}{\partial x_2}\cdot(a_{21}x_1+a_{22}x_2+b_2u)\right]=0. \quad (2.42)$$

Необхідно звернути увагу на те, що функція в квадратних дужках РБ є лінійною відносно u, на відміну від першої та другої постановки, де вона є квадратичною функцією (рівнянням параболи з одним локальним екстремумом). В даній постановці ця функція не має локальних екстремумів і тому її мінімальне значення знаходиться на границі області визначення. Тому брати похідну від виразу в квадратних дужках не має сенсу, навіть якщо б це було можливо (хоча загалом при наявності обмежень на керування вираз в квадратних дужках не є диференційованим).

Отже, для пошуку умови мінімуму так само, як в другій постановці, користуються логічними міркуваннями, зокрема аналізують лише ту частину функції в квадратних дужках, що безпосередньо залежить від *u*. Для виконання умови мінімуму в лівій частині РБ необхідно, щоб був мінімальний вираз, що включає керування (в ідеалі був за модулем якомога більше та віднімався від інших доданків). Випишемо цей вираз:

$$\left(\frac{\partial\mu}{\partial x_1}\cdot b_1+\frac{\partial\mu}{\partial x_2}\cdot b_2\right)u\to\min \tag{2.43}$$

Якщо б керування було необмежене, то для виконання умови (2.43) варто було за модулем *u* взяти рівне нескінченності, а за знаком – протилежне знаку виразу в дужках. Тоді, очевидно, задача не мала б технічного сенсу. Іншими словами, задача не має технічного сенсу, якщо керування необмежене та в критерії не враховані енерговитрати.

Оскільки керування в даній постановці є обмеженим, то максимальне за модулем значення *u* є U_{max}. Знак керування має бути протилежним знаку виразу в дужках в формулі (2.43), для того, щоб весь цей вираз завжди віднімався від лівої частини РБ (2.42).

Отже, умовою мінімуму в РБ (2.42) буде таке оптимальне керування:

$$u_{opt}=-U_{\max}\cdot Sign\left(b_1\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x_1}+b_2\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x_2}\right). \tag{2.44}$$

Таким чином, функція керування має релейний характер.

Пошук функції Беллмана в даній постановці є простішим і базується на наступному підході.

Як і в попередніх випадках, функцію Беллмана шукають у вигляді додатно-визначеної квадратичної форми, що є функцією Ляпунова:

$$\mu(x)=\mathbf{X}^T\mathbf{Q}\mathbf{X}=\begin{vmatrix}x_1\\x_2\end{vmatrix}^T\cdot\begin{vmatrix}q_1 & q_3\\q_3 & q_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x_1\\x_2\end{vmatrix}=q_1x_1^2+2q_3x_1x_2+q_2x_2^2. \tag{2.45}$$

Як вже вказувалось вище, для стійкості СК, що синтезується, необхідно, щоб функція $\mu(x)$ як функція Ляпунова була додатно-визначеною КФ, а її похідна від'ємно визначеною КФ. Знайдемо вираз для похідної функції $\mu(x)$ за правилом знаходження похідної добутку функцій:

$$(u\cdot v)'=u'v+uv'. \tag{2.46}$$

Дане правило можна застосувати і для похідної добутку двох матриць у виразі (2.45), при цьому матриця коефіцієнтів **Q** вважається коефіцієнтом, що не бере участі в операції взяття похідної:

$$\frac{d\mu}{dt}=\left(\mathbf{X}^T\mathbf{Q}\mathbf{X}\right)'=\dot{\mathbf{X}}^T\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{X}+\mathbf{X}^T\cdot\mathbf{Q}\cdot\dot{\mathbf{X}}. \tag{2.47}$$

Матриця похідних фазових координат $\dot{\mathbf{X}}$ знаходиться з системи ДР ОК в матричному вигляді (2.4). При цьому для забезпечення стійкості СК достатньо розглядати вільний рух системи (якщо система стійка при вільному русі, то вона стійка і при наявності керування). Тому можна вважати, що

$$\dot{\mathbf{X}}=\mathbf{A}\mathbf{X}. \tag{2.48}$$

Маємо:

$$\frac{d\mu}{dt}=(\mathbf{A}\mathbf{X})^T\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{X}+\mathbf{X}^T\cdot\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{A}\mathbf{X})=\mathbf{X}^T\cdot\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{X}+\mathbf{X}^T\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=$$
$$=\mathbf{X}^T\cdot\left(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}+\mathbf{Q}\mathbf{A}\right)\cdot\mathbf{X}. \tag{2.49}$$

Отже, вираз (2.49) є квадратичною формою.

Для забезпечення від'ємної визначеності (2.49), цей вираз прирівнюють до від'ємно-визначеної квадратичної форми (що визначається підінтегральною функцією у функціоналі оптимальності):

$$\frac{d\mu}{dt} = \mathbf{X}^T \cdot \left(\mathbf{A}^T\mathbf{Q} + \mathbf{QA}\right) \cdot \mathbf{X} = -\mathbf{X}^T \cdot \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{X}, \tag{2.50}$$

де $\boldsymbol{\lambda}$ – матриця вагових коефіцієнтів функціоналу в формулі (2.41).

Звідси отримується матричне рівняння для визначення коефіцієнтів матриці **Q**:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Q} + \mathbf{QA} = -\boldsymbol{\lambda}, \tag{2.51}$$

яке дозволяє визначити коефіцієнти функції Беллмана згідно (2.45), а отже і вираз для оптимального керування (2.44).

Якщо підставити вирази для матриць в (2.51), з урахуванням транспонування матриці **A**, отримаємо рівняння:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} q_1 & q_3 \\ q_3 & q_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_1 & q_3 \\ q_3 & q_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{vmatrix}. \tag{2.52}$$

Після знаходження добутків матриць та додавання результатів в лівій частині рівняння, отримаємо рівність двох матриць, кожна з яких має розмірність 2 на 2. Отримане матричне рівняння еквівалентне чотирьом лінійним рівнянням, два з яких є однаковими (відповідають нульовим елементам в правій матриці формули (2.52)). Це дає можливість записати систему з трьох рівнянь з трьома невідомими, яка легко розв’язується і дає значення коефіцієнтів q_1, q_2, q_3.

Таким чином, алгоритм пошуку оптимального керування в даній постановці є наступним:

1) для заданого об’єкта та функціонала (2.41) записати РБ (2.42);

2) виписати ту частину виразу в РБ, яка безпосередньо залежить від керування, тобто (2.43);

3) отримати вираз для функції оптимального керування (2.44);

4) записати функцію Беллмана в загальному вигляді (2.45) та знайти в загальному вигляді вирази для її похідних;

5) скористатися рівнянням (2.51) для визначення коефіцієнтів функції Беллмана (2.45);

6) отримати вираз для функції Беллмана, її часткових похідних, підставити їх вирази в вираз для функції оптимального керування (2.44) і, отже, отримати функцію оптимального керування від фазових координат.

2.2. Порядок виконання роботи

1. **Розрахувати керування** для випадку квадратичного функціоналу, який не містить керування, та наявності обмежень на керування, користуючись формулою (2.51):

   $$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} = -\boldsymbol{\lambda},$$

   (записати рівняння Беллмана, виразити з нього оптимальне керування, знайти вираз для функції Беллмана та її похідних, отримати оптимальне керування як функцію фазових координат).

2. **Виконати моделювання** для трьох варіантів постановки задачі пошуку оптимального керування за допомогою рівняння Беллмана з метою визначення впливу параметрів функціонала на якість перехідного процесу. **Виконуючи знімки екрану з результатами моделювання, залишати лише показ графіків $X1_{вих}$, $X2_{вих}$ (якщо не вказано інше). Для дослідів в п.2.2-2.3 ввімкнути показ також сигналу керування *U(t)*.** При цьому визначати за графіками перехідного процесу для кожної з координат $X1_{вих}$, $X2_{вих}$ показники якості системи – **час регулювання та величину перерегулювання** (на занятті можна визначити максимальне відхилення координати від усталеного значення у випадку коливального перехідного процесу або, у випадку аперіодичного процесу, відмітити, що перерегулювання відсутнє). **Визначення показників якості краще виконувати, тимчасово відключаючи показ сигналу *U(t)*.**

   Увага. Починаючи новий дослід, потрібно повертати змінений параметр в значення, задане за варіантом.

   2.1. Моделювання для випадку відсутності обмежень на керування (всього 7 знімків)

   2.1.1. Для заданих значень коефіцієнтів функціоналу (1 знімок **– показати додатково сигнал функції керування *U***).

   2.1.2. Для двох інших значень α1 (2 знімки).

   2.1.3. Для двох інших значень α2 (2 знімки).

2.1.4. Для двох інших значень β (2 знімки).

2.2. Моделювання для випадку наявності обмежень на керування (всього 7 знімків)

2.2.1. Для заданих значень коефіцієнтів функціоналу (1 знімок).

2.2.2. Для двох інших значень α1 (2 знімки).

2.2.3. Для двох інших значень α2 (2 знімки).

2.2.4. Для двох інших значень Umax (2 знімки).

2.3. Моделювання для випадку наявності обмежень на керування та функціоналу, що не містить керування (всього 7 знімків)

2.3.1. Для заданих значень коефіцієнтів функціоналу (1 знімок).

2.3.2. Для двох інших значень λ1 (2 знімки).

2.3.3. Для двох інших значень λ2 (2 знімки).

2.3.4. Для двох інших значень Umax (2 знімки).

3. Результати визначення часу регулювання та перерегулювання занести в таблицю із структурою табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Тип постановки задачі (без обмежень, з обмеженнями тощо)	Значення параметрів, вплив яких досліджується			Час регулювання за $X1_{вих}$	Час регулювання за $X2_{вих}$	Перерегулювання за $X1_{вих}$	Перерегулювання за $X2_{вих}$
	$\alpha 1$ ($\lambda 1$)	$\alpha 2$ ($\lambda 2$)	β (U_{max})	$t_{рег1}$	$t_{рег2}$	σ_1	σ_2

4. Зробити висновки за отриманими результатами.

2.3. Зміст звіту

В звіті необхідно навести:

1. Короткі теоретичні відомості.
2. Структурні схеми систем керування.
3. Теоретичний розрахунок оптимального керування (для третьої постановки задачі).
4. Знімки графіків програми для всіх випадків (21 знімок).
5. Зведену таблицю з результатами дослідів.
6. Висновки по роботі. У висновках проаналізувати вплив зміни коефіцієнтів функціонала та обмежень на керування на показники якості СК.

2.4. Контрольні питання

1. Які три постановки задачі динамічного програмування ви знаєте?
2. Що дає присутність у підінтегральній функції складових керування та фазових координат?
3. Що таке функція Беллмана та в якому вигляді вона шукається?
4. Запишіть рівняння Беллмана.
5. З яких міркувань складають систему рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів функції Беллмана?
6. Що таке критерій Сільвестра, для чого і як він використовується?
7. Чому графік керування має той чи інший вигляд для різних постановок задачі?
8. Як шукається умова мінімуму для рівняння Беллмана в різних постановках задачі?

Лабораторна робота №3
Аналіз динамічних властивостей екстремальної САК з запам'ятовуванням екстремуму

<u>Мета роботи</u> – ознайомитись з особливостями принципу дії систем екстремального керування (СЕК), зокрема вивчити принцип роботи СЕК з запам'ятовуванням екстремуму та навчитись аналізувати динамічні властивості цієї системи.

3.1. Теоретичні відомості

3.1.1. Загальна характеристика об'єктів керування, для яких будуються СЕК, та зміст задачі екстремального керування

Екстремальні системи автоматичного керування (САК) будують для об'єктів керування (ОК), що мають нелінійну статичну характеристику, яка має явно виражений екстремум. В першу чергу варто згадати, що є статичною характеристикою ОК та яким чином вона характеризує лінійні та нелінійні ОК.

<u>Статична характеристика ОК</u> – це залежність вихідної координати ОК від вхідної координати, отримана для усталеного режиму роботи (тобто після припинення перехідних процесів). Наприклад, якщо в якості ОК взяти резистор, подати на нього вхідний вплив (постійну напругу живлення), то буде отримане певне значення вихідної величини (сили струму). Якщо для кожного значення вхідної напруги одержати відповідне значення вихідної величини, то отримана пара цих значень дасть точку, що характеризує відповідний режим роботи ОК. З'єднавши такі точки, отримаємо лінію – статичну характеристику (СХ) ОК.

З іншої сторони, якщо взяти в якості ОК послідовне з'єднання резистора та котушки індуктивності, то при зміні вхідної напруги значення сили струму встановиться не зразу, а після проходження певного часу (після припинення перехідного процесу), оскільки такий ОК є інерційним. Тому для побудови СХ необхідно брати значення вихідної координати після припинення перехідних процесів.

Якщо СХ ОК є прямою лінією, то такий ОК є лінійним. Коефіцієнт передачі (підсилення) лінійного ОК є константою. В інших випадках (коли СХ не є прямою) такий ОК є нелінійним. Коефіцієнт передачі нелінійного ОК не є константою та може залежати від самого значення сигналу на вході, а також від попередніх значень (в такому випадку СХ має гістерезис).

Як відомо, загалом всі ОК є нелінійними. В тих випадках, коли робочу ділянку СХ можна замінити прямою лінією (виконати лінеаризацію ОК), такий ОК вважається лінійним, а нелінійність – несуттєвою. В інших випадках нелінійність СХ вважається суттєвою і такий ОК приймається при побудові систем як нелінійний.

В даній роботі розглядається нелінійний ОК, у якого СХ має явно виражений екстремум (мінімум або максимум). Нагадаємо, що в ТАУ нелінійні ОК прийнято позначати ланками, на яких графічно показується вигляд відповідної СХ (рис. 3.1).

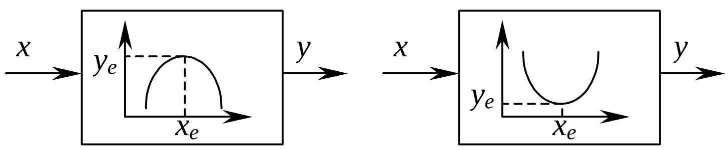


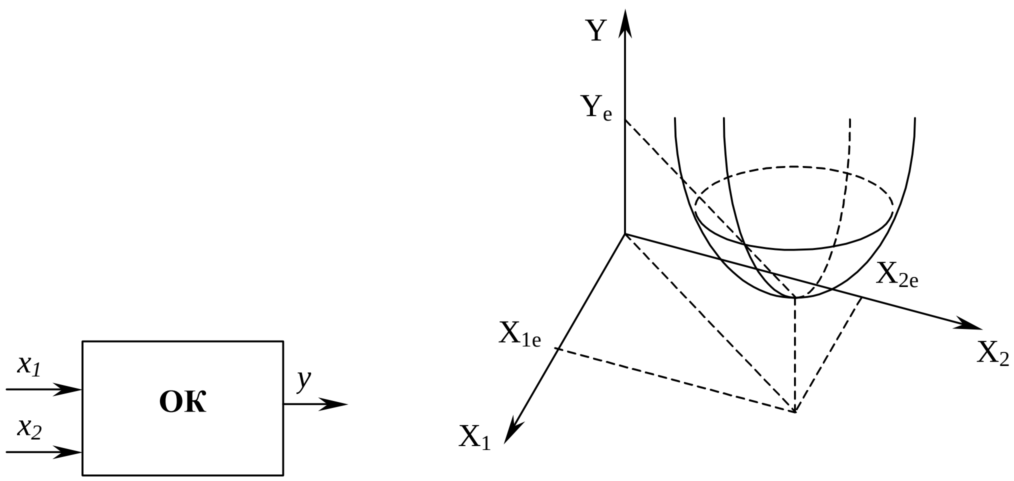
Рис. 3.1

Те, чого треба досягнути – максимуму чи мінімуму – залежить від ОК та природи керованої величини. Наприклад, на рис. 3.1 СХ має максимум, тобто при певному вхідному значенні x_e досягається максимально можливе значення y_e. Прикладом такого ОК може бути водогрійний котел, що нагрівається від газового пальника. Відомо, що при певному співвідношенні природного газу та кисню (або повітря), тобто вхідної величини, досягається максимально можлива температура згоряння – вихідна величина (при інших однакових умовах, зокрема постійній загальній витраті суміші). Отже, в такому випадку досягається найбільш ефективний режим роботи ОК, тобто можна отримати максимально можливу температуру на виході котла при інших незмінних умовах. Саме для таких ОК має сенс будувати СЕК.

Зазначимо, що, наприклад, для лінійних ОК потреби будувати СЕК немає, оскільки для отримання більшого значення на виході достатньо подавати більший вхідний вплив.

Задача екстремального керування (або екстремальних САК) – це забезпечення досягнення та утримання заданого показника якості (загалом, або зокрема керованої координати) в екстремальному значенні. Інакше кажучи – забезпечення оптимального статичного режиму роботи. Таким чином, на відміну від інших задач керування (де необхідно переводити об’єкт з одного стану в інший), СЕК забезпечують підтримання ОК в певному найбільш ефективному режимі роботи. Досягається це шляхом зміни вхідних величин на ОК. Такі системи часто ще називають системами статичної оптимізації.

В залежності від кількості вхідних координат розрізняють ОК: одномірні, двомірні та багатомірні. Для таких об’єктів СХ є функцією відповідно однієї, двох та багатьох аргументів. Наприклад, для двомірного ОК (рис. 3.2, а) його СХ може бути представлена графічно у вигляді поверхні в тримірному просторі (рис. 3.2, б). Відповідно для багатомірних ОК необхідно забезпечувати пошук екстремальних значень за всіма аргументами для забезпечення екстремуму СК.



а) б)

Рис. 3.2

Якщо б параметри СХ з часом не змінювалися, то задачу екстремального керування можна було вирішити шляхом побудови звичайної системи стабілізації (рис. 3.3).

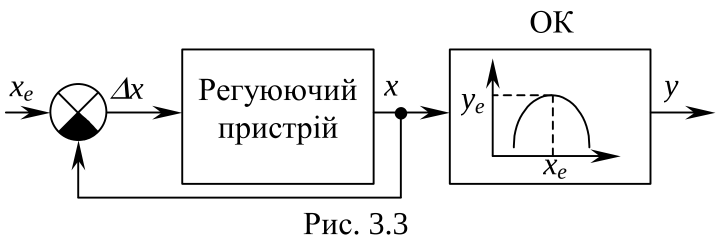


Рис. 3.3

В такому випадку можна заздалегідь визначити, яких параметрів x_e та y_e необхідно досягнути для забезпечення режиму роботи в точці екстремуму. Тому необхідно забезпечити стабілізацію подачі регулюючою частиною на об’єкт стабілізованого значення x_e, при якому гарантовано забезпечується екстремальне значення на виході ОК.

Якщо ж СХ ОК змінюється в часі (здійснює дрейф, тобто зміщується вгору-вниз та вліво-вправо) заздалегідь невідомим чином, то параметри екстремуму також змінюються. Зазначимо, що СХ може здійснювати дрейф, наприклад, під дією зовнішніх впливів (величина яких заздалегідь невідома). Зокрема для наведеного вище прикладу водогрійного котла в якості таких збурень може бути випадкова зміна тиску в газовій мережі. Таким чином, заздалегідь невідомо, яких значень параметрів x_e та y_e необхідно досягнути в той чи інший момент часу. В такому випадку будують екстремальну САК, яка визначає параметри екстремуму x_e та y_e безпосередньо в процесі своєї роботи та забезпечує їх досягнення і утримання.

В залежності від способу (принципу) визначення та досягнення екстремуму розрізняють наступні види СЕК:

– із запам'ятовуванням екстремуму;
– з керуванням за похідною;
– з допоміжними коливаннями;
– крокового типу.

В системах з запам'ятовуванням екстремуму (розглядається в даній роботі) в процесі функціонування запам'ятовується попередній найкращий режим роботи та у випадку значного відхилення від нього виконується повертання до нього.

В системах з керуванням за похідною в кожен момент часу можливим є визначення знаку похідної (за співвідношенням приростів аргументу та функції – СХ), на основі чого визначається, як змінюється (зростає чи спадає) керована координата при збільшенні чи зменшенні вхідної величини, а, отже, і як її змінювати. Точка екстремуму відповідає похідній, рівній нулю.

В системах з допоміжними коливаннями штучно вносяться певні зміщення (локальні) відносно певного положення ОК, та аналізується, як ОК на них реагує. На основі цього визначається, як змінювати стан ОК (в яку сторону змінювати вхідний вплив) для наближення до екстремуму.

Системи крокового типу є специфічним видом СЕК, в яких сигнали змінюються дискретно.

Як було вже сказано, всі реальні ОК є загалом нелінійні. Крім того, в загальному випадку вони є також інерційні. Як відомо, нелінійні та інерційні властивості ОК в ТАУ представляються різним чином, зокрема ОК на рис. 3.1 є нелінійним, проте безінерційним. Для опису інерційних (динамічних) властивостей застосовуються передаточні функції, але для них, як правило, приймається, що коефіцієнт передачі є константою. Тому для представлення ОК, який є одночасно і нелінійним, і інерційним застосовують послідовне з'єднання ланок. Загалом достатньо трьох ланок: лінійної інерційної, нелінійної безінерційної та ще однієї лінійної інерційної (рис. 3.4).

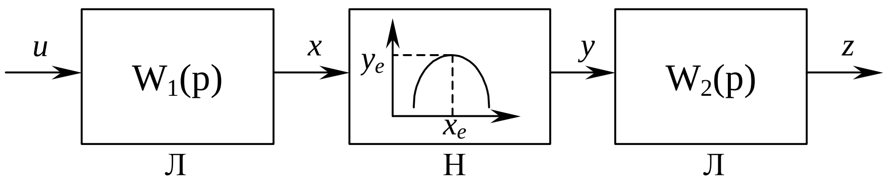


Рис. 3.4

В якості лінійних ланок достатньо інерційні ланки першого порядку (аперіодичні) з одиничним коефіцієнтом передачі (весь загальний коефіцієнт передачі ОК відтворюється за допомогою нелінійної ланки):

$$W_1(p)=\frac{1}{T_1 p+1}, \quad W_2(p)=\frac{1}{T_2 p+1}, \tag{3.1}$$

де T_1 та T_2 – сталі часу ланок.

Наявність двох інерційних ланок для опису такого ОК можна пояснити якщо проаналізувати типові джерела інерційності в системах керування. Першим джерелом інерційності, наприклад, можуть бути регулюючі елементи, стан та положення яких не може змінюватися миттєво (в прикладі з котлом – привод заслінки подачі газу в пальник). нелінійна ланка при цьому відтворює саму фізику функціонування ОК. Другим джерелом можуть бути процеси передачі та перетворення енергії в ОК, що також відбуваються не миттєво (в наведеному прикладі – процес прогрівання котла та поширення теплоти).

Часто буває, що одне з джерел інерційності виражено набагато сильніше за інші, тоді одна зі сталих часу є набагато більшою за іншу. В такому випадку інерційні властивості ОК будуть в основному визначатися тією ланкою, у якої стала часу більша. Тоді іншою ланкою можна знехтувати.

В даній роботі розглядається випадок, коли:

$$T_1 << T_2 . \tag{3.2}$$

Отже першою ланкою можна знехтувати, тоді ОК буде представлятися наступним чином (рис. 3.5).

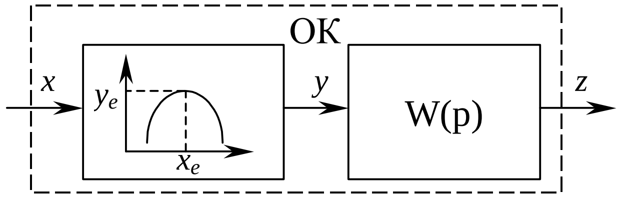


Рис. 3.5

Передаточна функція лінійної ланки:

$$W(p) = \frac{1}{T \cdot p + 1} . \tag{3.3}$$

3.1.2. Структура та принцип роботи досліджуваної СЕК

Структурна схема екстремальної САК, що досліджується в даній роботі, наведена на рис. 3.6.

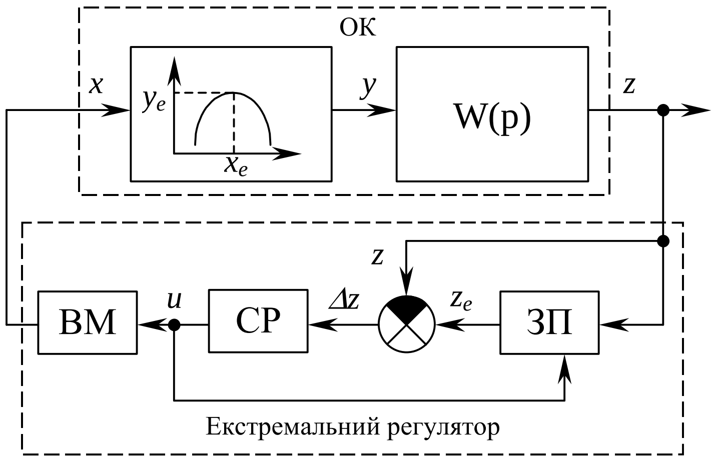


Рис. 3.6

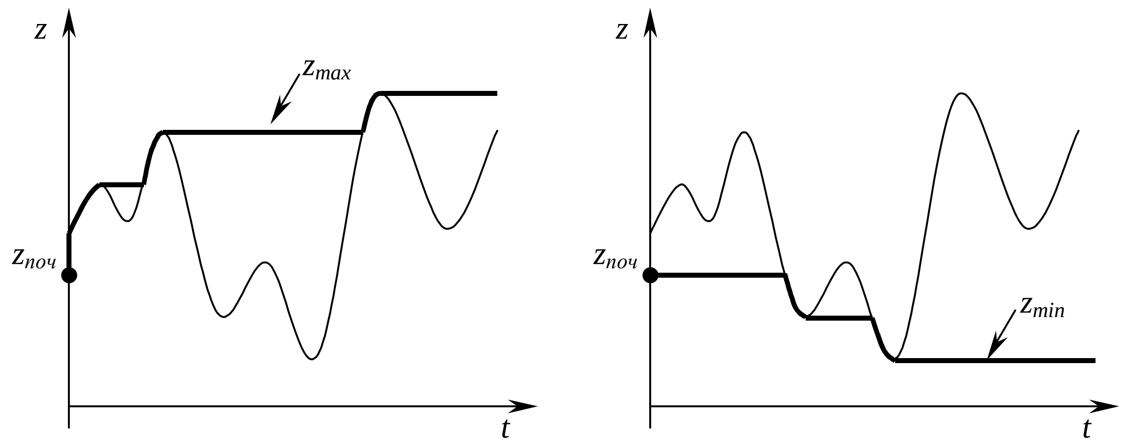
Спочатку розглянемо роботу екстремального регулятора поелементно.

В залежності від вигляду СХ (того, має вона мінімум чи максимум), запам’ятовуючий пристрій (ЗП) призначений для запам’ятовування найбільшого або найменшого (екстремального, найкращого) значення вихідної координати z з усіх попередніх. Таким чином, ЗП має властивості пам’яті. Він аналізує значення сигналу на вході і, якщо це значення є краще (в розглядуваному прикладі – більше), ніж значення в пам’яті, то значення в пам’яті приймається рівним значенню на вході (оновлюється). Інакше – не змінюється. На вихід завжди подається значення з пам’яті ЗП.

Роботу ЗП можна проілюструвати графічно: у випадку запам’ятовування максимуму – на рис. 3.7, а, мінімуму – на рис. 3.7, б.

Для розуміння логіки роботи ЗП розглянемо його можливу реалізацію (на прикладі запам’ятовування максимуму) на аналогових елементах (рис. 3.8). Для цього необхідний елемент, що має властивості пам’яті, наприклад інтегратор (при подачі на вхід додатного сигналу – нарощує значення на виході, при відсутності сигналу на вході – значення виходу не змінюється).

Також необхідні елементи, що приймають рішення – чи змінювати сигнал в пам'яті. В якості цих елементів використаємо елемент порівняння та нелінійний елемент з характеристикою напівпровідникового діода (на рис. 3.8 його СХ показана апроксимовано).



а) б)

Рис. 3.7

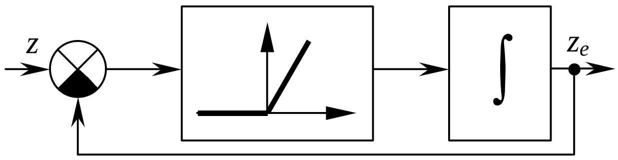


Рис. 3.8

Якщо сигнал z буде більше z_e, то на діод буде надходити додатний сигнал, який буде пропускатися і надходити на вхід інтегратора, що буде збільшувати сигнал на виході, поки він не зрівняється з сигналом z. В іншому випадку на діод буде надходити від'ємний сигнал, який діодом пропускатися не буде, тоді сигнал на виході інтегратора змінюватися не буде.

Для запам'ятовування мінімуму достатньо змінити полярність діода на протилежну.

Реалізація ЗП за допомогою обчислювальної логіки виконується звичайним алгоритмічним шляхом.

Сигнал з виходу ЗП надходить на елемент порівняння (див. рис. 3.7).

Елемент порівняння віднімає від значення z_e поточне значення z. Поки z зростає, значення z_e зростає разом з ним, різниця Δz при цьому залишається рівною 0. Якщо z починає зменшуватися, z_e залишається зафіксованим на попередньому рівні, тоді Δz починає зростати. Отже, різниця Δz показує, наскільки в даний момент значення вихідної координати z відхилилося від найкращого (найбільшого) попереднього значення.

Різниця Δz надходить на елемент, що називається "сигнум-реле" (СР), тобто знакове реле. Розглянемо спочатку роботу СР як окремого пристрою (рис. 3.9). СР випрацьовує сигнал керування, що є двозначним та двополярним (як у блока живлення постійної напруги, що може вмикатися або в прямому напрямку, або в зворотному).

Робота СР подібна роботі тригера. Нехай в початковий момент часу СР встановилося в стан $u = + B$ і сигнал z зростає. Як вже було сказано, поки z зростає, значення z_e зростає разом з ним, різниця Δz при цьому залишається рівною 0. Такий стан характеризується точкою 1. Як тільки z починає зменшуватися, z_e залишається зафіксованим на попередньому рівні, тоді Δz починає зростати. При цьому точка, що описує стан ЗП переміщується по горизонтальній прямій $+ B$. Це відбувається до того моменту, поки Δz не досягне порогу спрацювання СР Δ_1 (точка 2). Після чого стан СР змінюється на протилежний, тобто СР перемикає керування на $u = – B$ (точка 3). Якщо б далі збільшувати величину Δz, то робоча точка СР буде рухатись далі по горизонталі $– B$.

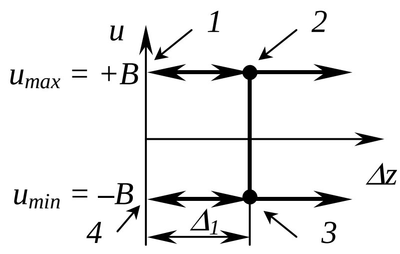


Рис. 3.9

Робота СР при зменшенні Δz може залежати від реалізації: наприклад, при зменшенні Δz точка буде рухатися по горизонталі до вертикальної вісі без перемикань (в точку 4). При наступному зростанні Δz та досягненні порогу спрацювання Δ_1 зліва, знову спрацює СР і змінить керування на значення + B.

Тепер розглянемо роботу СР в межах системи керування, що досліджується (див. рис. 3.6).

Особливістю роботи СР в межах даної СЕК є те, що при перемиканні керування на протилежне відбувається одночасне скидання пам'яті ЗП (сигналом, що йде від СР до ЗП на рис. 3.6). При цьому ЗП відразу запам'ятає найперше значення, що надійде на його вхід, а, отже, різниця Δz стане рівна 0. Робота СР в такому випадку буде ілюструватися наступною СХ (рис. 3.10).

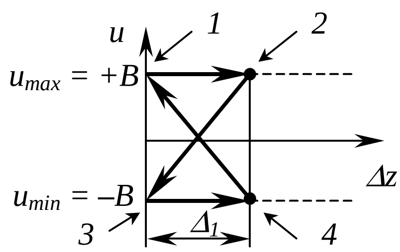


Рис. 3.10

Отже, поки z зростає, значення z_e зростає разом з ним, різниця Δz при цьому залишається рівною 0 (точка 1). Як тільки z починає зменшуватися, z_e залишається зафіксованим на попередньому рівні, тоді Δz починає зростати по горизонталі $u = +B$ до точки 2.Після чого стан СР змінюється на протилежний, тобто СР перемикає керування на $u = -B$ та одночасно величина Δz стане рівною 0 (точка 3). Далі все відбувається аналогічно. При наступному переході через екстремальне значення z та подальшому відхиленні від нього, Δz зростає по горизонталі $u = -B$, робоча точка СР переміщується в точку 4, де спрацьовує СР і скидається ЗП. Робоча точка переходить знову в точку 1.

Робота виконавчого механізму (ВМ) аналогічна роботі двигуна постійного струму (з постійною швидкістю обертання): при подачі на вхід константи (сталої напруги) він лінійно нарощує вихідну координату (поточний кут на валу). При відсутності сигналу на вході, вихідний сигнал залишається незмінним. Робота такого пристрою описується інтегруючою ланкою:

$$x(t) = k \cdot \int_0^t u(\tau) d\tau = \pm k \cdot B \cdot t, \tag{3.4}$$

де B – абсолютна величина сигналу керування;

k – коефіцієнт передачі ВМ.

Нарешті, розглянемо роботу всієї СЕК (див. рис. 3.6) в цілому на фазовій площині (рис. 3.11), на якій зобразимо статичну характеристику ОК.

СХ ОК може бути описана апроксимовано рівнянням параболи (на робочій ділянці):

$$y = ax^2 + bx + c\,, \tag{3.5}$$

де a, b, c – коефіцієнти рівняння (задаються за варіантом завдання).

Координати вершини параболи можна завжди знайти як точку екстремуму функції (умова екстремуму – рівність нулю часткових похідних):

$$x_e = -\frac{b}{2a}\,,\; y_e = -\frac{b^2}{4a} + c\,. \tag{3.6}$$

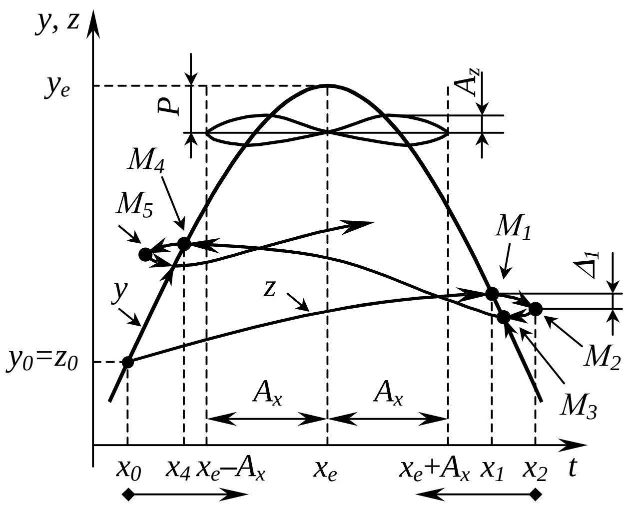


Рис. 3.11

Нехай в початковий момент часу стан ОК описується координатами *(x_0; y_0).*Якщо до цього стан ОК не змінювався, то початкове значення z_0 буде рівне також y_0 (коефіцієнт передачі між ними – у лінійної ланки –рівний 1). Нехай значення сигналу керування на виході СР на початку рівне $u = +B$.

Отже, значення координати на вході ОК почне зростати. Тоді сигнал y буде змінюватися за кривою СХ – спочатку зростати за лівою віткою, потім перейде через вершину параболи та почне зменшуватися за правою віткою. Сигнал z при цьому буде зростати, відстаючи від сигналу y (навіть, коли y буде зменшуватися). Математично це пояснити можна наступним. Зв'язок між у та z описується передаточною функцією лінійної ланки ОК (3.3), з якої нескладно отримати диференційне рівняння:

$$W(p) = \frac{Z(p)}{Y(p)} = \frac{1}{T \cdot p + 1} \Rightarrow z' = \frac{1}{T}\left(y - z\right). \tag{3.7}$$

Отже, знак швидкості z визначається знаком різниці *(y–z)*, тобто поки y>z, z зростає. В точці M_1 сигнал z зрівнюється з y, y стає менше z, а отже z починає зменшуватися. Таким чином, в точці *$z(x_1)$* сигнал z досягає свого екстремуму.

При зменшенні z значення z_e залишається незмінним в пам'яті ЗП, а тому різниця

$$\Delta z = z_e - z \tag{3.8}$$

почне зростати від 0 до величини порогу спрацювання СР:

$$\Delta_1 = z(x_2) - z(x_1)\,. \tag{3.9}$$

В точці M_2 відбудеться перемикання СР, сигнал керування зміниться на протилежний (u = – B), а сигнал x почне змінюватися від значення x_2 в протилежну сторону (зменшуватися). Сигнал y при цьому почне зростати (за правою віткою параболи). Також в точці M_2 відбудеться стирання пам'яті ЗП, а тому Δz стане рівна 0.

Після цього сигнал z дещо зменшується (оскільки y є менше, ніж z), поки не зрівняється з сигналом y в точці M_3. Далі y стає більше z, а отже z починає зростати, поки не перетне ліву вітку параболи в точці M_4.

На лівій вітці все відбувається аналогічно до розглянутого на правій вітці. Сигнал z в точці M_4 зрівнюється з y, y стає менше z, а отже z починає зменшуватися. Таким чином, в точці $z(x_4)$ сигнал z досягає свого екстремуму, який проте буде більшим за раніше досягнуте значення $z(x_1)$. Починаючи з точки M_4, різниця Δz зростає, досягаючи в точці M_5 порогу спрацювання СР. В точці M_5 знову спрацьовує СР, змінює сигнал керування на протилежний (u стає рівне + В), а тому x почне знову зростати. Сигнал z дещо зменшиться, після чого починає зростати.

Таким чином, фазова траєкторія $z(x)$ петлеподібно буде наближатися до екстремуму y_e, проте ніколи його не досягне. Причиною цього є по-перше, інерційність ОК (максимум сигналу z досягається не в момент переходу через точку x_e, а в момент перетину віток параболи, тобто пізніше, ніж досягається y_e), по-друге – сам механізм фіксації факту досягнення екстремуму (тобто приймається рішення про те, що був досягнутий екстремум не в точках M_1 та M_4, а лише після відхилення від них на певну величину). Тому фазова траєкторія виходить на певний граничний цикл, зображений у вигляді петлеподібної траєкторії, величина x при цьому буде коливатися навколо x_e, а величина z – також навколо певного свого середнього значення (здійснювати незатухаючі коливання з певною амплітудою та частотою).

Динаміка роботи СЕК при цьому буде описуватися системою рівнянь:

$$x = \pm k \cdot B \cdot t, \tag{3.10}$$

$$y = ax^2 + bx + c,$$

$$z' = \frac{1}{T}(y - z).$$

Розв’язок даних рівнянь та імітація алгоритму роботи ЗП та СР дає можливість промоделювати роботу СЕК з метою отримання фазової траєкторії $z(x)$, а також розгортки в часі зміни сигналів $x(t)$, $y(t)$ та $z(t)$. З них можна легко визначити параметри коливань, що встановилися. На рис. 3.11 відмічено амплітуди коливань величин x та z (A_x та A_z відповідно). також можна визначити періоди коливань величин $x(t)$, $y(t)$ та $z(t)$. Легко помітити, що період коливань величини x рівно в 2 рази більше періоду коливань величини z (поки x здійснить одне коливання, z двічі зросте та зменшиться).

Загалом до основних показників роботи СЕК відносять:

τ – час входження в зону екстремуму (в зону автоколивань), що визначає швидкодію СЕК;
T_z – період коливань вихідної величини (показника якості);
T_x – період коливань вхідної величини;
A_z – амплітуда коливань вихідної величини;
A_x – амплітуда коливань вхідної величини;
P – затрати (втрати) на пошук екстремуму.

Втрати на пошук Р є одним з основних показників якості СЕК, що характеризує точність роботи системи. Втрати на пошук показують на скільки значення керованої координати (показника якості) не досягає свого ідеального значення – тобто значення y_e. Величину Р можна визначити інтегрально як усереднену різницю між значенням y_e та поточним значенням z в процесі автоколивань, що встановилися. В середньому це буде різниця між y_e та середнім значенням z (показано на рис. 3.11).

Для покращення якісних показників роботи СЕК параметри τ, Р, A_x, A_z мають бути якомога менше. Це може досягатися зміною параметрів роботи екстремального регулятора.

В даній роботі досліджується вплив чотирьох параметрів СЕК на чотири основні показники якості її роботи – A_x, A_z, τ, Р.

До варійованих параметрів СЕК відносяться:

Δ_1 – поріг спрацювання СР;
k – коефіцієнт передачі ВМ;
B – абсолютна величина сигналу керування (виходу СР);
T – інерційність ОК.

Два з показників якості (Р та A_z) виводяться на форму моделюючої програми. Інші два – τ та A_x – треба визначати вручну. Величина часу входження в зону автоколивань визначається аналогічно часу регулювання для перехідних процесів. Це час, коли величина z входить в зону автоколивань (відмічена на графіках перехідних процесів як коридор між рівнями z_{min} та z_{max}) і більше з неї не виходить (рис. 3.12).

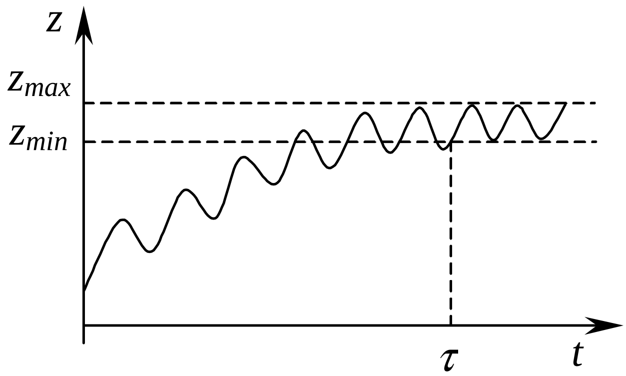
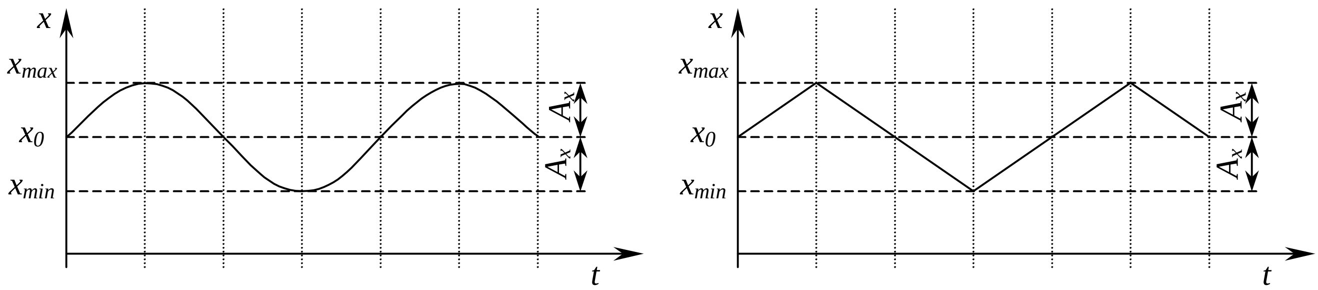


Рис. 3.12

Амплітуду сигналу x треба визначати, починаючи з моменту часу, коли встановилися автоколивання (для моменту часу, більшого, ніж τ). Амплітуда коливань – це максимальне відхилення сигналу від середнього значення (загалом може бути поширено на всі коливальні сигнали різної форми), як показано на рис. 3.13.



а) б)

Рис. 3.13

Наприклад, синусоїдальний сигналу (рис. 3.13, а), як відомо, може бути описаний формулою:

$$x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + x_0, \quad (3.11)$$

де A – амплітуда сигналу;

ω – колова (циклічна) частота;

φ – початкова фаза;

x_0 – постійна складова в сигналі.

За такими самими принципами необхідно визначати амплітуду сигналу x для розглядуваної СЕК (рис. 3.13, б).

3.2. Порядок виконання роботи

1. Задати в програму параметри статичної характеристики об'єкта (a, b, c), параметр інерційності об'єкта (T), коефіцієнт підсилення виконавчого механізму k, параметри сигнум-реле (B, Δ_1). Одержати статичну характеристику. **Обрати початкову точку** у внутрішній частині параболи, близько до лівої вітки (але не на самій вітці) та близько до кінця вітки (але по висоті між ординатою кінця вітки та ординатою вершини параболи). Записати значення початкової точки. **Зняти знімок екрану** (статичну характеристику з обраною початковою точкою).
   Увага. В усіх наступних дослідах задавати саме цю початкову точку.

2. **Виконати моделювання** роботи СЕК, виконуючи дослідження впливу параметрів Δ1, B, k та T на показники якості роботи СЕК: на амплітуди коливань координат x та z (Ax, Az), на втрати на пошук P, а також на час входження в зону екстремуму τ. Для цього виконати моделювання для даних згідно варіанту, а також по черзі виконати моделювання для чотирьох інших значень кожного з параметрів Δ1, B, k та T, визначаючи в кожному досліді за графіками на формі програми параметри Ax, Az, P, а також τ:
   2.1. Виконати моделювання для даних за варіантом (**зняти знімок екрану** для цього випадку).
   2.2. Виконати моделювання для чотирьох інших значень Δ1.
   2.3. Виконати моделювання для чотирьох інших значень B.
   2.4. Виконати моделювання для чотирьох інших значень k.
   2.5. Виконати моделювання для чотирьох інших значень T.
   Результати занести в табл.3.1–3.4.

Таблиця 3.1

Δ_1	наприклад, **0,1**	наприклад, **0,15**	Значення за варіантом, наприклад, **0,2**	наприклад, **0,25**	наприклад, **0,3**
A_x					
A_z					
P					
τ					

Таблиця 3.2

B	наприклад, **1**	наприклад, **1,5**	За варіантом, наприклад, **2**	наприклад, **2,5**	наприклад, **3**
A_x					
A_z					
P					
τ					

Таблиця 3.3

k	наприклад, **2**	наприклад, **3**	За варіантом, наприклад, **4**	наприклад, **5**	наприклад, **6**
A_x					
A_z					
P					
τ					

Таблиця 3.4

T	наприклад, **0,2**	наприклад, **0,35**	За варіантом, наприклад, **0,5**	наприклад, **0,65**	наприклад, **0,8**
A_x					
A_z					
P					
τ					

3. Побудувати за даними табл.3.1–3.4 графіки залежностей:
   3.1. На одній координатній площині Ax(Δ1), Az(Δ1), P(Δ1), τ(Δ1).
   3.2. На одній координатній площині Ax(B), Az(B), P(B), τ(B).
   3.3. На одній координатній площині Ax(k), Az(k), P(k), τ(k).
   3.4. На одній координатній площині Ax(T), Az(T), P(T), τ(T).
   Примітка. Графіки Az(Δ1), Az(B), Az(k), Az(T) можна винести на окремі координатні площини для більш вдалого їх представлення (за бажанням студента).

4. Зробити висновки за результатами.

3.3. Зміст звіту

В звіті необхідно навести:

1. Короткі теоретичні відомості.
2. Структурну схему системи керування.
3. Два <u>знімки екрану</u> – знімок графіку статичної характеристики ОК з обраною початковою точкою та знімок графіків результатів моделювання із сигналами z(x), z(t), x(t), u(t) для даних за варіантом.
4. Чотири <u>таблиці</u> з результатами дослідів.
5. <u>Графіки</u> залежностей за таблицями результатів дослідів.
6. Висновки по роботі. У висновках проаналізувати характер вплив зміни параметрів системи на показники якості її роботи.

3.4. Контрольні питання

1. Що таке екстремальне керування (екстремальна САК)?
2. Що є задачею екстремального керування?
3. Для яких об’єктів керування будують екстремальні САК?
4. Які види екстремальних САК ви знаєте?
5. В якому загальному вигляді можна представити будь-який реальний об’єкт керування?
6. Як працює запам’ятовуючий пристрій (сигнум-реле, виконавчий механізм) в досліджуваній САК?
7. Від чого залежить амплітуда коливань вихідної величини *z*?
8. Які показники якості екстремальних САК ви знаєте?
9. Що виражає величина втрат на пошук? Чому вона присутня в досліджуваній САК?
10. Чому вихідна величина *z* ніколи не досягає свого ідеального (бажаного) значення y_e?

Лабораторна робота №4
Синтез безпошукової адаптивної САК об'єктом другого порядку з еталонною моделлю замкненої системи

Мета роботи – ознайомитись з методикою синтезу блоку адаптації за допомогою функцій Ляпунова, засвоїти методику використання обчислювальної техніки для моделювання динамічних режимів системи керування.

4.1. Теоретичні відомості

4.1.1. Загальна характеристика адаптивних САК

Як відомо, всі системи автоматичного керування (САК) можна розділити на два види (за адаптивністю):

– з жорстким налагодженням, тобто системи, в яких попередньої (апріорної) інформації достатньо для побудови і задовільної роботи системи;

– з гнучким налагодженням (адаптивні), тобто системи, в яких попередньої інформації недостатньо для побудови чи роботи системи.

Такі (адаптивні) системи змінюють параметри свого налагодження безпосередньо в процесі своєї роботи за рахунок використання робочої інформації, яка отримується під час їх функціонування.

Можна дати, наприклад, таке визначення адаптивних САК (АСАК). АСАК – це системи, які здатні самоналагоджуватися в процесі своєї роботи відповідно до умов, що змінюються заздалегідь невідомим (непередбачуваним) чином.

АСАК також можна класифікувати, наприклад, за ступенем (рівнем реалізації) адаптивності, зокрема на самонастроювальні (в яких змінюються параметри), самоорганізуючі (зі зміною алгоритму чи закону керування) та самонавчальні (здатні діяти згідно заздалегідь не закладених алгоритмів).

Зазначимо, що робота АСАК в дечому схожа з роботою систем екстремального керування. Зокрема, і ті, і інші працюють в умовах, що впливають на них непередбачуваним чином, порушуючи нормальну роботу. З іншої сторони, в екстремальних САК компенсація наслідків зовнішніх небажаних впливів (збурень) виконується за допомогою зміни значень сигналів, що діють в системі (відповідно до закладених принципів екстремального керування), а в АСАК – за допомогою зміни параметрів налаштувань чи алгоритмів роботи ланок.

4.1.2. Структура та принцип роботи досліджуваної АСАК

Розглянемо замкнуту САК (рис. 4.1), що складається з об'єкту керування (ОК) із передаточною функцією:

$$W_{ОК}(p) = \frac{k(t)}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}, \tag{4.1}$$

та пропорційного безінерційного регулятора:

$$W_{рег}(p) = \alpha, \tag{4.2}$$

коефіцієнт якого оптимально (за певним критерієм) підібраний для даного об'єкта.

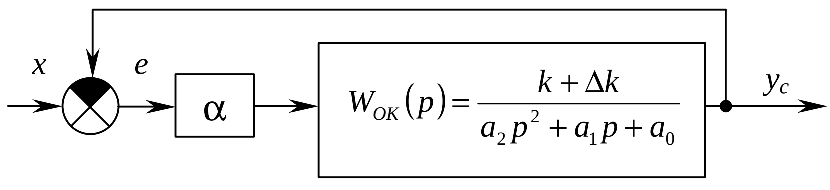


Рис. 4.1

Особливістю ОК, що входить до САК, є змінна величина коефіцієнту передачі *k(t)*. Вважається, що під дією зовнішніх збурень коефіцієнт передачі ОК змінюється заздалегідь непередбачуваним чином. Це призводить до небажаних змін (порушень) в роботі системи, наприклад, змінюється загальний коефіцієнт передачі замкнутої САК, змінюються усталені значення сигналів (вихідного сигналу та помилки системи), змінюються показники якості (перерегулювання, час регулювання), може змінитися характер перехідного процесу (з аперіодичного стати коливальним) тощо. Все це є небажаним.

Таким чином, необхідно розробити пристрій – блок адаптації (БА), який би змінював коефіцієнт передачі регулятора в залежності від небажаних змін коефіцієнту передачі ОК, так, щоб компенсувати ці зміни і повертати САК в оптимальний режим роботи.

Змінний коефіцієнт *k(t)* для зручності представлений у вигляді двох складових – постійної *k* (не залежить від зовнішніх збурень) та змінної *Δk*, що визначається зовнішніми збуреннями:

$$k(t) = k + \Delta k\ . \tag{4.3}$$

Також для зручності побудови АСАК загальний коефіцієнт передачі регулятора теж буде складатися з двох доданків – постійної величини α (те значення, яке має регулятор, коли збурення відсутні і коефіцієнт ОК рівний *k*) та змінної величини $\Delta\alpha$, що визначається алгоритмом адаптації:

$$W_{рег}(p) = \alpha + \Delta\alpha\ . \tag{4.4}$$

Зазначимо, що, наприклад, при зменшенні *k(t)* недостатньо просто збільшити величину $\Delta\alpha$. Процес адаптації відбувається в динаміці – в процесі роботи САК, і тому $\Delta\alpha$ має змінюватися поступово (за певним законом), щоб в результаті величина y_c плавно прийшла до необхідного значення, а система залишалася при цьому стійкою. Крім того, в процесі адаптації коефіцієнт ОК також може продовжувати змінюватися.

Таким чином, стоїть задача синтезувати БА (та відповідно його алгоритм роботи), який має за певним законом змінювати величину $\Delta\alpha$, щоб сигнал y_c повернувся до правильного значення. Для цього необхідно знати в кожен момент часу, яким є необхідне значення виходу системи. Таку інформацію в процесі роботи можуть давати еталонні моделі.

Отже, нехай є пристрій – еталонна модель замкнутої системи, яка налаштована відповідним чином і функціонує так, як повинна функціонувати вихідна оптимальна (початкова – див. рис. 4.1) замкнута САК при відсутності дії збурень (тобто коли *Δk*=0). Еталонна модель може бути, наприклад, певним обчислювальним пристроєм, що видає сигнал, еквівалентний (за величиною) сигналу на виході системи при відсутності дії збурень (тобто на модель збурення не діють). Тобто еталонна модель є джерелом інформації про бажану (правильну) роботу вихідної САК.

Структурна схема АСАК, що синтезується та досліджується в даній роботі, наведена на рис. 4.2.

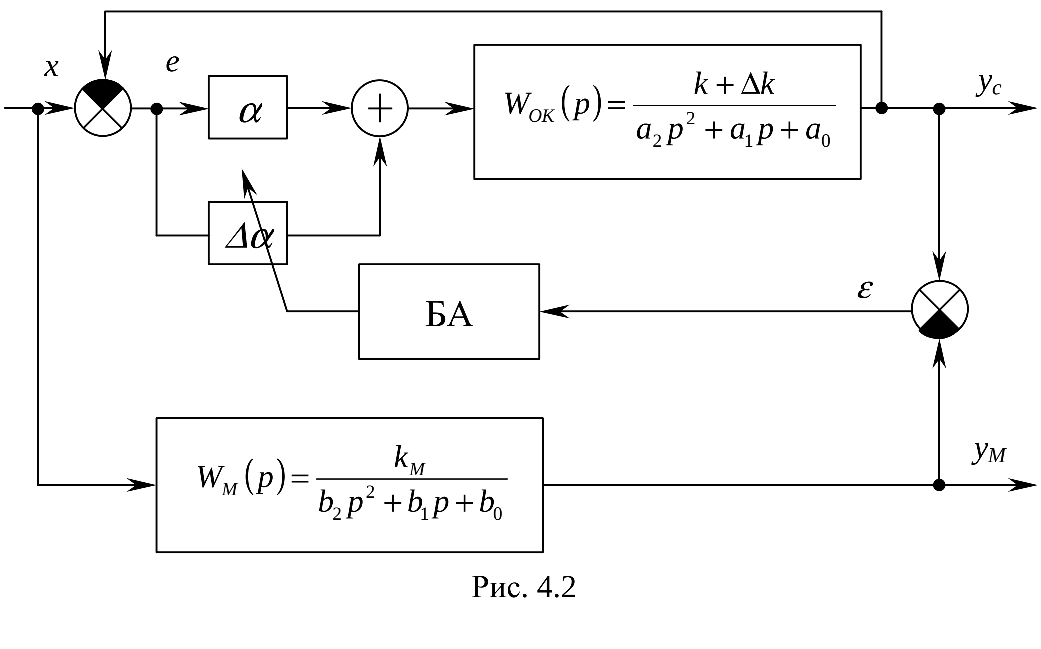


Рис. 4.2

Оскільки застосовується еталонна модель замкнутої системи, то на неї має надходити той самий сигнал, що й на початкову замкнуту систему. Для того, щоб модель видавала такий самий сигнал, як і система, якій вона відповідає, то порядок і склад її передаточної функції (порядок чисельника і знаменника) також мають відповідати порядку та складу передаточної функції замкнутої системи. Оскільки регулятор безінерційний, то передаточна функція первинної розімнутої системи (а також і замкнутої) буде другого порядку, а в чисельнику буде нульовий порядок (оскільки регулятор лише пропорційний). Тому, беремо в якості еталонної моделі ланку другого порядку:

$$W_M(p) = \frac{k_M}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}. \tag{4.5}$$

Для визначення факту і величини відхилення первинної системи від правильного режиму роботи в кожен момент часу вихід системи має порівнюватися з виходом моделі. Різниця сигналів

$$\varepsilon = y_C - y_M \tag{4.6}$$

називається похибкою адаптації і становить критерій процесу адаптації. На основі сигналу ε БА має керувати величиною $\Delta\alpha$.

4.1.3. Синтез блоку адаптації

В будь-якому випадку, коли синтезується САК (або доповнюється блоками – як в даному випадку) необхідно, щоб вона була стійкою. Таким чином, БА має змінювати величину $\Delta\alpha$ в залежності від зміни Δk (аналізуючи сигнал ε), так щоб ε прямував до нуля (або до певного обмеженого значення):

$$\varepsilon = y_C - y_M \to 0, \tag{4.7}$$

тобто, щоб результуюча АСАК була стійкою.

Як відомо, для аналізу (або забезпечення) стійкості САК необхідно проаналізувати диференційне рівняння (ДР), що описує динаміку роботи САК (по відношенню до керованої величини). Лінійні САК описуються лінійними неоднорідними ДР, розв’язок яких складається з двох доданків – вільної складової (або загального розв’язку ДР) та вимушеної складової (або часткового розв’язку ДР). Вимушена складова залежить від зовнішніх впливів і не залежить від властивостей стійкості системи. Натомість вільна складова не залежить від зовнішніх впливів і визначає коливальні властивості системи (тобто її стійкість). Отже, для забезпечення стійкості синтезованої САК необхідно скласти ДР для величини ε та забезпечити, щоб вільна складова розв’язку цього ДР прямувала до нуля або (в гіршому випадку) до певного усталеного значення.

Для того, щоб скласти ДР для величини ε можна спочатку скласти ДР для сигналів виходу системи y_c та виходу моделі y_M, а потім відняти від одного рівняння друге, скориставшись залежністю (4.6). Оскільки величина ε є лінійною функцією відносно y_c та y_M, то її похідні будуть різницями відповідних похідних y_c та y_M.

Для складання ДР вихідної САК в першу чергу визначимо передаточну функцію розімкнутої та замкнутої системи при умові дії збурення на ОК та адаптації регулятора:

$$W(p)_{роз} = W_{рег}(p)\cdot W_{OK}(p) = \frac{(\alpha+\Delta\alpha)(k+\Delta k)}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}, \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} W(p)_{зам} &= \frac{(\alpha+\Delta\alpha)(k+\Delta k)}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0 + (\alpha+\Delta\alpha)(k+\Delta k)} = \\ &= \frac{\alpha k + \alpha\cdot\Delta k + k\cdot\Delta\alpha + \Delta\alpha\cdot\Delta k}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0 + \alpha k + \alpha\cdot\Delta k + k\cdot\Delta\alpha + \Delta\alpha\cdot\Delta k} = \frac{Y_C(p)}{X(p)}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Вважається, що змінні доданки в чисельнику і знаменнику є набагато менші, ніж постійні, тому добутком $\Delta\alpha\Delta k$ можна знехтувати, оскільки він є ще меншою величиною (другого порядку мализни), ніж інші доданки.

Оскільки за визначенням передаточна функція є відношенням зображення вихідної величини до зображення вхідної величини, на основі цього можна перейти до ДР в операторній формі, а від нього – до ДР в функціях від часу.

Запишемо ДР замкнутої системи, поділивши відразу ліву та праву частини на старший коефіцієнт a_2:

$$\ddot{y}_C + \frac{1}{a_2}\left[a_1\dot{y}_C + (a_0 + \alpha k)y_C + \alpha\cdot\Delta k\cdot y_C + \Delta\alpha\cdot k\cdot y_C\right] = \tag{4.10}$$
$$= \frac{1}{a_2}(\alpha k\cdot x + \alpha\cdot\Delta k\cdot x + \Delta\alpha\cdot k\cdot x),$$

Аналогічно, використовуючи передаточну функцію моделі (4.5) та поділивши ліву та праву частину на старший коефіцієнт b_2, запишемо ДР моделі:

$$\ddot{y}_M + \frac{1}{b_2}(b_1\dot{y}_M + b_0 y_M) = \frac{1}{b_2}k_M\cdot x. \tag{4.11}$$

Віднімемо від ДР вихідної замкнутої системи (4.10) ДР моделі (4.11), групуючи змінні за порядком похідної:

$$(\ddot{y}_C - \ddot{y}_M) + \left(\frac{a_1}{a_2}\dot{y}_C - \frac{b_1}{b_2}\dot{y}_M\right) + \left(\frac{a_0 + \alpha k}{a_2}y_C - \frac{b_0}{b_2}y_M\right) + \frac{\alpha\cdot\Delta k}{a_2}y_C + \frac{\Delta\alpha\cdot k}{a_2}y_C = \tag{4.12}$$
$$= \left(\frac{\alpha k}{a_2} - \frac{k_M}{b_2}\right)x + \frac{\alpha\cdot\Delta k}{a_2}x + \frac{\Delta\alpha\cdot k}{a_2}x.$$

Перенесемо два останні доданки з лівої частини в праву, винісши за дужки спільні коефіцієнти та врахувавши, що різниця, яка залишиться в дужках, є сигналом помилки системи:

$$x - y_C = e. \tag{4.13}$$

Отже, маємо:

$$(\ddot{y}_C - \ddot{y}_M) + \left(\frac{a_1}{a_2}\dot{y}_C - \frac{b_1}{b_2}\dot{y}_M\right) + \left(\frac{a_0 + \alpha k}{a_2}y_C - \frac{b_0}{b_2}y_M\right) = \tag{4.14}$$
$$= \left(\frac{\alpha k}{a_2} - \frac{k_M}{b_2}\right)x + \frac{\alpha\cdot\Delta k}{a_2}e + \frac{\Delta\alpha\cdot k}{a_2}e.$$

Якщо врахувати вираз (4.6) то можна відокремити в (4.14) вирази відносно сигналу похибки адаптації ε та її похідних. Як вже було відмічено, величина ε є лінійною функцією відносно y_c та y_M, а тому її похідні є різницями відповідних похідних y_c та y_M. Вираз в перших дужках (4.14) відразу дасть другу похідну ε. Для виділення похідних сигналу ε в другій та третій дужках необхідно в них додати та відняти одні і ті самі вирази та згрупувати змінні:

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\dot{y}_C - \frac{b_1}{b_2}\dot{y}_M\right) = \left(\frac{a_1}{a_2}\dot{y}_C - \frac{b_1}{b_2}\dot{y}_M + \frac{a_1}{a_2}\dot{y}_M - \frac{a_1}{a_2}\dot{y}_M\right) = \tag{4.15}$$
$$= \left(\frac{a_1}{a_2}\dot{y}_C - \frac{a_1}{a_2}\dot{y}_M\right) + \left(\frac{a_1}{a_2}\dot{y}_M - \frac{b_1}{b_2}\dot{y}_M\right) = \frac{a_1}{a_2}(\dot{y}_C - \dot{y}_M) + \left(\frac{a_1}{a_2} - \frac{b_1}{b_2}\right)\dot{y}_M =$$
$$= \frac{a_1}{a_2}\dot{\varepsilon} + \left(\frac{a_1}{a_2} - \frac{b_1}{b_2}\right)\dot{y}_M;$$
$$\left(\frac{a_0 + \alpha k}{a_2}y_C - \frac{b_0}{b_2}y_M\right) = \left(\frac{a_0 + \alpha k}{a_2}y_C - \frac{b_0}{b_2}y_M + \frac{a_0 + \alpha k}{a_2}y_M - \frac{a_0 + \alpha k}{a_2}y_M\right) =$$
$$= \left(\frac{a_0 + \alpha k}{a_2}y_C - \frac{a_0 + \alpha k}{a_2}y_M\right) + \left(\frac{a_0 + \alpha k}{a_2}y_M - \frac{b_0}{b_2}y_M\right) =$$
$$= \frac{a_0 + \alpha k}{a_2}(y_C - y_M) + \left(\frac{a_0 + \alpha k}{a_2} - \frac{b_0}{b_2}\right)y_M = \frac{a_0 + \alpha k}{a_2}\varepsilon + \left(\frac{a_0 + \alpha k}{a_2} - \frac{b_0}{b_2}\right)y_M.$$

Врахувавши отримані вирази, одержимо ДР похибки адаптації:

$$\ddot{\varepsilon}+\frac{a_1}{a_2}\dot{\varepsilon}+\left(\frac{a_1}{a_2}-\frac{b_1}{b_2}\right)\dot{y}_M+\frac{a_0+\alpha k}{a_2}\varepsilon+\left(\frac{a_0+\alpha k}{a_2}-\frac{b_0}{b_2}\right)y_M= \qquad (4.16)$$

$$=\left(\frac{\alpha k}{a_2}-\frac{k_M}{b_2}\right)x+\frac{\alpha\cdot\Delta k}{a_2}e+\frac{\Delta\alpha\cdot k}{a_2}e\,.$$

Вище було сказано, що еталонна модель налаштовується таким чином, щоб працювати і видавати такий самий сигнал на виході, як вихідна замкнута САК (див. рис. 4.1) при умові, що Δk та $\Delta\alpha$ мають бути рівні нулю. Це можливо лише за умови, коли передаточні функції цієї САК (4.9) та моделі (4.5) будуть співпадати як за порядком в чисельнику та знаменнику, так і за значеннями параметрів, тобто параметри біля відповідних степенів поліномів їх чисельників і знаменників мають співпадати. Це дає розрахункові формули для налаштування моделі:

$$k_M=\alpha\cdot k\,, \qquad (4.17)$$

$$b_2=a_2\,,$$

$$b_1=a_1\,,$$

$$b_0=a_0+k\cdot\alpha=a_0+k_M\,.$$

Якщо будуть виконуватися умови (4.17), то у виразі (4.16) ряд доданків стануть рівними нулю, зокрема:

$$\left(\frac{a_1}{a_2}-\frac{b_1}{b_2}\right)=0\,;\ \left(\frac{a_0+\alpha k}{a_2}-\frac{b_0}{b_2}\right)=0\,;\ \left(\frac{\alpha k}{a_2}-\frac{k_M}{b_2}\right)=0\,. \qquad (4.18)$$

Якщо ж параметри моделі налаштовані неточно, та умови (4.18) не будуть виконуватися, то це призведе лише до появи в розв’язку ДР для похибки адаптації ε певних складових, відмінних від нуля. Проте на стійкість системи це не вплине.

Як що ж модель налаштована вірно (що є бажаним), то отримаємо наступне ДР для похибки адаптації:

$$\ddot{\varepsilon}+\frac{a_1}{a_2}\dot{\varepsilon}+\frac{a_0+\alpha k}{a_2}\varepsilon=\frac{\alpha\cdot\Delta k}{a_2}e+\frac{\Delta\alpha\cdot k}{a_2}e\,. \qquad (4.19)$$

Введемо для зручності позначення:

$$\frac{\Delta\alpha\cdot k}{a_2}=u_a\,, \qquad (4.20)$$

Тоді вираз

$$\frac{\Delta\alpha\cdot k}{a_2}e=u_a e \qquad (4.21)$$

буде являти собою результат впливу БА на регулятор в процесі адаптації (дольовий внесок БА в сигнал керування системою).

Інший доданок в правій частині ДР (4.20) визначається величиною, що є результатом дії збурення на ОК (визначається зміною коефіцієнта передачі ОК під дією зовнішніх випадкових впливів). Позначимо цей доданок як збурення:

$$\frac{\alpha\cdot\Delta k}{a_2}e=f(t)\,, \qquad (4.22)$$

та в подальших дослідженнях стійкості ОК його враховувати не будемо, оскільки стійкість ОК він не визначає.

Для аналізу та забезпечення стійкості САК використаємо метод функцій Ляпунова (ефективний метод в задачах синтезу законів керування систем). Для цього перейдемо від одного ДР другого порядку для ε до системи з двох рівнянь першого порядку (у формі Коші) Для цього позначимо:

$$\varepsilon=\varepsilon_1;\ \dot{\varepsilon}=\dot{\varepsilon}_1=\varepsilon_2\,. \qquad (4.23)$$

Отже, отримаємо:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2, \tag{4.24}$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = -\frac{a_0 + \alpha k}{a_2}\varepsilon_1 - \frac{a_1}{a_2}\varepsilon_2 + u_a e.$$

Складемо функцію Ляпунова у вигляді додатно-визначеної квадратичної форми (КФ).

КФ – це вираз, який завжди невід'ємний, тобто додатний або рівний нулю – лише у випадку, коли всі аргументи одночасно рівні нулю.

У функцію Ляпунова мають входити змінні з системи рівнянь (4.24):

$$V(t) = \beta_1\varepsilon_1^2 + \beta_2\varepsilon_2^2 + \beta_3 u_a^2, \tag{4.25}$$

де β_1, β_2, β_3 – невідомі коефіцієнти.

Правило стійкості за Ляпуновим каже про те, що якщо функція Ляпунова буде додатно-визначеною КФ, а її похідна за часом – від'ємно визначеною КФ, то система буде стійка. Таким чином, процес адаптації буде стійким, а сигнали $\varepsilon_1(t)$ та $\varepsilon_2(t)$ будуть прямувати до нуля (або певного обмеженого значення), якщо вдасться підібрати хоча б якийсь набір коефіцієнтів β_1, β_2, β_3, при яких похідна за часом від (4.25) буде від'ємно визначеною КФ.

Для додатної визначеності (4.25), в першу чергу, приймемо коефіцієнти β_1, β_2, β_3 невід'ємними (загалом додатними) числами.

Знайдемо похідну від (4.25) за часом (як похідна складної функції багатьох змінних вона рівна сумі добутків часткових похідних зовнішньої функції за внутрішньою функцією на похідні внутрішніх функцій за часом):

$$W(t) = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\varepsilon_1}\frac{d\varepsilon_1}{dt} + \frac{dV}{d\varepsilon_2}\frac{d\varepsilon_2}{dt} + \frac{dV}{du_a}\frac{du_a}{dt} = 2\beta_1\varepsilon_1\dot{\varepsilon}_1 + 2\beta_2\varepsilon_2\dot{\varepsilon}_2 + 2\beta_3 u_a\dot{u}_a. \tag{4.26}$$

Підставимо в (4.26) вирази з системи ДР (4.24):

$$W(t) = 2\left[\beta_1\varepsilon_1\varepsilon_2 + \beta_2\varepsilon_2\left(-\frac{a_0 + \alpha k}{a_2}\varepsilon_1 - \frac{a_1}{a_2}\varepsilon_2 + u_a e\right) + \beta_3 u_a\dot{u}_a\right] = \tag{4.27}$$

$$= 2\left[-\beta_2\frac{a_1}{a_2}\varepsilon_2{}^2 + \left(\beta_1 - \beta_2\frac{a_0 + \alpha k}{a_2}\right)\varepsilon_1\varepsilon_2 + u_a\left(\beta_2\varepsilon_2 e + \beta_3\dot{u}_a\right)\right] \le 0.$$

Оскільки було прийнято, що всі коефіцієнти β є додатними, то перший доданок (4.27) в дужках є від'ємно визначеною КФ. Тоді достатньо забезпечити рівність нулю виразів в інших двох дужках, щоб весь вираз (4.27) був від'ємно-визначеним.

Для цього оберемо коефіцієнт β_1 таким, щоб виконувалась умова:

$$\beta_1 = \beta_2\frac{a_0 + \alpha k}{a_2}. \tag{4.28}$$

Щодо третього доданку, його рівність нулю нічим не обумовлена. Випишемо окремо його та прирівняємо до нуля:

$$\beta_2\varepsilon_2 e + \beta_3\dot{u}_a = 0. \tag{4.29}$$

Забезпечимо виконання цієї рівності, виразивши з нього похідну u_a. Для простоти можна прийняти:

$$\beta_3 = 1, \tag{4.30}$$

а також необхідно врахувати попереднє позначення (4.20):

$$\dot{u}_a = -\beta_2\varepsilon_2 e = \frac{\Delta\dot{\alpha}\cdot k}{a_2}, \tag{4.31}$$

звідки маємо вираз, що визначає ДР процесу адаптації:

$$\dot{u}_a = -\beta_2\frac{a_2}{k}\varepsilon_2 e. \tag{4.32}$$

Отже, якщо завжди в процесі роботи САК буде забезпечуватися умова (4.32), то САК буде стійкою.

З даного ДР отримаємо алгоритм адаптації:

$$u_a = -\beta_2 \frac{a_2}{k} \int_0^{\infty} \varepsilon_2 e dt . \tag{4.33}$$

На основі отриманого алгоритму можна побудувати БА, а отже всю результуючу АСАК (рис. 4.3).

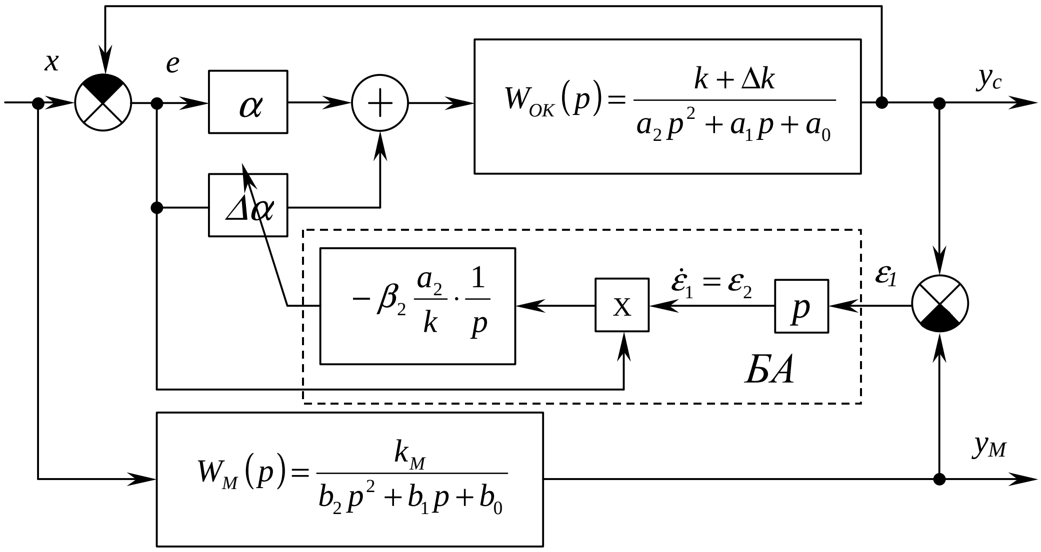


Рис. 4.3

4.2. Порядок виконання роботи

1. Розрахувати параметри настройки моделі для параметрів об’єкту та регулятора, заданих за варіантом, за формулами:

   $k_M = \alpha \cdot k$,

   $b_2 = a_2$,

   $b_1 = a_1$,

   $b_0 = a_0 + k \cdot \alpha = a_0 + k_M$.

2. Задати в програму параметри об’єкта керування (сталої складової коефіцієнту підсилення K, параметрів знаменника a_0, a_1, a_2), сталої складової коефіцієнту підсилення регулятора (α), згідно варіанту завдання. Задати параметри настройки моделі: коефіцієнт підсилення K_M та параметри знаменника b_0, b_1, b_2. Подати на вхід одиничний ступінчастий сигнал з амплітудою X=10.

   Відключити дію збурення на об’єкт ($\Delta K = 0$), а також відключити блок адаптації ($\beta_2=0$). Крок дискретності залишити рівним 0,01 ($\Delta T=0{,}01$), час спостереження встановити 5..25с з міркувань достатності для закінчення перехідного процесу (T=5..25).

   Ввімкнути показ графіків, натиснувши відповідну кнопку. Відмітити показ функцій: вхідного впливу X(t), виходів системи y_{1C} та моделі y_{1M}, сигналів похибки адаптації ε_1, ε_2, а також помилки системи e(t). Переконатися у відповідності сигналів виходу незбуреної системи та моделі. **Зняти знімок екрану.** Розрахувати усталену помилку замкненої системи та порівняти з результатами на графіку.

3. Задати дію збурення ΔK на об'єкт (за даними варіанту). **Дослідити вплив коефіцієнта передачі блоку адаптації** $\beta 2$ на похибку адаптації ε_1. Для цього виконати моделювання для 5-ти значень $\beta 2$, наприклад, для $\beta 2=0$; 0,1; 0,5; 1; 10, **знімаючи знімки з програми** при ввімкненому показі функцій $X(t)$, y_{1C}, y_{1M}, ε_1 (5 знімків екрану).

   Увага. Після зміни певного параметра не забувати натискати кнопку оновлення графіків!

4. Визначити залежність похибки системи $e(t)$ від значення коефіцієнту передачі блока адаптації $\beta 2$ при постійності інших параметрів. Для цього виконати дослідження, аналогічні п.3: для заданого ΔK та $\beta 2=0$; 0,1; 0,5; 1; 10 зняти знімки з програми при ввімкненому показі функцій $X(t)$, y_{1C}, y_{1M}, $e(t)$ (5 знімків екрану).

5. Відключити дію збурення на об'єкт ($\Delta K=0$) та блок адаптації ($\beta 2=0$). Дослідити залежність похибки адаптації системи ε_1 від невідповідності параметрів об'єкта та моделі: a_2 та b_2, a_1 та b_1, a_0 та b_0 при інших однакових умовах. Для цього задавати почергово значення коефіцієнтів моделі (b_0, b_1 та b_2 змінювати окремо!), менші та більші від розрахованих значень, **виконуючи знімки з програми** (увімкнути показ функцій $X(t)$, y_{1C}, y_{1M}, ε_1):
   5.1. Задати $b_2 = a_2 \pm ½(a_2)$ (Два знімки).
   5.2. Задати $b_1 = a_1 \pm ½(a_1)$ (Два знімки).
   5.3. Задати $b_0 = (a_0 + K\cdot\alpha) \pm ½(a_0 + K\cdot\alpha) = (a_0 + K_M) \pm ½(a_0 + K_M)$ (Два знімки).

   Увага. Переходячи до дослідження впливу невідповідності іншого параметра, попередній параметр моделі необхідно повернути в правильне значення, що відповідає параметрам оптимальної настройки моделі.

6. Зробити висновки за результатами.

4.3. Зміст звіту

В звіті необхідно навести:
1. Короткі теоретичні відомості.
2. Структурну схему системи керування.
3. Вихідні дані, задані за варіантом.
4. Розрахунок параметрів налаштування моделі.
5. Знімки екрану (17 знімків).
6. Висновки по роботі. У висновках проаналізувати вплив зміни коефіцієнта адаптації $\beta 2$ на похибку адаптації, розбіжність сигналів виходу системи та моделі, сигнал помилки системи; також проаналізувати вплив відмінностей в коефіцієнтах налагодження моделі на появу відмінного від нуля значення та характер сигналу похибки адаптації (пояснити причину появи сталої складової при розбіжності за параметром b_0).

4.4. Контрольні питання

1. Що таке адаптивна система керування?
2. Які види адаптивних САК ви знаєте?
3. Навіщо потрібна еталонна модель?
4. Чим визначається структура (передатна функція, її порядок) еталонної моделі?
5. З яких міркувань визначаються параметри налагодження еталонної моделі?
6. В чому полягає методика синтезу блоку адаптації?
7. Чому дорівнює величина $\Delta\alpha$ (Δk) при відсутності дії збурення?
8. Яку частину досліджуваної САК відтворює (моделює) еталонна модель?
9. Сформулюйте правило стійкості систем за Ляпуновим?
10. Що таке додатно-визначена квадратична форма?

Перелік використаної літератури

1. Тютюнник А.Г. Оптимальні і адаптивні системи автоматичного керування / А.Г. Тютюнник. – Житомир: ЖІТІ, 1998. – 512 с.
2. Тютюнник А.Г. Оптимальні і адаптивні системи автоматичного керування. Практикум / А.Г. Тютюнник. – Житомир: ЖІТІ, 2002. – 420 с.
3. Куропаткин П.В. Оптимальные и адаптивные системы. Учеб. пособие для ВУЗов / П.В. Куропаткин. – М.: В.Ш., 1980. – 287 с.
4. Чураков Е.П. Оптимальные и адаптивные системы. Учеб пос. Для ВУЗов / Е.П. Чураков – М.: Енергоиздат, 1987. – 225 с.
5. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы. Учеб пос. Для ВУЗов / А.Г. Александров. – М.: В.Ш., 1989. – 262 с.
6. Иванов В.А. Теория оптимальных САУ. Учеб. Пос. Для ВУЗов / В.А. Иванов, Н.В. Фалдин. – М.: Наука, 1981. – 331 с.
7. Сборник задач и примеров по ТАУ (оптимальное, экстремальное и программное управление) / под ред. А.Ф. Фатеева. – М.: В.Ш., 1969. – 198 с.
8. Олейников В.А. Основы оптимального и экстремального управления / В.А. Олейников, Н.С. Зотов, А.М. Пришвин. – М.: В.Ш., 1969. – 295 с.
9. Казакевич В.В. Системы автоматической оптимизации / В.В. Казакевич, А.Б. Родов. – М.: Енергия, 1977. – 287 с.
10. Александровский Н.М. Адаптивные САУ сложными технологическими процессами / Н.М. Александровский, С.В. Егоров, Р.Е. Кузин. – М.: Энергия, 1973. – 271 с.
11. Справочник по ТАУ / под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 700 с.