§ 2. Диференціальні рівняння вищих порядків.

1. Основні поняття.

Диференціальним рівнянням n-го порядку називається рівняння виду

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

або

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

якщо воно розв'язане відносно старшої похідної $y^{(n)}$.

Будемо розглядати тільки такі рівняння вищих порядків, які можна розв'язати відносно $y^{(n)}$. Для рівняння (2) має місце теорема Коші.

Теорема Коші (про існування і єдиність розв'язку). Якщо в диференціальному рівнянні (2) функція $f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$ і її частинні похідні за аргументами $y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$ неперервні в деякій області Д, що містить точку $(x_0, y_0, y_0', y_0'', ..., y_0^{(n-1)})$, то рівняння має єдиний розв'язок $y = y(x)$,
що задовольняє початковим умовам

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\ \ y'\big|_{x=x_0} = y'_0,\ \ ...,\ \ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \qquad (3)$$

Задача Коші для диференціального рівняння n-го порядку полягає в тому, щоб знайти розв'язок y = y(x диференціального рівняння (1) чи (2), який задовольняє початковим умовам (3).

Якщо розглядати рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y') \qquad (4)$$

то початкові умови розв'язку $y = y(x)$ слідуючи:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0 \qquad (5)$$

Єдиність розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння (4) з початковими умовами (5) треба розуміти так, що через задану точку площини $(x_0;\ y_0)$ проходить єдина інтегральна крива цього рівняння, дотична до якої в точці $(x_0;\ y_0)$ складає з додатнім напрямом осі 0х кут α_0, тангенс якого $tg\alpha_0 = y'_0$. Таким чином, існує нескінченна множина інтегральних кривих рівняння (4), що проходить через точку $(x_0;\ y_0)$, і тільки одна з них нахилена до осі 0х під кутом, тангенс якого дорівнює заданому числу y'_0.

Означення 1. Загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку називається функція

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n), \qquad (6)$$

яка залежить від n довільних сталих і задовольняє умовам:

1) вона є розв'язком рівняння (2) при будь-яких допустимих значеннях сталих $C_1, C_2, ..., C_n$;

2) які б початкові умови (3) не були задані, можна знайти такі значення сталих $C_i(i = 1, 2, ..., n)$, при яких ці умови будуть задовільнені, тобто

$\varphi(x_0, C_{10}, C_{20}, ..., C_{n0}) = y_0$, $\varphi'(x_0, C_{10}, C_{20}, ..., C_{n0}) = y'_0$, ...,
$\varphi^{(n-1)}(x_0, C_{10}, C_{20}, ..., C_{n0}) = y_0^{(n-1)}$.

Загальний розв'язок, отриманий в неявній формі:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0,$$

називається загальним інтегралом диференціального рівняння (2).

Розв'язок, який отримали з загального розв'язку (6) при конкретних значеннях сталих C_i, називається частинним розв'язком диференціального рівняння (2).

2. Рівняння виду $y^{(n)} = f(x)$.

Загальний розв'язок рівняння $y^{(n)} = f(x)$ шукаємо шляхом послідовного інтегрування

$$y^{(n-1)} = \int y^{(n)}dx + C_1 = \int f(x)dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int (\int f(x)dx + C_1)dx + C_2,$$

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' = 1 - \frac{3}{x^3} + 4\cos 2x$$

Інтегруючи послідовно, маємо:

$$y'' = \int\left(1 - \frac{3}{x^3} + 4\cos 2x\right)dx = \int dx - 3\int x^{-3}dx + 4\int \cos 2x dx = x + \frac{3}{2x^2} +$$
$$+ 2\sin 2x + C_1,$$

$$y' = \int\left(x + \frac{3}{2x^2} + 2\sin 2x + C_1\right)dx = \int xdx + \frac{3}{2}\int x^{-2}dx + 2\int \sin 2xdx +$$
$$+ C_1\int dx = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2x} - \cos 2x + C_1x + C_2,$$

$$y = \int\left(\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2x} - \cos 2x + C_1x + C_2\right)dx = \frac{1}{2}\int x^2dx - \frac{3}{2}\int\frac{dx}{x} - \int \cos 2xdx +$$

$$+C_1\int x dx + C_2\int dx = \frac{x^2}{6} - \frac{3}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$$

загальний розв'язок заданого рівняння

3. <u>Частинні випадки диференціальних рівнянь другого порядку.</u>

1) Рівняння виду

$$y'' = f(x, y') \qquad (1)$$

Права частина цього рівняння не містить шуканої функції y.

За допомогою підстановки $y' = p(x)$ зводиться до рівняння першого порядку:

$$p' = f(x, p)$$

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y'' + \frac{y'}{x} = x$

Маємо диференціальне рівняння виду $y'' = f(x, y')$, яке не містить y.

Нехай $y' = p(x)$. Тоді $y'' = p'(x)$.

Отже, після заміни рівняння перетворилось у диференціальне рівняння першого порядку: $p' + \frac{1}{x}\cdot p = x$.

Це лінійне диференціальне рівняння. Розв'язуємо його вже відомим методом.

Покладаючи $p = uv$, знаходимо $p' = u'v + uv'$. Дістаємо

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = x,$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{1}{x}v\right) = x,$$

$$\begin{cases} v' + \frac{1}{x}v = 0, \\ u'v = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \\ \frac{du}{dx}v = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x}, \\ \frac{du}{dx}v = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln|v| = -\ln|x|, \\ \frac{du}{dx}v = x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{1}{x}, \\ \frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{x} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{1}{x}, \\ \int du = \int x^2 dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{1}{x}, \\ u = \frac{x^3}{3} + C_1. \end{cases}$$

Виходить $p = uv = \left(\frac{x^3}{3} + C_1\right)\frac{1}{x} = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}$,

$$y' = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x},$$

звідки $y = \int\left(\frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}\right)dx = \frac{x^3}{9} + C_1\ln|x| + C_2$ – загальний розв'язок заданого в умові диференціального рівняння.

2) Рівняння виду

$$y'' = f(y, y') \qquad (2)$$

Права частина цього рівняння не містить явно незалежну змінну x. Зводиться до рівняння першого порядку за допомогою підстановки $y' = p(y)$, де, на відміну від переднього випадку, p вважається функцією від y. Тоді, використовуючи правило диференціювання складної функції, дістаємо $y'' = p_y' \cdot y_x' = p'p$. Рівняння (2) матиме вигляд $p'p = f(y, p)$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $2yy'' + (y')^2 = 0$.

Маємо диференціальне рівняння виду $y'' = f(y, y')$, яке не містить явно x.

Нехай $y' = p(y)$. Тоді $y'' = p'p$. Отже, маємо $2yp'p + p^2 = 0$ – диференціальне рівняння першого порядку відносно p з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні і проінтегруємо:

$$2y \cdot \frac{dp}{dy} \cdot p = -p^2,$$

$$2ydp = -pdy, \quad p \neq 0$$

$$\int\frac{dp}{p} = -\frac{1}{2}\int\frac{dy}{y} + \ln|C_1|,$$

$$\ln|p| = -\frac{1}{2}\ln|y| + \ln|C_1|,$$

$$\ln|p| = \ln\left|\frac{C_1}{\sqrt{y}}\right|,$$

$$p = \frac{C_1}{\sqrt{y}}.$$

Підставляючи замість p його значення, матимемо

$$y' = \frac{C_1}{\sqrt{y}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}},$$

$$\int \sqrt{y}dy = \int C_1 dx$$

$$\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} = C_1 x + C_2$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{9(C_1 x + C_2)}{4}}$$ – загальний розв'язок заданого рівняння.

Досліджуємо розв'язок p = 0: $p = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow y = C.$

Розв'язок y = C не є особливим, тому що отримується з загального при $C_1 = 0$.

5. Лінійні однорідні диференціальні рівняння (ЛОДР) другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Рівняння виду

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (1)$$

де p, q – дійсні числа, називаються ЛОДР другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Загальний розв'язок рівняння (1) внаслідок теореми 2 п.4 матиме структуру $y = C_1y_1 + C_2y_2$, де y_1, y_2 – фундаментальна система розв'язків, т. б. частинні розв'язки рівняння (1), для яких вронскіан $W[y_1, y_2] \neq 0$, $\forall x \in R$.

Будемо шукати частинні розв'язки рівняння (1) у вигляді $y = e^{kx}$, де k – стале число, вибір якого означимо нижче.

Підставляючи функцію $y = e^{kx}$ і її похідні $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$ в ліву частину рівняння (1), дістаємо

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0,$$

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то функція $y = e^{kx}$ буде розв'язком рівняння (1) тоді і тільки тоді, коли $k^2 + pk + q = 0$ (2)

Для невідомого коефіцієнта k отримали квадратне рівняння (2), яке називається характеристичним рівнянням рівняння (1). Зауважимо, що характеристичне рівняння складається з даного рівняння (1) шляхом заміни y'', y', y відповідно на k^2, k, 1.

Розв'язуючи рівняння (2), знаходимо його корені k_1 і k_2

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \qquad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

від яких залежить загальний розв'язок ЛОДР (1).

Можливі такі випадки:

I. k_1 і k_2 – дійсні і різні числа ($k_1 \neq k_2$);
II. k_1 і k_2 – дійсні рівні ($k_1 = k_2$);
III. k_1 і k_2 – комплексні числа ($k_{1,2} = \alpha \pm \beta_i$).

Розглянемо кожен випадок окремо.

Випадок I. Корені характеристичного рівняння дійсні і різні ($k_1 \neq k_2$).

Оскільки розв'язок рівняння (1) ми шукали у вигляді $y = e^{kx}$, то частинні розв'язки рівняння (1) будуть мати вигляд

$$y_1 = e^{k_1 x}, \qquad y_2 = e^{k_2 x},$$

Визначник Вронського $W[y_1, y_2] \neq 0$ для $\forall x \in R$, при $k_1 \neq k_2$. А це означає, що функції y_1 і y_2 лінійно незалежні і утворюють фундаментальну систему розв'язків ЛОДР (1). Отже, загальний розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \tag{3}$$

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

Маємо ЛОДР II-го порядку із сталими коефіцієнтами. Запишемо характеристичне рівняння

$$k^2 - 2k - 3 = 0.$$

За теоремою Вієта його корені

$$k_1 = -1,\ k_2 = 3 \text{ – дійсні і різні.}$$

Тому загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

Випадок II. Корені характеристичного рівняння дійсні і різні ($k_1 = k_2$).
Один частинний розв'язок рівняння (1) відомий

$$y_1 = e^{k_1 x}$$

Необхідно знайти другий частинний розв'язок, який утворює з даним фундаментальну систему розв'язків.

Будемо шукати другий частинний розв'язок у вигляді $y_2 = u(x)e^{k_1 x}$, де $u(x)$ – невідома функція.
Знаходимо похідні

$$y_2' = u'(x)e^{k_1 x} + k_1 u(x)e^{k_1 x},$$

$$y_2'' = u''(x)e^{k_1 x} + 2k_1 u'(x)e^{k_1 x} + k_1^2 u(x)e^{k_1 x}.$$

Підставляючи функцію y_2 і її похідні y_2', y_2'' в ліву частину рівняння (1), дістаємо

$$u''(x)e^{k_1x} + 2k_1u'(x)e^{k_1x} + k_1^2u(x)e^{k_1x} + pu'(x)e^{k_1x} + pk_1u(x)e^{k_1x} +$$
$$+ qu(x)e^{k_1x} = 0,$$
$$e^{k_1x}(u''(x) + (2k_1 + p)u'(x) + (k_1^2 + pk_1 + q)u(x)) = 0.$$

Оскільки k_1 – корінь характеристичного рівняння (2), то

$$k_1^2 + p\,k_1 + q = 0.$$

Крім того, $k_1 = k_2 = -\dfrac{p}{2} \Rightarrow 2k_2 + p = 0.$

Маємо $e^{k_1x}u''(x) = 0,$

$$e^{k_1x} \neq 0, \quad u''(x) = 0,$$

Інтегруючи, отримаємо $u(x) = Ax + B$.

Нехай $A = 1$, $B = 0$, тоді $u(x) = x$, $y_2 = xe^{k_1x}$

Отже, загальний розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x} = e^{k_1x}(C_1 + C_2x) \qquad (4)$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 6y' + 9y = 0.$$

Маємо ЛОДР II-го порядку із сталими коефіцієнтами. Запишемо характеристичне рівняння

$$k^2 + 6k + 9 = 0.$$

Його корені $k_1 = k_2 = -3$ (дійсні і рівні)

Тому, за формулою (4) загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = e^{-3x}(C_1 + C_2x)$$

<u>Випадок III.</u> Корені характеристичного рівняння комплексні.

Позначимо комплексно-спряжені корені характеристичного рівняння через

$$k_1 = \alpha + \beta\cdot i \quad і \quad k_2 = \alpha - \beta\cdot i.$$

У такому випадку частинні розв'язки рівняння (1) мають вигляд

$$y_1 = e^{(\alpha+\beta\cdot i)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha-\beta\cdot i)x}$$

Це – комплексні функції дійсної змінної x.

Використовуючи формулу Ейлера, запишемо отримані частинні розв'язки у вигляді

$$y_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x), \quad y_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

Для того, щоб замінити комплексні частинні розв'язки дійсними, розглянемо функції

$$\tilde{y}_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad \tilde{y}_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i}$$

Вони є розв'язками рівняння (1), тому що являють собою лінійні комбінації частинних розв'язків y_1 і y_2. Можна показати, що функції $\tilde{y}_1$ і $\tilde{y}_2$ утворюють фундаментальну систему розв'язків, тобто $W[\tilde{y}_1, \tilde{y}_2] \neq 0, \ \forall x \in R$.

Нова фундаментальна система складається з дійсних функцій, а саме:

$$\tilde{y}_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad \tilde{y}_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Тому, якщо корені характеристичного рівняння комплексні:
$k_{1,2} = \alpha \pm \beta \cdot i$, то загальний розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x \tag{5}$$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

Маємо ЛОДР II-го порядку із сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння

$$k^2 - 4k + 5 = 0 \qquad (Д = 16 - 20 = -4 < 0)$$

має два комплексно-спряжених корені $k_1 = 2 + i$, $k_2 = 2 - i$ ($\alpha = 2$; $\beta = 1$). Отже, за формулою (5) загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{2x}\cos x + C_2 e^{2x}\sin x = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x).$$

Приклад 4. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y'' + 4y' + 29y = 0.$$

що задовольняє початкові умови

$$y\big|_{x=0} = 0, \qquad y'\big|_{x=0} = 15.$$

Спочатку знайдемо загальний розв'язок цього рівняння. Складемо характеристичне рівняння:

$$k^2 + 4k + 29 = 0.$$

$Д = 16 - 116 = -100 < 0 \Rightarrow$ корені комплексні $k_1 = -2 + 5i$,
$k_2 = -2 - 5i$ ($\alpha = -2$; $\beta = 5$).

Загальний розв´язок рівняння, згідно з формулою (5), має вигляд

$$y = C_1 e^{-2x}\cos 5x + C_2 e^{-2x}\sin 5x = e^{-2x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x).$$

Тепер використаємо початкові умови для знаходження C_1 і C_2. Підставляючи ці початкові умови у загальний розв'язок і його похідну

$$y' = (e^{-2x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x))' = -2e^{-2x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x) +$$
$$+ e^{-2x}\times(-5C_1\sin 5x + 5C_2\cos 5x) = e^{-2x}((-2C_1 + 5C_2)\cos 5x +$$
$$+ (-2C_2 - 5C_1)\sin 5x)$$

дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 0 = e^0(C_1\cos 0 + C_2\sin 0) \\ 15 = e^0((-2C_1 + 5C_2)\cos 0 + (-2C_2 - 5C_1)\sin 0) \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ -2C_1 + 5C_2 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 3. \end{cases}$$

Розв'язок системи: $C_1 = 0$, $C_2 = 3$

Підставляючи значення довільних сталих C_1 і C_2 у загальний розв'язок, дістанемо шуканий частинний розв'язок

$$y = 3e^{-2x}\sin 5x.$$