МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

ЖИТОМИРСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Оптимізаційні методи та моделі.

Конспект лекцій

Житомир 2016

УДК 330.43(075)
ББК 65в6я73

Автори:
В. М. Бондарчук, С. П Давидчук

Рецензенти:
С. П. Семенець, доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри методики навчання математики, фізики та інформатики ЖДУ ім. І. Я. Франка.
О. А. Сарана, кандидат фізико-математичних наук доцент кафедри математичного аналізу ЖДУ ім. І. Я. Франка.

Рекомендовано вченою радою факультету ФІМ як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів.
Протокол № 11 від 22.06.2016 р.

Оптимізаційні методи та моделі. Конспект лекцій для студентів денної та заочної форми навчання./ В. М. Бондарчук, С. П. Давидчук. –Житомир: ЖДТУ, 2016.- 104 с.

У посібнику розглянуто фундаментальні засади економіко-математичного моделювання. Запропоновані авторами теоретичні засади та практичні економетричні аспекти дозволять студентам моделювати різноманітні аспекти господарської діяльності, засновуючись на сучасних методах системного та економетричного аналізу, а також комп’ютерних технологіях. Автори посібника показали перспективи застосування економетричного моделювання, що уможливлює отримання якісно нових результатів управління.
Посібник розроблено згідно з навчальною програмою МОНУ з дисципліни "Економетрія".

УДК 330.43(075)
ББК 65в6я73

1.Вступ

В наш час тверезого прагматизму, коли перш за все цінується досягнення максимального результату, в умовах жорсткої конкуренції для забезпечення нормального функціонування будь-якої економічної системи, всі дії по її керуванню мають бути найоптимальнішими, найефективнішими. Їх не можливо визначити без застосування точних методів кількісного аналізу, використання найновіших досягнень математики та сучасної обчислювальної техніки, без вивчення вже достатньо накопиченого досвіду постановки і розв'язання економічних задач за допомогою математичних методів оптимального планування. Останні і складають сутність курсу "оптимізаційні методи та моделі".

«Оптимізаційні методи та моделі»– це розділ прикладної математики, який вивчає оптимізаційні (екстремальні) задачі, розробляє методи їх розв'язування, та досліджує отримані розв'язки.

Екстремальними називаються задачі пошуку екстремуму функції $F(x_1; x_2; \ldots, x_n)$ на певній множині D n-вимірного евклідового простору. Характерною особливістю задачі математичного програмування є те, що оптимальне значення (екстремум) числової функції F, як правило, досягається на межі множини D, тому при розв'язанні таких задач використати відомі класичні методи пошуку екстремуму функції неможливо.

Суть будь-якої практичної економічної задачі полягає в оцінюванні можливих альтернатив функціонування і розвитку певної системи та у виборі такої, що забезпечить максимальний економічний ефект.

Для їх розв'язання необхідно скласти математичну модель задачі, і вже потім, абстрагувавшись, розв'язати її одним із придатних для цього методів.

Починається процес моделювання із введення незалежних змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, , які визначатимуть дії по керуванню певною економічною структурою, тобто набір значень цих змінних буде планом її функціонування. Числові значення введених змінних можуть означати кількість продукції певного виду, що буде вироблятись, кількість робітників, що буде задіяна для певного виробництва, величину площ, які будуть засіяні певними культурами і т. д.

Розрізняють два види незалежних змінних: некеровані, значення яких не залежать від волі людей і визначаються зовнішнім середовищем; керовані, значення яких можна змінювати в деякому інтервалі.

Можливості вибору значень керованих змінних завжди обмежені зовнішніми щодо системи умовами, параметрами виробничо-економічної системи і т. ін.

Наприклад, кількість продукції, що випускається обмежена наявними ресурсами, продуктивністю станків та кількістю працівників; кількість верстатів, що планує задіяти підприємство обмежена виробничими площами; кількість ресурсу чи товару, що перевозиться від баз до пунктів переробки чи споживання обмежена запасами баз та потребами замовника і т. д.

Отже, наступним кроком складання математичної моделі задачі є запис у вигляді кількісних співвідношень обмежень, яким підлягають введені керовані змінні.

Слід відзначити, що в курсі математичного програмування розглядаються саме такі екстремальні задачі, в яких умови, що накладаються на змінні, задаються рівняннями та нерівностями.

І нарешті, так як кожна економічна система має певну мету (ціль) розвитку та функціонування, ще один етап моделювання задачі – побудова цільової функції (функції мети) – такої числової характеристики, більшому (або меншому) значенню якої відповідає найкраща ситуація з точки зору рішення, що приймається.

Тобто, встановлюється залежність між величиною, якою вимірюється ступінь досягнення мети і незалежними змінними $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Введемо позначення цільової функції

$$F = F(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Отже, задача математичного програмування включає в себе три основних елемента:

а) незалежні керовані змінні, значення яких визначають певний план дій;

б) обмеження, які повинні задовольняти змінні;

в) цільова функція, яка підлягає оптимізації.

Розв'язати задачу означає серед усіх наборів змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які задовольняють усі обмеження, знайти такий, при якому цільова функція F прийме своє екстремальне значення.

Розглянемо на прикладах як складається математична модель задачі.

Приклад 1. Продукцією міськмолзаводу є молоко, кефір та сметана, що розфасовується в поліетиленові пакети. На виробництво 1 т молока, кефіру і сметани необхідно відповідно 1010, 1010 і 9450 кг необробленого молока. При цьому затрати робочого часу при розливі 1 т молока та кефіру складають 0,18 та 0,19 машино-год. відповідно. При розфасовці 1 т сметани зайняті спеціальні автомати на протязі 3,25 год. Всього для виробництва цільномолочної продукції завод може використовувати 13600 кг необробленого молока на добу. Основне обладнання може бути задіяне щодоби на протязі 32,4 машино-год, а автомати по розфасовці сметани – на протязі 16,25 год. Прибуток від реалізації 1 т молока, кефіру та сметани складає 30,22 та 136 грн. відповідно. Завод щодня повинен виробляти не менш ніж 100 т розфасованого молока. На виробництво іншої продукції не має ніяких обмежень.

Потрібно визначити, яку продукцію і в якій кількості слід кожного дня виробляти заводу, щоб прибуток від її реалізації був максимальний.

Складемо математичну модель задачі.

Очевидно, що визначатимуть план виробництва – кількості продукції, що будуть вироблятися. Тому I етап складання моделі – введення керованих змінних буде такий: нехай завод буде щоденно випускати x_1 тонн молока, x_2 тонн кефіру та x_3 тонн сметани. Наступний етап – запис обмежень, які накладаються на введені змінні.

На виготовлення x_1 т молока необхідно $1010 \cdot x_1$ т необробленого молока, на x_2 т кефіру $1010 \cdot x_2$ і на x_3 т сметани $9450 \cdot x_3$ т молока. Так як завод може використовувати щодня не більше 136000 кг молока, то повинна виконуватись нерівність:

$$1010x_1 + 1010x_2 + 9450x_3 \le 13600.$$

Аналогічні міркування, проведені відносно можливого використання ліній розливу цільномолочної продукції та автоматів по розфасовці сметани, вимагають записати наступні нерівності:

$$0{,}18x_1 + 0{,}19x_2 \le 21{,}4$$

$$3{,}25x_3 \le 16{,}25.$$

Так як щодня повинно вироблятися не менше 100 т молока, то $x_1 \ge 100$. Крім цього по своєму змісту введені змінні не можуть приймати від’ємних значень.

I на кінець, так як мета виробництва отримати максимальний прибуток, позначимо через цільову функцію F - сумарний прибуток від реалізації x_1 т молока, x_2 т кефіру та x_3 сметани. Очевидно, що

$$F = 30x_1 + 22x_2 + 136x_3.$$

Таким чином ми отримали наступну математичну задачу: дано систему

$$\begin{cases} 1010x_1 + 1010x_2 + 9450x_3 \le 13600 \\ 0{,}18x_1 + 0{,}19x_2 \le 21{,}4 \\ 3{,}25x_3 \le 16{,}25 \\ x_1 \ge 100 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases} \qquad (1)$$

і функцію

$$F = 30x_1 + 22x_2 + 136x_3. \qquad (2)$$

Необхідно серед всіх розв’язків системи (1) знайти такий, при якому функція (2) прийме своє максимальне значення.

Приклад 2. На двох базах A_1 та A_2 знаходяться відповідно 100 та 200 т деякої однорідної сировини. Її необхідно перевезти в пункти призначення B_1, B_2, B_3 у кількості 150, 70 та 80 т відповідно. Затрати на перевезення одиниці сировини від бази A_1 до пунктів B_1, B_2 та B_3 складають 10, 12 та 14 грошових одиниць, від бази A_2 відповідно 15, 13 та 20 грошових одиниць. Скласти такий план перевезень при якому сумарні затрати будуть мінімальними. Складемо математичну модель задачі. Нехай від бази A_i до пункту B_j - будемо перевозити x_{ij} т сировини $(i=1,2;\ j=1,2,3)$.

Запишемо обмеження, що накладаються на введені змінні. Так як на базі A_1 є 100 т сировини, то $x_{11}+x_{12}+x_{13}=100$. Аналогічно для бази A_2: $x_{21}+x_{22}+x_{23}=200$. До пункту B_1 повинно бути завезено 150 т сировини. Тому наступна умова $x_{11}+x_{21}=150$. Аналогічно для пунктів B_2 та B_3: $x_{12}+x_{22}=70$, $x_{13}+x_{23}=80$. І знову ж таки, так як значення змінних – кількість, то $x_{ij}\ge 0\ (i=1,2;\ j=1,2,3)$.

Так як мета перевезення – мінімальні затрати, введемо як цільову функцію F - сумарні затрати на перевезення. Очевидно, що

$$F=10x_{11}+12x_{12}+14x_{13}+15x_{21}+13x_{22}+20x_{23}.$$

Отже отримали математичну задачу:

Серед усіх розв’язків системи

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=100 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=200 \\ x_{11}+x_{21}=150 \\ x_{12}+x_{22}=70 \\ x_{13}+x_{23}=80 \\ x_{ij}\ge 0\ (i=1,2;\ j=1,2,3) \end{cases}.$$

Знайти такий, при якому функція

$$F=10x_{11}+12x_{12}+14x_{13}+15x_{21}+13x_{22}+20x_{23}.$$

прийме своє найменше значення.

В залежності від того який вигляд мають цільова функція і система обмежень задачі поділяють на класи, а сам курс математичного програмування на розділи. Перерахуємо основні з них.

<u>Лінійне програмування</u> – розділ математичного програмування, що вивчає методи розв’язання екстремальних задач у випадку, коли функція цілі -- лінійна, тобто виду

$$F=C_0+C_1x_1+C_2x_2+\ldots+C_nx_n,$$

а обмеження на змінні задається системою лінійних рівнянь та нерівностей.

Нелінійне програмування – розглядає випадки, коли цільова функція чи обмеження нелінійні. Підрозділами нелінійного програмування є ***квадратичне програмування*** – вивчає задачі; в яких цільова функція квадратична, а обмеження – лінійні рівняння та нерівності; опукле програмування – розглядає задачі на знаходження мінімуму цільової функції, що є випуклою у випадку коли множина, що є розв'язком системи обмежень – опукла множина.

Важливим розділом математичного програмування є ***цілочисельне програмування*** – охоплює клас задач, в яких на змінні накладається умова цілочисельності.

Тип задач, знаходження розв'язку яких включає в себе декілька етапів чи кроків, на кожному з яких розв'язується деяка частинна задача, зумовлена вхідною розглядається в розділі ***динамічне програмування***.

В кінці цього розділу зауважимо, що назва "математичне програмування" – пов'язана з тим, що метою розв'язання змодельованих задач є вибір *програми* дій.

2. Лінійне програмування

Найбільше вивченими та дослідженими є задачі лінійного програмування. Тому найдетальніше розглянемо саме цей вид задач. Загальна задача лінійного програмування подається у вигляді:

знайти максимум (мінімум) функції

$$F = C_0 + C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n \tag{2.1}$$

або

$$F = C_0 + C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n \to \max(\min)$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{\le, \ge, =\} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{\le, \ge, =\} b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \{\le, \ge, =\} b_k \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\text{і } x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0\ . \tag{2.3}$$

Тобто, необхідно серед усіх наборів значень змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що задовольняють умови (2.2) і (2.3) знайти такий, при якому цільова функція F прийме своє максимальне (мінімальне) значення.

На місці виразу $\{\le, \ge, =\}$ може стояти один із трьох записаних в дужках знаків.

Значення змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можна розглядати як координати точки в просторі R^n. Точка $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ простору R^n, координати якої задовольняють умови (2.2) та (2.3) називають допустимим розв'язком задачі. Сукупність усіх допустимих розв'язків утворює область (множину) допустимих розв'язків задачі.

Розглянемо ряд властивостей задачі лінійного програмування.

1. Задача знаходження максимуму цільової функції F (2.1) еквівалентна задачі знаходження мінімуму функції $(-F)$, причому

$$\max F = -\min(-F).$$

Наприклад:

$$F = 3x_1 - 2x_2 \to \max \Leftrightarrow F^* = -F = -3x_1 + 2x_2 \to \min .$$

2. Обмеження у вигляді нерівності із знаком "$\geq$" можна подати у вигляді нерівності із знаком "$\leq$", помноживши обидві частини нерівності на –1.

Наприклад:

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq 6 \Leftrightarrow -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq -6 .$$

3. Обмеження у вигляді нерівності можна подати у вигляді рівності, ввівши додаткову невід'ємну змінну

Наприклад:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 \geq 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}.$$

4. Обмеження у вигляді рівності можна замінити системою двох відповідних нерівностей із знаком "$\leq$" та "$\geq$".

Наприклад:

$$4x_1 + 2x_2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 3 \end{cases}.$$

5. Якщо на якусь змінну x_i не накладаємо умову невід'ємності вона подається у вигляді різниці двох додаткових невід'ємних змінних $x_i = x_i' - x_i''$, $x_i' \geq 0$, $x_i'' \geq 0$.

Наприклад:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3' - x_3'' = 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3' \geq 0,\ x_3'' \geq 0. \end{cases}$$

Отже одну й ту ж задачу лінійного програмування можна записати у різних формах.

Вважатимемо, що задача записана в канонічній формі, якщо вона формулюється так:

знайти максимум функції:

$$F = C_0 + C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n \to \max$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0\ ,$$

де a_{ij}, b_i, c_j - задані постійні величини, причому $b_i \ge 0$.

Використовуючи перелічені властивості, будь-яку задачу ЛП можна записати в канонічному вигляд.

Наприклад. Записати в канонічній формі задану задачу ЛП:

$$F = 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 \to \min$$

за умов

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -10 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 110 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 90 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0\ .$$

Нехай $F^* = -F$.

Помножимо перше рівняння на (–1) і введемо відповідно допоміжні невід'ємні змінні x_4 та x_5 для другого та третього обмеження. Отримали задану задачу в канонічній формі:

$$F^* = -3x_1 - 4x_2 + 3x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 10 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 110 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 - x_5 = 90 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0\ .$$

2.1. Графічний метод розв'язування задач ЛП.

Найпростішим методом розв'язування задач ЛП є графічний, але його можна застосовувати лише у випадку, коли в математичну модель входять тільки дві змінні. І хоча такі задачі на практиці зустрічаються рідко (типова задача ЛП, як правило містить тисячі змінних), ідеї графічного методу розв'язування покладені в основу побудови загального методу розв'язування задачі ЛП.

Нехай необхідно знайти мінімум та максимум функції

$$F = C_1x_1 + C_2x_2 \rightarrow \max(\min) \qquad (2.4)$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 \le b_k \end{cases} \qquad (2.5)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\ . \qquad (2.6)$$

Нагадаємо, що знак " ≥" можна замінити на " ≤" шляхом домноження нерівності на "-1".

Ототожнимо кожну пару значень змінних x_1 і x_2 з точкою прямокутної декартової системи координат X_1OX_2 на площині з відповідними координатами.

Перший етап знаходження розв'язку – побудова множини допустимих розв'язків задачі, тобто області в системі координат X_1OX_2, координати всіх точок якої (і тільки їх) задовольняють обмеження (2.5) та (2.6).

Геометричним місцем точок, координати яких задовольняють умову $ax_1 + bx_2 = c$ є пряма. Для побудови цієї прямої досить знайти дві точки, що їй належать. Для цього надають два рази довільне значення одній із змінних і визначають з рівняння прямої значення другої змінної. Пряма розбиває всю координатну площину на дві півплощини, причому для координат точок однієї з них виконується умова $ax_1 + bx_2 < C$, а для другої $ax_1 + bx_2 > C$. Отже множиною розв'язків обмеження $ax_1 + bx_2 \le C$ будуть точки прямої $ax_1 + bx_2 = C$ і точки тієї (однієї з двох півплощин відносно прямої $ax_1 + bx_2 = C$, координати якої задовольняють умову $ax_1 + bx_2 < C$. Для її визначення досить підставити координати однієї будь-якої точки, що не належить прямій в задану нерівність. Якщо нерівність виконується, то півплощина, що містить цю точку є розв'язком, якщо ні - то інша. На рисунку будемо позначати вибрану півплощину частковою штриховою.

Отже, розв'язком системи обмежень (2.5), (2.6) буде перетин (спільна частина) півплощин, що відповідають відповідними нерівностями. Це може бути опуклий обмежений чи необмежений многокутник, вироджений многокутник – точка, відрізок, промінь, або взагалі порожня множина.

Після знаходження множини допустимих розв'язків переходять до наступного етапу розв'язання задачі – знаходження екстремального значення F.

Геометричне місце точок в яких лінійна функція (2.4) набуває фіксованого значення α є прямою лінією, що визначається рівнянням $c_1x_1 + c_2x_2 = \alpha$, яку ще називають лінією рівня. Надаючи параметру α всіх можливих значень від $-\infty$ до $+\infty$, отримуємо сімейство паралельних прямих, які займуть всю площину. Всі ці прямі перпендикулярні до нормального вектора, який співпадає із градієнтом функції F, що визначає напрям її найшвидшого зростання, $\overrightarrow{N} = \overline{\text{grad}}\,F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}; \frac{\partial F}{\partial x_2}\right) = \left(\overline{c_1; c_2}\right)$. Тому перехід від однієї прямої сімейства до іншої у напрямку вектора $\overrightarrow{N}$ веде до збільшення значення лінійної функції, у протилежному (у напрямку антиградієнта $-\overrightarrow{N} = (-c_1; -c_2)$) – до його зменшення.

Для знаходження екстремального значення функції (2.4) будують одну з ліній рівня, як правило поклавши $\alpha = 0$, тобто пряму $c_1x_2 + c_2x_2 = 0$. Далі, переміщуючи її паралельно вздовж вектора $\overrightarrow{N}(c_1; c_2)$ чи, при потребі в напрямку $-\overrightarrow{N}(-c_1; -c_2)$ визначаємо положення коли лінія рівня буде опорною до області допустимих значень (пряма називається опорною до опуклої області, якщо область лежить по один бік прямої і пряма має з нею хоча б одну спільну точку). Очевидно, що якщо лінія рівня є опорною до області допустимих значень і ця область лежить в одній півплощині з вектором $\overrightarrow{N}$, то спільна точка прямої і області є точкою мінімуму, якщо в іншій, то максимуму. Щоб обчислити екстремальне значення функції F необхідно підставити координати точки екстремуму в (2.4).

Розглянемо застосування графічного методу на прикладі.

Графічним методом знайти максимум і мінімум функції

$$F = 5x_1 + 4x_2$$

за умов $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 24 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 + 4x_2 \ge 4 \end{cases}$.

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

<u>Розв'язання</u>. В системі координат x_1Ox_2 побудуємо область допустимих розв'язків, тобто множину точок, координати яких задовольняють систему нерівностей. Побудуємо півплощину - розв'язок першої нерівності $6x_1 + 4x_2 \le 24$. Для цього побудуємо пряму $6x_1 + 4x_2 = 24$. Нехай $x_1 = 0$, тоді $4x_2 = 24$, $x_2 = 6$. Якщо $x_2 = 0$, то $6x_1 = 24$, $x_1 = 4$. Отже, маємо дві точки, що належать шуканій прямій:

$(0; 6)$ і $(4; 0)$. Сполучивши їх по прямі й лінії отримуємо пряму $6x_1 + 4x_2 = 24$. Щоб визначити, точки якої півплощини відносно побудованої прямої задовольняють нерівність $6x_1 + 4x_2 \le 24$ підставимо в неї координати будь-якої однієї точки, що не належать прямій. Найзручніше вибрати точку $O(0; 0)$: $6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0 < 24$. Координати т. O задовольняють нерівність, отже саме півплощина, що містить т. O разом із прямою буде розв'язком нерівності $6x_1 + 4x_2 \le 24$. На рисунку позначимо півплощину частковою штриховою. Аналогічно знайдемо розв'язки інших нерівностей. Перетин (спільна частина) отриманих півплощин - чотирикутник $ABCD$ і буде шуканою областю допустимих розв'язків. Далі будуємо лінію рівняння $5x_1 + 4x_2 = 0$ і переміщуючи її паралельно вздовж нормального вектора $\vec{N}(5; 4)$ (напрямок зростання) відмічаємо першу і останню точки перетину з $ABCD$, в яких F прийме своє відповідно найменше і найбільше значення.

Найменше значення F приймає в т. $A(0; 1)$

$F_{\text{найм}} = 5 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 4$

Найбільше значення F приймає в т. $C(3; 1,5)$

$F_{\text{найб}} = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 1,5 = 21$

Для точного визначення координат, наприклад точки C необхідно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = 24 \\ x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

Так як т. C є перетином прямих $6x_1 + 4x_2 = 24$ і $x_1 + 2x_2 = 6$, то її координати мають задовольняти обидва рівняння.

Рис.2.1.

Відповідь: $F_{\text{найм}} = 4$ (при $x_1 = 0; x_2 = 1$);

$F_{\text{найм}} = 21$ (при $x_1 = 3; x_2 = 1,5$).

Можливий випадок, коли лінія рівня є опорною до області допустимих розв'язків, а їх спільна частина не точка, а відрізок або навіть промінь. В таких випадках F приймає своє екстремальне значення в усіх точках цього відрізка чи променя.

2.2. Симплексний метод

Нехай задано задачу ЛП в канонічній формі

$$F = C_0 + C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n \to \max \qquad (2.7.)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases} \qquad (2.8.)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\ , \qquad (2.9.)$$

Нехай ранг матриці системи (2.8.) рівний m, тобто система складається з m лінійно незалежних рівнянь (ні одне з них не є лінійною комбінацією інших). Тоді методом Жордана-Гауса послідовного виключення змінних можна виразити m змінних через інші $n-m$ змінні, тобто знайти загальний розв’язок системи (2.8.). Розглянемо цей процес на прикладі.

Приклад(1). Методом Жордана-Гауса знайти загальний розв’язок системи рівнянь.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 18x_4 + 2x_5 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 21x_4 + 4x_5 = 22 \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 43x_4 + 11x_5 = 38 \end{cases}$$

Виключимо x_1 з другого та третього рівняння. Для цього помножимо I рівняння на (-2) і додамо почленно до II-го, помножимо I рівняння на (-3) і додамо до III-го. Отримаємо систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 18x_4 + 2x_5 = -4 \\ \quad x_2 - 2x_3 + 15x_4 \qquad = 30 \\ \quad x_2 - x_3 + 11x_4 + 5x_5 = 50 \end{cases}$$

Тепер виключимо x_2 з I та III рівнянь. Для цього додамо почленно II-ге рівняння до I-го і віднімемо почленно від III-го II-ге рівняння. Отримуємо:

$$\begin{cases} x_1 + \qquad x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 26 \\ \quad x_2 - 2x_3 + 15x_4 \qquad = 30 \\ \qquad\qquad x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 20 \end{cases}$$

Виключимо x_3 з I-го та II-го рівнянь. Для цього помножимо III-тє рівняння на 2 і додамо до II-го, і віднімемо почленно від I-го рівняння III-тє. Отримуємо:

$$\begin{cases} x_1 + \qquad\quad x_4 - 3x_5 = 6 \\ \quad x_2 + \quad 7x_4 + 10x_5 = 70 \\ \qquad x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 20 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1 = 6 - x_4 + 3x_5 \\ x_2 = 70 - 7x_4 - 10x_5 \\ x_3 = 20 + 4x_4 - 5x_5 \end{cases} \qquad (2.10)$$

Система (2.10) є одним із загальних розв'язків системи. Змінні x_1, x_2, x_3, відносно цього розв'язку є базисними і складають його базис, а x_4, x_5 - вільними або небазисними. Зробивши базисними іншу трійку змінних отримаємо інший загальний розв'язок. Кількість різних наборів базисних змінних або базисів обмежена, так як обмежена кількість змінних. Зокрема, для заданої системи кількість загальних розв'язків із різними базисами $C_5^3 = 10$.

Введемо поняття **базисний розв'язок**. Якщо всім вільним змінним надати значення нуль, а значення базисних змінних обчислити з отриманого загального розв'язку, то отриманий набір значень змінних називається базисним розв'язком системи для відповідного базису.

Наприклад для розв'язку (2.10) покладемо $x_4 = 0;\ x_5 = 0.$ тоді $x_1 = 6,\ x_2 = 70,\ x_3 = 20.$ Базисний розв'язок $X = (6;\ 70;\ 20;\ 0;\ 0)$.

Якщо до системи, що розглянули додати умову невід'ємності змінних: $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$, $x_5 \ge 0$, то виключивши змінні x_1, x_2, x_3 із (2.10) отримаємо еквівалентну систему

$$\begin{cases} 6 - x_4 + 3x_5 \ge 0 \\ 70 - 7x_4 - 10x_5 \ge 0 \\ 20 + 4x_4 - 5x_5 \ge 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_4 - 3x_5 \le 6 \\ 7x_4 + 10x_5 \le 70 \\ -4x_4 + 5x_5 \le 20 \end{cases}$$
$$x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0 \qquad\qquad x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0$$

Розв'язок цієї системи – деякий многокутник на площині в системі координат X_4OX_5. Отже, якщо загальний розв'язок системи (2.8) містить дві вільні змінні, то задача (2.7) – (2.9) зводиться до задачі $ЛП$ із двома змінними, яку можна розв'язати графічним способом. Встановлено, що кожній вершині многокутника допустимих розв'язків відповідає один із базисних розв'язків системи обмежень, записаної в канонічному вигляді. Очевидно, що у випадку двох змінних, якщо лінійна функція має екстремальне значення, то воно досягається в одній з вершин області допустимих розв'язків.

Доведено в загальному випадку, що якщо функція (2.7) має екстремальне значення, то воно досягається при деякому базисному розв'язку системи (2.8). А так як кількість базисних розв'язків обмежена, то розв'язання задачі $ЛП$ зводиться до обчислення лінійної функції $F(2.7)$ для всіх базисних розв'язків системи обмежень (2.8). Зрозуміло, що цей процес об'ємний і складний. Необхідно мати такий алгоритм переходу від одного базисного розв'язку до іншого, при кожному кроці якого б значення F максимально наближувалось до шуканого екстремального значення. Такий алгоритм закладений у симплекс-методі.

Розв'язання задачі (2.7) – (2.9) розпочинається із знаходження будь-якого базисного розв'язку системи (2.8). Це можна зробити способом, показаним у прикладі (1). Але може виявитись, що в отриманому базисному розв'язку деякі базисні змінні будуть від'ємними, що суперечить умові (2.9).

Будемо називати базисний розв'язок допустимим, якщо значення всіх змінних задовольняють умови невід'ємності. Перейти від не допустимого базисного розв'язку до допустимого (якщо такий існує) можна за допомогою методу штучного базису. Цей метод будується на основі симплекс-методу, який поки що не розглянутий, тому буде показаний пізніше.

Саму ідею симплекс методу найкраще розглянути на прикладі. Нехай вдалося отримати деякий допустимий базисний розв'язок системи обмежень. Тоді лінійну функцію F необхідно виразити тільки через вільні змінні. Нехай при цьому задача набула вигляду:

$$F = -x_4 + x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_4 + 2x_5 \\ x_2 = 2 + 2x_4 - x_5 \\ x_3 = 3 - 3x_4 - x_5 \end{cases} \qquad (2.10)$$

$$x_i \geq 0 \ \ (i = 1 \div 5)$$

Для знайденого розв'язку системи змінні x_1, x_2, x_3 - базисні, x_4, x_5 - вільні. Базисний розв'язок $X = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) = (1; 2; 3; 0; 0)$. Значення F для цього розв'язку $F = 0$. Розглянемо вираз $-x_4 + x_5$. Так як $x_4 \geq 0$ і перед x_4 стоїть знак „ - ”, то із збільшенням значення цієї змінної значення F зменшується, тобто F буде найбільшим при $x_4 = 0$. Перед змінною x_5 стоїть знак “ + ”, тому із збільшенням x_5 значення F зростає. Встановимо до якого значення можна збільшити x_5, враховуючи систему обмежень. Перше рівняння: при $x_4 = 0$ збільшення x_5 залишає змінну x_1 додатною. Отже, це рівняння не обмежує x_5 зверху. Друге рівняння: при $x_4 = 0$ збільшення x_5 до 2 залишає x_2 додатною, при $x_5 = 2$ $x_2 = 0$, при $x_5 > 2$ $x_2 < 0$, що суперечить умові задачі. Отже, друге рівняння дозволяє збільшити x_5 лише до 2. Аналогічно третє рівняння дозволяє збільшити x_5 до 3. Остаточно встановлюємо, що x_5 можна збільшити до 2, зробивши її базисною, а x_2 вільною $(x_2 = 0)$. Для цього виразимо x_5 з другого рівняння і підставимо в F та в перше і третє рівняння:

$$F = -x_4 + 2 - x_2 + 2x_4 \to \max \qquad F = 2 - x_2 + x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_4 + 2(2 - x_2 + 2x_4) \\ x_5 = 2 - x_2 + 2x_4 \\ x_3 = 3 - 3x_4 - (2 - x_2 + 2x_4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 - 2x_2 + 3x_4 \\ x_5 = 2 - x_2 + 2x_4 \\ x_3 = 1 + x_2 - 5x_4 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0 \ \ (i = 1 \div 5) \qquad x_i \ge 0 \ \ (i = 1 \div 5)$$

Тепер базисні змінні x_1, x_3, x_5, вільні - x_2 та x_4. Базисний розв'язок $X = (5;0;1;0;2)$, $F = 2 > 0$. Провівши аналогічні міркування встановлюємо, що F можна збільшити тільки за рахунок збільшення x_4. Перше та друге рівняння системи при $x_2 = 0$ не обмежує x_4 зверху, третє дозволяє збільшити лише до $\frac{1}{5}$. Введемо x_4 в базис замість x_3, виразивши x_4 з третього рівняння і підставивши в F та перше і друге рівняння. Отримаємо:

$$F = \frac{11}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{4}{5}x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{28}{5} - \frac{3}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_2 \\ x_5 = \frac{12}{5} - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_2 \\ x_4 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_2 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0 \ \ (i = 1 \div 5)$$

Тепер з виразу для F випливає, що із збільшенням x_3 та x_2 значення F зменшується. Тобто максимальне значення функції F рівне $\frac{11}{5}$ при $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Базисний розв'язок при якому функція цілі досягає екстремальне значення називається оптимальним. В даному випадку розв'язок $X = \left(\frac{28}{5};\ 0;\ 0;\ \frac{1}{5};\ \frac{12}{5}\right)$ є оптимальним.

Остаточна відповідь для задачі, що розглянули: $F_{\max} = \frac{11}{5}$ при $X = \left(\frac{28}{5};\ 0;\ 0;\ \frac{1}{5};\ \frac{12}{5}\right)$.

Приклад 2. Нехай система обмежень та лінійна форма F приведені до вигляду:

$$F = x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_3 = 1 + x_1 - x_2 \\ x_4 = 2 - x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ \ (i = 1 \div 4)$$

Базисний розв'язок $X = (0;0;1;2)$, $F = 0$. Збільшимо F за рахунок x_1 $(x_2 = 0)$. З другого рівняння видно, що x_1 можна збільшити лише до 2, що дає $x_3 = 3$, $x_4 = 0$. Ввівши в базис x_1 замість x_4 отримаємо:

$$F = 2 - x_4 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_3 = 3 - x_4 + x_2 \\ x_1 = 2 - x_4 + 2x_2 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = 1 \div 4)$$

Новий базисний розв'язок $X = (2;0;3;0)$, $F = 2$. З виразу для F встановлюємо, що із збільшенням значення змінної x_2 значення F зростає. Але із рівнянь видно, що x_2 можна збільшувати необмежено, не порушуючи невід'ємності x_3 та x_1. Отже, F необмежена зверху, і оптимального розв'язку не існує.

Для виконання розглянутих перетворень використовують так звані симплекс-таблиці. Для цього, наприклад, задача (2.10) приводиться до вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2 \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$F + x_4 - x_5 = 0$$

Відповідна симплекс-таблиця №1 матиме вигляд:

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Вільні члени
x_1	1	0	0	1	-2	1
x_2	0	1	0	-2	1	2
x_3	0	0	1	3	1	3
F	0	0	0	1	-1	0

В стовпчиках x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 записуємо коефіцієнти при цих змінних в рівняннях обмежень та формі F. В стовпчику "базис" записуємо базисні змінні для відповідних рівнянь. В останньому стовпчику записуємо вільні члени рівнянь та форми F. Очевидно, що базисний розв'язок, що відповідає симплекс-таблиці отримується наступним чином: значення змінних, що не ввійшли до базису рівні 0, значення базисних змінних та F рівні значенням відповідних вільних членів. Для записаної таблиці базисний розв'язок $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $F = 0$.

Із розглянутих двох прикладів можна зробити такі висновки:

Алгоритм застосування симплекс-методу наступний:

1. Знаходиться будь-який допустимий базисний розв'язок, F виражається через вільні (небазисні) змінні і записується 1-ша симплекс-таблиця. Назвемо елементи рядочка F крім останнього (тобто коефіцієнти при змінних для лінійної форми) оцінками.
2. Якщо всі оцінки невід'ємні, то знайдений розв'язок оптимальний.
3. Якщо є хоча б одна від'ємна оцінка – знайдений розв'язок не оптимальний. Нехай оцінка від'ємна в стовпчику x_j. Розглядаються інші елементи цього стовпчика. Якщо серед них немає додатних, то $F_{\max} = +\infty$, задача розв'язку немає.
4. Нехай в стовпчику, що розглядається є додатні елементи. Для кожного з них розглянемо відношення відповідних вільних членів до цих елементів і виберемо серед них найменше. Нехай мінімальне відношення буде для елемента із рядочка x_i.
5. Переходимо до нового базису, виключаючи із старого x_i введенням замість неї x_j. Для цього з рівняння, що містить x_i виражаємо x_j і отриманий вираз підставляємо в інші рівняння і F.

Далі повертаємося до пункту 2, але вже в новому базисі.

Встановимо правила переходу від однієї симплекс-таблиці до іншої, що відповідає переходу від одного базису до іншого. В записаному алгоритмі стовпчик x_j називають розв'язувальним стовпчиком, рядочок x_i - розв'язувальним рядочком. Елемент, що знаходиться на перетині розв'язувального рядочка і стовпчика називають розв'язувальним елементом. Неважко встановити, що відповідно до пункту 5 елементи нової таблиці отримуємо за такими правилами: (*)

1. елемент. Елементи розв'язувального рядочка ділимо на розв'язувальний
2. В розв'язувальному стовпчику крім отриманої одиниці ставимо нулі.
3. Всі інші елементи таблиці замінюємо по правилу прямокутника:

		a_{rk}		a_{rj}			r - ий рядочок

		a_{ik}		$\boxed{a_{ij}}$			i - ий рядочок
		k - ий стовпчик		j - ий стовпчик			

Замість елемента a_{rk} ставимо a'_{rk}, де

$$a'_{rk} = a_{rk} - \frac{a_{ik} \cdot a_{rj}}{a_{ij}}. \qquad (2.11)$$

Тобто елемент, що замінюємо (a_{rk}) умовно з'єднуємо по прямій з розв'язувальним елементом (a_{ij}). Вважаючи отриманий відрізок діагоналлю прямокутника, встановлюємо його дві інші вершини (a_{rj}, a_{ik}). Добуток елементів, що стоять в цих вершинах ділимо на розв'язувальний елемент і результат віднімаємо від елемента, що замінюємо. Отримане значення ставимо в нову таблицю на місце елемента, що замінювали.

Розглянемо застосування симплекс-методу на прикладі наступної задачі економічного змісту.

На виготовлення двох видів продукції - $П_1$ і $П_2$ витрачається три види ресурсів - P_1, P_2, P_3. Виробництво забезпечене ресурсами P_1 в кількості 801 одиниця, ресурсами P_2 - 807 одиниць, P_3 - 768 одиниць. На виробництво однієї одиниці продукції $П_i$ витрачається 9 одиниць ресурсу P_1, 6 одиниць P_2 і 3 одиниці ресурсу P_3. На виробництво однієї одиниці продукції $П_2$ витрачається 4 одиниці ресурсу P_1, 7 одиниць P_2 і 8 одиниць ресурсу P_3. Прибуток від реалізації однієї одиниці продукції $П_4$ складає 3 грошові одиниці, від $П_2$ - 2 грошові одиниці. За допомогою симплекс-методу (шляхом перетворення симплекс таблиць) знайти такий план виробництва, який би забезпечував найбільший прибуток.

Розв'язання. Складемо математичну модель задачі.

Нехай x_1 - кількість продукції $П_1$, x_2 - кількість продукції $П_2$, що буде вироблено. Тоді обмеження на ресурси трьох видів відповідно матимуть вигляд:

$$9x_1 + 4x_2 \le 801$$

$$6x_1 + 7x_2 \le 807$$

$$3x_1 + 8x_2 \le 768$$

Так як x_1, x_2 - кількість, то $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$. Нехай F - прибуток від реалізації продукції $П_1$ та $П_2$. Згідно з умовою:

$F = 3x_1 + 2x_2$.

Отже, отримали математичну модель задачі:

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \le 801 \\ 6x_1 + 7x_2 \le 807 \\ 3x_1 + 8x_2 \le 768 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max$

Приведемо її до канонічного виду ввівши додаткові невід'ємні змінні x_3, x_4, x_5:

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + x_3 = 801 \\ 6x_1 + 7x_2 + x_4 = 807 \\ 3x_1 + 8x_2 + x_5 = 768 \\ x_i \ge 0,\ (i = 1 \div 5) \end{cases}$$

$F - 3x_1 - 2x_2 = 0 \to \max$

Очевидно, що значення x_3, x_4, x_5 є не що іншим, як залишками ресурсів P_1, P_2, P_3 відповідно після виробництва x_1 та x_2 одиниць продукцій Π_1 та Π_2. Базисний розв'язок системи обмежень з базисними змінними x_3, x_4, x_5 є допустимим. Складаємо першу симплекс-таблицю.

↓

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$в_i$	
x_3	$\boxed{9}$	4	1	0	0	801	←
x_4	6	7	0	1	0	807	
x_5	3	8	0	0	1	768	
F	-3	-2	0	0	0	0	

Відповідний базисний розв'язок

$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 801,\ x_4 = 807,\ x_5 = 768,\ F = 0$.

В останньому рядочку є від'ємні елементи (оцінки). Отже, знайдений розв'язок не оптимальний. Економічний зміст розв'язку: жодні ресурси не використовуються, продукція не виробляється, прибуток відповідно нуль.

Виберемо стовпчик з більшою по модулю від'ємною оцінкою (-3) за розв'язувальний (стовпчик x_1). З економічної точки зору ми плануємо виробляти дорожчу продукцію Π_1. Розглянемо відношення вільних членів до додатних елементів розв'язувального стовпчика і виберемо серед них мінімальне. Так як

$\min\left\{\frac{801}{9};\frac{807}{6};\frac{768}{3}\right\}=\min\{89;134,5;256\}=89$, то перший рядочок, якому відповідає мінімальне відношення вибираємо за розв'язувальний. Економічний підтекст цього вибору: так як на одну одиницю продукції Π_1 витрачається 9 одиниць ресурсу P_1, якого в запасі маємо 801 одиниці, то ресурс P_1 дозволяє виготовити $\frac{801}{9}=89$ одиниць продукції Π_1. Аналогічно встановлюємо, що ресурси P_2 та P_3 дозволяють виготовити відповідно 134,5 та 256 одиниць цієї продукції. Очевидно, що враховуючи всі види ресурсів можна виготовити не більше, як 89 одиниць Π_1. На перетині розв'язувальних рядочка та стовпчика знаходиться розв'язувальний елемент. Обведемо його прямокутною рамкою, а розв'язувальні рядочок та стовпчик вкажемо стрілочками. Перейдемо до нової симплекс-таблиці за встановленими вище правилами (*).

Отже, всі елементи рядочка x_3 ділимо на 9. В стовпчику x_1 крім отриманої 1 ставимо всі нулі. Записуємо в базис замість змінної x_3 змінну x_1. Всі інші елементи замінюємо по правилу прямокутника. Наприклад: елемент 7 замінюємо на $7-\frac{4\cdot 6}{9}=\frac{39}{9}=\frac{13}{3}$, так як відповідний прямокутник має вигляд:

$$\begin{matrix} \boxed{9} & \cdots & 4 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 6 & \cdots & 7 \end{matrix}$$

Варто зазначити, що якщо елемент в розв'язувальному рядочку рівний нулю, то відповідний стовпчик залишається без змін. Після перерахунків отримуємо:

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$в_i$
x_1	1	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	0	89
x_4	0	$\frac{13}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	0	273
x_5	0	$\frac{20}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	501
F	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	267

Отриманій таблиці відповідає розв'язок:

$x_1 = 89$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 273$, $x_5 = 501$. Тобто виробляється 89 одиниць продукції $П_1$, продукція $П_2$ не виробляється, ресурс P_1 вичерпується повністю залишок ресурсів P_2 та P_3 - 273 та 501 одиниця відповідно. Так як знову є від'ємна оцінка розв'язок (план виробництва) не оптимальний.

Аналогічно, як і для I–ої таблиці визначимо розв'язувальний елемент і перейдемо до нової таблиці за вказаними вище правилами. Стовпчик (x_2) з від'ємною оцінкою $\left(-\frac{2}{3}\right)$ буде розв'язувальним. Так як min

$$\left\{\frac{89}{\frac{4}{9}}; \frac{273}{\frac{13}{3}}; \frac{501}{\frac{20}{3}}\right\} = \frac{273}{\frac{13}{3}} = 63$$ для II- го рядочка, то саме він буде

розв'язувальним. Отже, розв'язувальний

елемент $-\frac{13}{3}$. Після відповідних розрахунків отримуємо:

Таблиця 3.

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$в_i$
x_1	1	0	$\frac{7}{39}$	$-\frac{4}{39}$	0	61
x_2	0	1	$-\frac{2}{13}$	$\frac{3}{13}$	0	63
x_5	0	0	$-\frac{9}{13}$	$-\frac{20}{13}$	1	81
F	0	0	$\frac{3}{13}$	$\frac{2}{13}$	0	309

Отриманій таблиці відповідає розв'язок: $x_1 = 61$, $x_2 = 63$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 81$. Так як в останньому рядочку немає від'ємних оцінок, то знайдений розв'язок є оптимальним. Тобто можна стверджувати наступне: максимально можливий прибуток складає 309 грошових одиниць $(F_{\max} = 309)$. Досягається він при такому плані виробництва: виготовляється 61 одиниця продукції $П_1(x_1 = 61)$ і 63 одиниці продукції $П_2(x_2 = 63)$. При цьому ресурси P_1 і P_2 вичерпаються $(x_3 = x_4 = 0)$, а ресурс P_3 залишиться у кількості 81 одиниця $(x_5 = 81)$. Поставлену задачу розв'язано.

2.3 Знаходження допустимого базисного розв'язку

Отже, показано алгоритм знаходження розв'язку задачі лінійного програмування симплекс-методом при умові, що знайдено довільний допустимий базисний розв'язок. Методом послідовного виключення змінних Жордано-Гауса для будь якої системи лінійних рівнянь можна знайти один із базисних розв'язків. Залишається вказати, як із довільного отриманого базисного розв'язку отримати допустимий базисний розв'язок (якщо такий існує). Розглянемо один із методів, що дозволяє це зробити та метод штучного базису.

Нехай із системи обмежень (2.8) отримано базисний розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - (a_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n) \\ x_1 = b_1 - (a_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = b_r - (a_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n) \end{cases} \qquad (**)$$

Якщо всі вільні члени невід'ємні $b_i \geq 0$, то цей розв'язок є допустимим. Якщо, наприклад, $b_i < 0$, то вводимо штучну змінну $y_i \geq 0$, таку що $y_1 = -b_1 + x_2 + (a_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n)$. Замінимо цим рівнянням перше рівняння системи (**) і вважатимемо в ньому базисною y_1 а x_1 - вільною. Аналогічно зробимо і для інших $b_i < 0$, якщо такі матимуть місце. Запишемо функцію F, як суму всіх введених допоміжних змінних $F = y_1 + y_2 + \ldots + y_m$ і поставимо задачу: знайти $\min F$ при системі обмежень із введеними змінними y_i. В цій системі значення всіх базисних змінних невід'ємні тому поставлену задачу можна розв'язати симплекс-методом. Очевидно, що якщо система (**) має базисний розв'язок з невід'ємними значеннями базисних змінних, то його обов'язково можна буде отримати із допоміжної системи при умові, що $y_1, y_2, \ldots, y_m$ будуть вільними і дорівнюватимуть нулю. Тоді при цьому $F = 0$, а це в силу невід'ємності допоміжних змінних $(y_i \geq 0)$ є найменш можливе значення F. Отже, якщо розв'язавши поставлену задачу мінімізації F симплекс-методом отримаємо $F_{\min} = 0$, то підставивши в отриманий при цьому базисний розв'язок $y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 0$ отримаємо шуканий допустимий базисний розв'язок для системи (**). Якщо ж $F_{\min} > 0$, то система (**) на має допустимого базисного розв'язку, а відповідна задача ЛП на має розв'язку.

Розглянемо процес знаходження допустимого базисного розв'язку для задачі ЛП на прикладі.

Приклад 4 . Виділити допустимий базис для наступної задачі лінійного програмування

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 - x_5 = -4 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_4 - x_5 = -5 \end{cases}$$

$f = x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$.

<u>Розв'язання</u>. Із першого рівняння вводимо в базис x_3:

$x_3 = 1 - 3x_1 + 5x_2 - 2x_4$.

Виключимо з III –го рівняння x_5 шляхом віднімання від III –го рівняння II –го:

$x_1 - 3x_2 + 2x_4 - (2x_1 - 2x_2 + x_4 + 4) = -5$;

$-x_1 - x_2 + x_4 = -1$.

Тоді з другого рівняння введемо в базис x_5:

$x_5 = 4 + 2x_1 - 2x_2 + x_4$. Отримаємо:

$$\begin{cases} x_3 = 1 - 3x_1 + 5x_2 - 2x_4 \\ x_5 = 4 + 2x_1 - 2x_2 + x_4 \\ -x_1 - x_2 + x_4 = -1. \end{cases}$$

Залишається ввести в базис змінну із III-го рівняння. Введемо уявну змінну $y_1 \geq 0$, таку, що: $y_1 = 1 - x_1 - x_2 + x_4$. Отримали:

$$\begin{cases} x_3 = 1 - 3x_1 + 5x_2 - 2x_4 \\ x_5 = 4 + 2x_1 - 2x_2 + x_4 \\ y_1 = 1 - x_1 - x_2 + x_4 \end{cases}$$

Розглянемо при цих умовах задачу мінімізації функції $F = y_1 = 1 - x_1 - x_2 + x_4$ або максимізації F. Розв'яжемо її симплекс-методом. Маємо:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_4 + y_1 = 1. \end{cases}$$

$-F - x_1 - x_2 + x_4 = -1 \to \max$.

Складаємо I –шу симплекс таблицю:

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	b_i
x_3	3	-5	1	2	0	0	1
x_5	-2	2	0	-1	1	0	4
y_1	1	$\boxed{1}$	0	-1	0	1	1
$-F$	-1	-1	0	1	0	0	-1

↑

Виберемо II –ий стовпчик за розв'язувальний за розв'язувальний. Так як $\min\left\{\frac{4}{2};\frac{1}{1}\right\}=1$, то третій рядочок розв'язувальний. На перетині розв'язувальних рядочка і стовпчика знаходиться розв'язувальний елемент –1, розмістимо його в прямокутну рамочку. Перейдемо до нової таблиці за відповідними правилами.

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	b_i
x_3	8	0	1	-3	0	5	6
x_5	-4	0	0	1	1	-2	2
x_2	1	1	0	-1	0	1	1
$-F$	0	0	0	0	0	1	0

Таким чином $\max(-F)=\min F=0$ при $y_1=0$, а шуканий допустимий базис для вихідної задачі має вигляді: $\begin{cases} x_3=6-8x_1+3x_4 \\ x_5=2+4x_1-x_4 \\ x_2=1-x_1+x_4. \end{cases}$

Лінійна форма f при цьому прийме вигляд:

$f=x_1+2x_2=x_1\cdot 2(1-x_1+x_4)=-x_1+2x_4+2$.

Тобто задача (12) набуде вигляду

$$\begin{cases} x_3=6-8x_1+3x_4 \\ x_5=2+4x_1-x_4 \\ x_2=1-x_1+x_4. \end{cases}$$

$f=-x_1+2x_4+2\rightarrow\max(\min)$,

до якої вже можна застосувати симплекс - метод.

Звичайно, якщо знаходження розв'язку задачі лінійного програмування реалізується на ЕОМ, то метод штучного базису можна застосувати без попередніх перетворень, ввівши допоміжні змінні до кожного з рівнянь.

Нехай система обмежень задана в канонічному вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\ldots+a_{rn}x_n=b_r \end{cases} \tag{14}$$

Числа $b_1, b_2,\ldots,b_r$ можна вважати невід'ємними. Якщо це не так, наприклад $b_1<0$, то помноживши обидві частини першого рівняння на –1, отримаємо рівняння з додатним вільним членом.

Отже, нехай $b_1 \geq 0, b_2 \geq 0, \ldots, b_r \geq 0$.

Введемо штучні невід'ємні змінні y_i наступним чином:

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n), \\ y_2 &= b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_r &= b_r - (a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n) \end{aligned} \qquad (13)$$

Розв'яжемо задачу мінімізації функції $F = y_1 + y_2 + \ldots + y_r$ симплекс методом при системі обмежень (13), для якої базис $y_1, y_2, \ldots, y_r$ є допустимим. Якщо $F_{\min} = 0$, то з системи обмежень, яку при цьому отримаємо шляхом підстановки $y_1 = 0, y_2 = 0, \ldots, y_r = 0$ отримаємо допустимий базисний розв'язок для системи (14).

Але якщо задача розв'язується без застосування ЕОМ, то введення в базис основної змінної з невід'ємними значеннями зменшує кількість штучних змінних, що доведеться вводити і значно спрощує знаходження допустимого базису.

Отже, алгоритм знаходження розв'язку довільної задачі лінійного програмування симплекс методом наступний:

1. Задача записується в канонічному вигляді.

2. Для системи обмежень знаходять довільний допустимий базисний розв'язок, тобто розв'язок, при якому значення всіх базисних змінних невід'ємні. Якщо такий розв'язок існує, його завжди можна знайти методом штучного базису. Можливі випадки, коли необхідний базис можна отримати із системи обмежень без перетворень. Його можна отримати методом послідовного виключення Жордана-Гауса, або комбінуючи цей метод із методом штучного базису. Якщо ж шуканого базису не існує, задача лінійного програмування розв'язку немає.

3. Функція F, що досліджується на екстремальне значення виражається через вільні змінні. Складається перша симплекс-таблиця.

4. За допомогою перетворень симплекс - таблиць відповідно до вказаних вище правил знаходиться екстремальне значення F, або встановлюється, що задача не має розв'язку.

2.4 Двоїста задача лінійного програмування. Двоїстий симплекс метод

Кожній задачі лінійного програмування можна поставити у відповідність за певними правилами іншу задачу (лінійного програмування), яка називається двоїстою або спряженою по відношенню до вихідної або прямої задачі. Дамо визначення двоїстої задачі до вихідної задачі, в якій всі обмеження є нерівностями типу "$\leq$". Відповідна пара задач називається симетричною

Якщо пряма задача полягає у визначенні максимального значення функції:

$F = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n \to \max$ за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k \end{cases}.$$

$y_j \ge 0 \ (j = 1 \div k)$.

Запишемо правила, за якими складається двоїста задача:

1. Якщо цільова функція вихідної задачі задається на максимум, то цільова функція двоїстої – на мінімум і навпаки.

2. Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

, що складається з коефіцієнтів при змінних у системі обмежень прямої задачі і матриця коефіцієнтів в системі обмежень двоїстої задачі:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{k1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{k2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

утворюються одна з одної транспонування, тобто заміною рядків стовпчиками, а стовпчиків – рядками.

3. Кількість змінних в двоїстій задачі дорівнює кількості відношень в системі обмежень вихідної задачі, а кількість обмежень в двоїстій задачі дорівнює кількості змінних прямої задачі.

4. Коефіцієнтами при невідомих в цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени. Системи обмежень вихідної задачі, а праві частини обмежень двоїстої задачі – коефіцієнти при невідомих в цільовій функції вихідної задачі.

Приклад. Записати двоїсту задачу для наступної задачі лінійного програмування.

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \le 801 \\ 6x_1 + 7x_2 \le 807 \\ 3x_1 + 8x_4 \le 768 \end{cases}$$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max$.

Розв'язання. Так як цільова функція вихідної задачі досліджується на $\max$, то в двоїстій задачі цільова функція досліджується на $\min$. Матриця обмежень вихідної задачі $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 6 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$, тоді матриця обмежень двоїстої задачі $A^T = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Так як кількість обмежень в прямій задачі – 3, то в двоїстій задачі матимемо 3 змінні: $y_1, y_2, y_3 \geq 0$. Так як в прямій задачі є дві змінні, то в двоїстій задачі матимемо два обмеження.

Коефіцієнти при змінних в цільовій функції вихідної задачі 3; 2 будуть вільними членами обмежень двоїстої задачі, а вільні члени обмежень вихідної задачі 801; 807; 768 – коефіцієнтами при змінних в цільовій функції двоїстої задачі.

Остаточно отримуємо:

$$\begin{cases} 9y_1 + 6y_2 + 3y_3 \geq 3 \\ 4y_1 + 7y_2 + 8y_3 \geq 2 \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

$$F^* = 801y_1 + 807y_2 + 768y_3 \to \min$$

Зв'язок між розв'язками прямої та двоїстої задач.

Для будь-якої пари прямої та двоїстої задач має місце наступна теорема, яка називається теоремою двоїстості:

Якщо для однієї з пар двоїстих задач існує оптимальний план, то інша також має оптимальний план, причому значення цільових функцій задач при їх оптимальних планах рівні між собою, тобто $F_{\max} = F^*_{\min}$.

Якщо ж цільова функція однієї з задач не обмежена, то інша взагалі не має планів.

Якщо пряма задача лінійного програмування має оптимальний план X^*, визначений симплекс-методом, то оптимальний план двоїстої задачі Y^* визначається із співвідношення

$$Y^* = \vec{C}_{баз} \cdot D ,$$

де $\vec{C}_{баз}$ - вектор-рядок, що складається з коефіцієнтів цільової функції прямої задачі при змінних, які є базисними в оптимальному плані; D - матриця, складена з елементів останньої симплекс-таблиці, що знаходяться в тих стовпчиках, де в першій таблиці міститься одинична матриця. З другого боку оцінки (елементи останнього рядочка F), що містяться в цих стовпчиках є оптимальними значеннями змінних двоїстої задачі.

Наприклад. Для розглянутої задачі $N(?)$

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \le 801 \\ 6x_1 + 7x_2 \le 807 \\ 3x_1 + 8x_2 \le 768 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

Остання симплекс-таблиця має вигляд

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	$\frac{7}{39}$	$-\frac{4}{39}$	0	61
x_2	0	1	$-\frac{2}{13}$	$\frac{3}{13}$	0	63
x_5	0	0	$-\frac{9}{13}$	$-\frac{20}{13}$	1	81
F	0	0	$\frac{3}{13}$	$\frac{2}{13}$	0	309

Базисні змінні x_1, x_2, x_5. В цільовій функції $F(1)$ коефіцієнти при них відповідно 3, 2, 0. Отже, $\vec{C}_{баз} = (3;2;0)$.

В першій симплекс таблиці одинична матриця складалася з елементів стовпчиків x_3, x_4, x_5. Складаємо матрицю D з елементів останньої симплекс-таблиці цих стовпчиків

$$D = \begin{pmatrix} \frac{7}{39} & -\frac{4}{39} & 0 \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} & 0 \\ -\frac{9}{13} & -\frac{20}{13} & 1 \end{pmatrix}$$. Тоді для двоїстої задачі

$$\begin{cases} 9y_1 + 6y_2 + 3y_3 \ge 3 \\ 4y_1 + 7y_2 + 8y_3 \ge 2 \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

$$F^* = 801y_1 + 807y_2 + 768y_3 \to \min$$

маємо:

$$y^* = (y_1; y_2; y_3) = \vec{C}_{баз} \cdot D = (3;2;0)\begin{pmatrix} \frac{7}{39} & -\frac{4}{39} & 0 \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} & 0 \\ -\frac{9}{13} & -\frac{20}{13} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(3 \cdot \frac{7}{39} + 2 \cdot \left(-\frac{2}{13}\right) + 0 \cdot \left(-\frac{9}{13}\right); 3 \cdot \left(-\frac{4}{39}\right) + 2 \cdot \frac{3}{13} + 0 \cdot \left(-\frac{20}{13}\right); 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1\right) =$$

$$= \left(\frac{3}{13}; \frac{2}{13}; 0\right).$$

Тобто оптимальний розв’язок двоїстої задачі: $y_1 = \frac{3}{13}, y_2 = \frac{2}{13}, y_3 = 0.$

Мінімальне значення $y_1 = \frac{3}{13}, y_2 = \frac{2}{13}, y_3 = 0.$ $F^* : F^*_{\min} = 801 \cdot \frac{3}{13} + 807 \cdot \frac{2}{13} + 768 \cdot 0 = 309$, яке співпадає з $F_{\max} = 309$ для прямої задачі.

Як бачимо, оптимальні значення y_1, y_2, y_3 знаходяться в останньому рядочку в стовпчику змінних, які в початковій симплекс-таблиці були базисними.

Економічна інтерпритація двоїстої задачі.

Аналіз оптимальних планів лінійних економіко-математичних моделей.

У розділі 3(?) ми розглянули задачу про оптимальне використання обмежених ресурсів при виробництві певних видів продукції. В загальному випадку її матемаична модель має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k \end{cases}$$

$$x_i \ge 0 \qquad (i = 1 \div n)$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

і полягає у визначенні такого оптимального плану виробництва $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, який дасть найбільший прибуток.

Двоїста задача до поставленої матиме вигляд:

$$F^* = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_k y_k \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \ldots + a_{k1} y_k \ge c_1 \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{k2} y_k \ge c_2 \\ \vdots \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \ldots + a_{kn} y_k \ge c_n \end{cases}$$

$$y_j \ge 0 \ (j = 1 \div k)$$

Змінні двоїстої задачі характеризують цінність (умовну вартість) одиниці *j*-го ресурсу, а економічний зміст задачі полягає у визначенні такої системи двоїстих оцінок ресурсів y_j, використовуваних для виробництва продукції, для якої загальна вартість усіх ресурсів буде найменшою.

Знаючи значення змінних двоїстої задачі можна визначити статус кожного ресурсу прямої задачі та рентабельність продукції, що виготовляється. Якщо двоїста оцінка y_j в оптимальному плані двоїстої задачі дорівнює нулю, то відповідний *j*-ий ресурс використовується у виробництві продукції не повністю і є недефіцитним. Якщо ж двоїста оцінка $y_j > 0$, то j-ий ресурс використовується для оптимального плану повністю і називається дефіцитним, причому якщо збільшити запас цього ресурсу на одну умовну одиницю то прибуток F збільшиться на y_j умовних одиниць. Величину y_j називають ще мірою дефіцитності *j*-го ресурсу.

Наприклад для розглянутого прикладу №(?) маємо $y_1 = \frac{3}{13}, y_2 = \frac{2}{13}, y_3 = 0$. Це означає, що при знайденому оптимальному плані виробництва ресурси третього виду не є дефіцитними, а ресурси І-го та ІІ-го виду вичерпались і є дефіцитними з мірами дефіцитності $\frac{3}{13}$ і $\frac{2}{13}$ відповідно.

Кожному виду продукції, що планують виробляти відповідає обмеження двоїстої задачі. Наприклад, для задачі №(?) маємо два види продукції і відповідно два обмеження:

$$\begin{cases} 9y_1 + 6y_2 + 3y_3 \ge 3 \\ 4y_1 + 7y_2 + 8y_3 \ge 2 \end{cases},$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \ge 0$$

то введені додаткові змінні будуть характеризувати рентабельність відповідної продукції.

Якщо в оптимальному плані значення додаткової змінної буде дорівнювати нулю, то це означатиме, що відповідна продукція рентабельна і вона включена до виробництва. Якщо ж значення додаткової змінної більше нуля, то відповідна продукція не рентабельна і вироблятись не буде. Для рентабельності необхідно щоб її прибуток від реалізації збільшився на відповідне значення додаткової змінної.

Значення додаткових змінних можна знайти з обмежень двоїстої задачі в канонічному виді, або з останнього рядочка останньої симплекс-таблиці в стовпчиках змінних, які в першій таблиці були вільними.
Для задачі №(?) маємо:

$$\begin{cases} 9y_1 + 6y_2 + 3y_3 - y_4 = 3 \\ 4y_1 + 7y_2 + 8y_3 - y_5 = 2 \end{cases}$$

Знайдений оптимальний розв'язок $y_1 = \frac{3}{13}, y_2 = \frac{2}{13}, y_3 = 0$. Тоді

$$y_4 = 9y_1 + 6y_2 + 3y_3 - 3 = 9 \cdot \frac{3}{13} + 6 \cdot \frac{2}{13} + 3 \cdot 0 - 3 = 0,\ y_4 = 0;$$

$$y_5 = 4y_1 + 7y_2 + 8y_3 - 2 = 4 \cdot \frac{3}{13} + 7 \cdot \frac{2}{13} + 8 \cdot 0 - 2 = 0,\ y_5 = 0.$$

Отже, і перша і друга продукція є рентабельними і включені до виробництва. Ці ж значення y_4 та y_5 знаходяться в стовпчиках x_1 та x_2 в останньому рядочку останньої симплекс-таблиці.
Припустимо, підприємство спланувало випуск нової продукції з відомими затратами ресурсів та прибутком від реалізації. Для встановлення її рентабельності необхідно скласти відповідне обмеження двоїстої задачі в канонічному виді для нової продукції і знайти значення додаткової змінної при оптимальному розв'язку задачі без нової продукції, якщо воно:

а) більше нуля – нова продукція нерентабельна, для її рентабельності необхідно збільшити прибуток від реалізації на отримане значення додаткової змінної;

б) рівне нулю – нова продукція рентабельна, її доцільно вводити в виробництво;

в) менше нуля – нова продукція рентабельна, причому залишатиметься рентабельною, якщо прибуток від реалізації зменшити на отримане значення додаткової змінної

3. Транспортна задача

Одним із видів задач лінійного програмування є транспортна задача, яка полягає в знаходженні оптимального плану перевезень деякого однорідного вантажу від m баз: $A_1, A_2, \ldots, A_m$ до n пунктів споживання $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Позначимо кількість вантажу, що знаходиться на базі A_i через a_i, а загальну кількість наявного вантажу - a .

$$a = \sum_{i=1}^{m} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_m ,$$

кількість вантажу, що потребує споживач B_j позначимо b_j, а загальну кількість потреб - b:

$$b = \sum_{j=1}^{n} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n .$$

Транспортна задача, для якої $a = b$ називається задачею закритого типу. У випадку $a \neq b$ маємо транспортну задачу відкритого типу.

Очевидно, що в задачі закритого типу весь наявний вантаж повністю розвозиться і потреби всіх споживачів задовольняються.

У відкритій задачі при $a > b$ на деяких базах залишається певна кількість вантажу, при $a < b$ на задовольняються потреби деяких пунктів споживання.

3.1 Транспортна задача закритого типу

Для розв'язання транспортної задачі крім запасів і потреб необхідно знайти також тарифи C_{ij}, тобто вартість перевезення одиниці вантажу від бази A_i до пункту B_j. Сукупність всіх тарифів утворює матрицю C:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \ldots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \ldots & C_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{m1} & C_{m2} & \ldots & C_{mn} \end{pmatrix} .$$

Для відображення запасів на базах, потреб пунктів споживання та тарифів на перевезення зручно застосовувати наступну таблицю:

Бази	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	$\ldots$	$\ldots$	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\ldots$	$\ldots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\ldots$	$\ldots$	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\cdots$	$\cdots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потреби	b_1	b_2	$\cdots$	$\cdots$	b_n	$a=b$

Умова $a=b$ означає, що транспортна задача є задачею закритого типу. Складемо математичну модель задачі

Нехай x_{ij} - кількість вантажу, який буде перевозитись від бази A_i до пункту B_j. Очевидно, що введені змінні повинні задовольняти наступні умови:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}=a_1 \\ x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}=a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}=a_m \\ x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}=b_1 \\ x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{m2}=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{mn}=b_n \\ x_{ij}\geq 0, \end{cases} \qquad (14)$$

Тобто сума кількостей вантажу, що буде перевозитись від бази до пунктів $B_1, B_2,\ldots,B_n$ повинні дорівнювати запасам цієї бази - a_i, а сума кількостей вантажу, що буде перевезено від баз $A_1, A_2,\ldots,A_m$ до пункту B_j повинна дорівнювати потребам цього пункту - b_j. І так як x_{ij} - це кількість, то $x_{ij}\geq 0$.

Функцією цілі поставленої задачі є сумарна кількість затрат для відповідного плану перевезень. Позначимо її S. Так як за кожну одиницю вантажу, що буде перевезено від бази A_i до пункту B_j буде витрачено c_{ij} грошових одиниць, а перевозитись буде x_{ij} одиниць, то

$$S=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\ldots+c_{ij}x_{ij}+\ldots+c_{mn}x_{mn}=\sum_{i,\,j}c_{ij}x_{ij}\,.$$

Так як мета це мінімальні затрати, то отримаємо наступну задачі лінійного програмування:

$$S=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\ldots+c_{ij}x_{ij}+\ldots+c_{mn}x_{mn}\to\min\,.$$

$$
\begin{cases}
x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}=a_1\\
x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}=a_2\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}=a_m\\
x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}=b_1\\
x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{m2}=b_2\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{mn}=b_n\\
x_{ij}\ge 0,
\end{cases}
$$

Так як транспортна задача є задачею лінійного програмування, то її можна розв'язати симплекс-методом, але в силу її специфіки можна знайти оптимальний розв'язок без перетворень симплекс-таблиць. Натомість, за певними правилами перетворюють таблицю перевезень, тобто переходять від одного плану перевезень до іншого.

Розглянемо систему обмежень (14). Легко переконатися, що набір значень $x_{ij}=\frac{a_i\cdot b_j}{a}=\frac{a_i\cdot b_j}{b}$ є її розв'язком. Отже множина планів перевезень не порожня. Очевидно, що $0\le x_{ij}\le\min\{a_i;b_j\}$, тобто ми не можемо перевозити від бази A_i до пункту B_j більше вантажу ніж є на базі A_i і більше ніж потребує пункт B_j. Крім цього $0\le c_{ij}\le\max\{c_{ij}\}$. Внаслідок обмеженості x_{ij} і c_{ij} обов'язково знайдеться така константа $c>-\infty$, що $S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\ge c$, тобто лінійна форма задачі обмежена на множині її планів. А це означає, що транспортна задача завжди має розв'язок.

Як було відзначено раніше, в задачі ЛП оптимальному значенню функції, що досліджується на екстремум відповідає деякий базисний розв'язок системи обмежень. Тому розглядатимемо лише базисні (опорні) плани перевезень.

Система обмежень (14) містить $m+n$ рівнянь з m і n невідомими. Її особливість полягає в тому, що всі коефіцієнти при невідомих дорівнюють 1. Крім цього, всі рівняння системи можна поділити на дві групи: група рівнянь, вільними членами яких є a_i (“горизонтальні” рівняння) та група рівнянь з вільними членами b_j (“вертикальні рівняння”). Причому, кожна з невідомих зустрічається в системі двічі: в одному і тільки одному горизонтальному та в одному і тільки одному вертикальному рівняннях. Не важко довести, що в системах такої структури одне і тільки одне рівняння є лінійною комбінацією інших рівнянь. Тобто ранг системи (14) або кількість лінійно незалежних рівнянь:

$$r = m + n - 1.$$

Доведемо це твердження для конкретної кількості баз та пунктів, наприклад, при $m = 2$, $n = 3$. В загальному випадку проводяться аналогічні дії та міркування.

Нехай маємо транспортну задачу.

Бази	B_1	B_2	B_3	Запаси
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	a_1
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	a_2
Запаси	b_1	b_2	b_3	$a = b$

$a = a_1 + a_2$; $b = b_1 + b_2 + b_3$, $a = b$.

Система обмежень для неї матиме вигляд:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2 \\ x_{11} + x_{21} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} = b_2 \\ x_{13} + x_{23} = b_3 \\ x_{ij} \ge 0. \end{cases}$$

Доведемо, що ранг цієї системи $r = m + n - 1 = 2 + 3 - 1 = 4$, тобто, що одне з рівнянь є лінійною комбінацією чотирьох інших. Наприклад, додамо почленно три останніх рівнянь (всі “вертикальні” рівняння) і віднімемо від отриманої суми почленно II –ге рівняння (всі “горизонтальні” крім I –го).

$(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23}) - (x_{21} + x_{22} + x_{23}) = b_1 + b_2 + b_3 - a_2$,

$x_{11} + x_{12} + x_{13} = a - a_2$

$x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1$. Отримали I –ше рівняння системи.

Отже, I –ше рівняння є лінійною комбінацією всіх інших рівнянь, його можна не записувати в системі.

Залишені рівняння запишемо у такій послідовності: спочатку всі “вертикальні” рівняння, потім всі “горизонтальні”, крім відкинутого I –го рівняння

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}=b_1 \\ x_{12}+x_{22}=b_2 \\ x_{13}+x_{23}=b_3 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=a_2 \end{cases}$$

Запишемо матрицю, складену з коефіцієнтів при змінних.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Очевидно, що її ранг дорівнює 4,

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$, отже, всі інші рівняння системи є лінійно незалежними. Аналогічно, проводиться доведення для довільних m та n.

Із доведеного твердження випливає, що для знаходження базисного розв’язку системи обмежень (опорного плану перевезень) необхідно деяким способом виділити із mn невідомих x_{ij} рівно $m+n-1$ базисних. Тоді всі інші змінні будуть вільними. В опорному плані їх значення рівні нулю, а значення базисних змінних – невід’ємні.

Опорний план перевезень називається невиродженим, якщо значення всіх базисних змінних додатні. Якщо ж одна чи декілька змінних рівні 0, то такий опорний план є виродженим.

Нехай отримано деякий базисний розв’язок системи (14). Тоді таблицю перевезень заповнюємо наступним чином: клітинки, що відповідають базисним змінним заповнюємо значеннями цих базисних змінних, а клітинки, що відповідають вільним змінним залишаємо незаповненими (порожніми).

Звертаємо увагу на те, що і для клітинки, заповненої нулем, і порожньої клітинки, перевезення від відповідної бази до відповідного пункту проводитись не буде. Але якщо клітинка заповнена нулем, то це означає, що їй відповідає базисна змінна, що дорівнює нулю (вироджений випадок), якщо ж клітинка порожня, то їй відповідає вільна, небазисна змінна, яка також дорівнює нулю.

Методи знаходження початкового опорного плану перевезень

Із сказаного вище випливає, що для знаходження опорного плану необхідно спланувати перевезення так, щоб заповненими були рівно $(m+n-1)$ клітинок. Для цього реалізується наступний алгоритм, що складається із $(m+n-1)$ кроків.

На кожному кроці заповнюється вибрана за певним критерієм одна клітинка, причому так, щоб або повністю задовольняються потреби відповідного пункту споживання (той, в стовпчику якого знаходиться клітинка, що заповнюються) або повністю вивозиться вантаж з відповідної бази (тієї, в рядочку якої знаходиться клітинка, що заповнюється).

В першому випадку ми можемо виключити стовпчик, що містить клітинку, яка заповнюється на цьому кроці, і вважати, що задача звелася до заповнення таблиці з числом стовпчиків, на одиницю меншим, ніж було перед цим кроком, але з тією ж кількістю рядочків із відповідно зміненим запасом вантажу на одній із баз; в другому випадку виключається рядочок, що містить клітинку, яка заповнюється і вважається, що таблиця звузилась на один рядочок при незмінній кількості стовпчиків і при зміні потреб відповідного пункту споживання.

Очевидно, що повторивши описаний крок $m+n-2$ разів, прийдемо до таблиці, яка складається із одного рядочка і одного стовпчика, тобто з однієї клітинки. Інакше кажучи, прийдемо до задачі з однієї базою і одним споживачем, причому в силу закритості транспортної задачі запаси залишеної бази рівні потребам залишеного пункту. Заповнюючи останню клітинку ми одночасно вивозимо весь вантаж з останньої бази і задовольняємо останній пункт споживання. В результаті виконання описаних дій, заповнивши рівно $m+n-1$ клітинок, ми отримаємо шуканий початковий опорний план перевезень.

Зауваження. Можливі випадки, коли на деякому кроці (не враховуючи останнього, для якого ця умова виконується завжди) потреби чергового споживача дорівнюватимуть запасам вантажу на черговій базі. Тоді, після заповнення відповідної клітинки, ми одночасно зменшуємо таблицю на один рядочок і один стовпчик. Але, згідно з заданим алгоритмом, при заповненні однієї клітинки ми повинні виключати з таблиці або один рядочок або один стовпчик.

В таких випадках або вважають, що повністю задовольняється пункт споживання, а на відповідній базі залишається "залишок" вантажу, рівний нулю, або вважають, що повністю вивезений вантаж з бази, а на відповідний пункт необхідно "довезти" вантаж у кількості нуль одиниць. Цей нуль ("залишок" або "потреба") необхідно вписати в одну із клітинок, що буде заповнюватись при одному з наступних кроків.

В залежності від того, за яким критерієм вибирається клітинка, яка буде заповнюватись розрізняють різні методи знаходження початкового опорного плану. Одні з методів дозволяють швидко знайти початковий базисний розв'язок, але велика ймовірність, що він буде суттєво відрізнятись від оптимального і для його знаходження доведеться робити багато перетворень. Є методи, якими довше знаходиться початковий опорний план перевезень, але він якщо не оптимальний, то близький до нього. Розглянемо три методи знаходження першого плану.

3.2 Метод північно-західного кута (діагональний метод).

При ньому на кожному кроці заповнюється по вказаним вище правилам клітинка, що знаходиться в лівому верхньому куті частини таблиці, що залишилась перед заповненням чергової клітинки.

Покажемо застосування цього методу на прикладі.

Задача 1. На трьох базах A_1, A_2, A_3 знаходиться однорідний вантаж у кількості 260 т, 170 т, 360 т відповідно. Цей вантаж необхідно перевезти до п'яти пунктів: 110 т до B_1, 110 т до B_2, 140 т до B_3, 140 т до B_4 і 290 до пункту B_5. Тарифи на перевезення, тобто вартості перевезення 1 т вантажу від баз до пунктів задачі подано у вигляді матриці $C = (C_{ij})$, де елемент C_{ij} - означає кількість грошових одиниць, які будуть витрачатись на перевезення кожної тонни вантажу від бази A_i до пункту B_j. Надалі умову транспортної задачі подаватимемо у вигляді

$a_1 = 260$, $a_2 = 170$, $a_3 = 360$;

$b_1 = 110$, $b_2 = 110$, $b_3 = 140$, $b_4 = 140$, $b_5 = 290$.

$$C = \begin{pmatrix} 36 & 6 & 31 & 21 & 39 \\ 38 & 24 & 29 & 16 & 30 \\ 33 & 47 & 40 & 15 & 35 \end{pmatrix}.$$

Запишемо дані умови у наступну таблицю.

<u>**Таблиця 1**</u>.

Пункти відправ.	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	36	6	31	21	39	260
A_2	38	24	29	16	30	170
A_3	33	47	40	15	35	360
Потреби	110	110	140	140	290	

Починаємо заповнювати табличку з клітинки, що знаходиться в лівому верхньому куті – клітинка (A_1B_1). На базі A_1 є 260 т вантажу, пункт B_1 потребує 110 т. $\min\{260; 110\} = 110$, отже у клітинку (A_1B_1) ставимо 110, тобто надаємо значення змінній $x_{11} = 110$ і вводимо її в базис. Цим самим ми повністю задовольняємо потреби пункту B_1, з баз A_2 і A_3 до B_1 везти вантаж не потрібно, а отже в клітинках (A_2B_1) і (A_3B_1) ставимо прочерк. Ці клітинки при подальшому заповненні не враховуємо. Змінні x_{21} і x_{31} - вільні. На базі A_1 залишиться $260 - 110 = 150$ т вантажу.

Таблиця 2

Пункти відправ.	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	36 110	6	31	21	39	260 (150)
A_2	38 -	24	29	16	30	170
A_3	33 -	47	40	15	35	360
Потреби	110(-)	110	140	140	290	

В залишеній частині таблиці в лівому верхньому куті знаходиться клітинка (A_1B_2), тому її заповнення – наступний крок. Пункт B_2 потребує 110 т, на базі A_1 залишилось 150 т. Отже, ставимо в клітинку (A_1B_2) - 110, в клітинках (A_2B_2) і

(A_2B_3) прочерк. Задовольняються потреби пункту B_2, на базі A_1 залишається $150 - 110 = 40$ т вантажу.

Таблиця 3

Пункти відправ.	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	36 110	6 110	31	21	39	260 (40)
A_2	38 -	24 -	29	16	30	170
A_3	33 -	47 -	40	15	35	360
Потреби	110(-)	110(-)	140	140	290	

На наступному кроці в верхньому лівому куті клітинка (A_1B_3). Пункт B_3 потребує 140 т вантажу на базі A_1 залишилось 40 т. Тому в клітинку A_1B_3 ставимо 40, запаси бази A_1 вичерпуються, в клітинки (A_1B_4) і (A_1B_5) ставимо прочерк. До пункту B_3 необхідно довезти $140 - 40 = 100$ т.

Таблиця 4

Пункти відправ.	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	36 110	6 110	31 40	21 -	39 -	260 (-)

A_2	38 -	24 -	29	16	30	170
A_3	33 -	47 -	40	15	35	360
Потреби	110(-)	110	140(100)	140	290	

В залишеній для заповнення частині таблиці із шести клітинок ліва верхня – клітинка (A_2B_3). На базі A_2 знаходиться 170 т вантажу, пункт B_3 потребує 100 т. $\min\{170;100\}=100$. Отже, в клітинку A_2B_3 ставимо 100, потреби B_3 повністю задовольняються, в клітинку (A_3B_3) ставимо прочерк на базі A_2 залишається $170-100=70$ т вантажу.

Таблиця 5

Пункти відправ.	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	36 110	6 110	31 40	21 -	39 -	260 (-)
A_2	38 -	24 -	29 100	16	30	170 (70)
A_3	33 -	47 -	40 -	15	35	360
Потреби	110(-)	110(-)	140(-)	140	290	

Залишились незаповненими чотири клітинки. Ліва верхня - (A_2B_4). $\min\{70;140\}=70$. Отже, ставимо в клітинку (A_2B_4) - 70. Запаси A_2 на цьому вичерпуються, в клітинку

(A_2B_5) ставимо прочерк. Пункт B_4 потребує ще $140 - 70 = 70$ т вантажу.

Таблиця 6.

Пункти відправ.	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	36 110	6 110	31 40	21 -	39 -	260 (-)
A_2	38 -	24 -	29 100	16 70	30 -	170 (-)
A_3	33 -	47 -	40 -	15	35	360
Потреби	110(-)	110(-)	140(-)	140(70)	290	

Наступними двома кроками заповнюємо послідовно клітинку $(A_3B_4) - 70$ і $(A_3B_5) - 290$ після чого отримуємо остаточно:

Таблиця 7

Пункти відправ.	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	36 110	6 110	31 40	21 -	39 -	260
A_2	38 -	24 -	29 100	16 70	30 -	170
A_3	33 -	47 -	40 -	15 70	35 290	360

Потреби	100	100	140	140	290	

Знайдений опорний план перевезень (базисний розв'язок) $x_{11} = 110$, $x_{12} = 40$, $x_{23} = 100$, $x_{24} = 70$, $x_{34} = 70$, $x_{35} = 290$. Як5 бачимо кількість базисних змінних рівна $m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$. Так як всі вони додатні, то знайдений план невироджений. Всі інші змінні - вільні і дорівнюють нулю.

Сумарні витирати для знайденого плану:

$S = 110 \cdot 36 + 110 \cdot 6 + 40 \cdot 31 + 100 \cdot 29 + 70 \cdot 16 + 70 \cdot 15 + 290 \cdot 35 =$

3.3 Метод мінімальної вартості

Ідея методу полягає в тому, що на кожному кроці заповнюють клітинку таблиці, яка має найменшу вартість перевезення одиниці вантажу. Якщо таких клітинок декілька, вибирають будь-яку з них. Такі дії повторюють доти, доки не буде розподілено весь вантаж між базами та пунктами споживання.

Нехай маємо наступну транспортну задачу:

Табл. 1.

Пункти відправ.	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	5	12	17	11	250
	16	9	3	21	20	

A_2						200
A_3	14	24	18	19	7	300
Потреби	80	170	30	170	300	

Найменша вартість перевезення – 3 для клітинки A_2B_3. Тому заповнення таблиці починаємо саме з неї, здійснюючи максимальне перевезення $\min\{200; 30\} = 30$. Отже, в клітинку A_2B_3 ставимо 30 при цьому повністю задовольнивши потреби B_3. Тому в клітинках A_1B_3 і A_3B_3 ставимо прочерк, вони заповнюватись не будуть, на наступних кроках їх не розглядаємо. На базі A_2 залишається $200 - 30 = 170$ т вантажу.

Табл. 2.

Пункти відправ.	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	5	12 -	17	11	250
A_2	16	9	3 30	21	20	200 (170)
A_3	14	24	18 -	19	7	300
Потреби	80	170	30(-)	170	300	

Серед клітинок, які залишились найменшу вартість перевезення – 5 має клітинка A_1B_2 $\min\{250; 170\} = 170$.

Отже, цю клітинку заповнюємо значенням 170. Потреби B_2 при цьому задовольняються, тому в A_2B_2 і A_3B_2 ставимо прочерк, на базі A_1 залишається $250-170=80$ т вантажу.

Табл. 3.

Пункти відправ.	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	5 170	12 -	17	11	250 (80)
A_2	16	9 -	3 30	21	20	200 (178)
A_3	14	24 -	18 -	19	7	300
Потреби	80	170(-)	30(-)	170	300	

Серед клітинок, що ще можуть бути заповнені найменшу вартість перевезення -7 має клітинка A_3B_5. На базі A_3 є в наявності 300 т вантажу, пункт B_5 потребує 300 т вантажу. Отже, заповнюючи клітинку A_3B_5 значенням 300 ми одночасно задовольняємо потреби пункту B_5 і вичерпуємо запаси бази A_3. В такому випадку відповідно до вказаних вище правил знаходження опорного розв'язку, в клітинку A_3B_5 ставимо значення 300 і або вважаємо, що повністю задовольнили потреби B_5, а на базі A_3 залишився вантаж у кількості "0", або, що повністю вичерпано ресурси бази A_3 на пункт B_5 необхідно довезти вантаж у кількості "0" одиниць.

Виберемо останнє.

Табл. 4.

Пункти відправ.	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	5 170	12 -	17	11	250 (80)
A_2	16	9 -	3 30	21	20	200 (170)
A_3	14 -	24 -	18 -	19 -	7 300	300 (-)
Потреби	80	170(-)	30(-)	170	300(0)	

Так як уявний нуль пункту B_5 буде виставлено в одну із клітинок A_1B_5 чи A_2B_5, то наступним кроком, так як вартість перевезення для клітинки A_1B_5 менша ніж для A_2B_5 $(11 < 20)$, то заповнюємо клітинку A_1B_5 значенням 0. При цьому задовольняються потреби пункту B_5, в клітинку A_2B_5 ставимо прочерк, а на базі A_1 залишається $80 - 0 = 80$ одиниць вантажу.

Табл. 5.

Пункти відправ.	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	5 170	12 -	17	11 0	250 (80)
A_2	16	9 -	3 30	21	20 -	200 (170)

A_3	14 -	24 -	18 -	19 -	7 300	300 (-)
Потреби	80	170(-)	30(-)	170	300(-)	

Серед залишених чотирьох клітинок найменшу вартість перевезення – 10 має клітинка A_1B_1. Запаси на базі A_1 - 80, потреби B_1 - також 80. Отже, заповнюємо цю клітинку значенням 80, але знову вважаємо, що ресурси A_1 вичерпано, а пункт B_1 потребує ще 0 одиниць вантажу.

Табл. 6.

Пункти відправ.	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 80	5 170	12 -	17 -	11 0	250 (-)
A_2	16	9 -	3 30	21	20 -	200 (170)
A_3	14 -	24 -	18 -	19 -	7 300	300 (-)
Потреби	80(0)	170(-)	30(-)	170	300(-)	

Наступним кроком заповнюємо уявним нулем клітинку A_2B_1.

Табл. 7.

Пункти відправ.	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 80	5 170	12 -	17 -	11 0	250 (-)

A_2	16 0	9 -	3 30	21	20 -	200 (170)
A_3	14 -	24 -	18 -	19 -	7 300	300 (-)
Потреби	80(-)	170(-)	30(-)	170	300(-)	

І завершує знаходження опорного плану перевезень заповнення клітинки A_2B_4 значенням 170, яким ми задовольняємо потреби останнього пункту B_4 і вичерпуємо ресурси останньої бази A_2.

Табл. 8.

Пункти відправ.	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 80	5 170	12 -	17 -	11 0	250 (-)
A_2	16 0	9 -	3 30	21 170	20 -	200 (-)
A_3	14 -	24 -	18 -	19 -	7 300	300 (-)
Потреби	80(-)	170(-)	30(-)	170(-)	300(-)	

Отже, знайдений базисний розв'язок $x_{11} = 80$, $x_{12} = 170$, $x_{15} = 0$, $x_{21} = 0$, $x_{23} = 30$, $x_{24} = 170$, $x_{35} = 300$. З A_2 до B_1 і з A_1 до

B_5 вантаж перевозитись не буде, але змінні x_{21} і x_{15} є базисним.

Кількість базисних змінних $m+n-1=7$. Так як серед них є такі, що рівні 0, то маємо вироджений випадок.

Затрати при знайденому опорному плані перевезень складуть:

$S=80\cdot 10+170\cdot 3+30\cdot 3+170\cdot 21+300\cdot 7=7070$ (грошових одиниць)

3.5 Метод подвійної переваги

Перед початком заповнення таблиці позначають клітинки, які мають найменшу вартість у рядках і стовпчиках. Таблицю починають заповнювати з клітинок, позначених двічі (мінімальні і в рядку і стовпчику). Далі заповнюють клітинки, позначені один раз, а вже потім – за методом мінімальної вартості.

Метод апроксимації Фогеля. За цим методом на кожному кроці визначають різницю між двома найменшими вартостями в кожному рядку і стовпчику транспортної таблиці. Серед усіх вибирають найбільшу і у відповідному рядку чи стовпчику заповнюють клітинку з найменшою вартістю, коли залишається незаповненим лише один рядок або стовпчик, то обчислення різниць припиняють, а таблицю продовжують заповнювати за методом мінімальної вартості.

Перехід від одного базису до іншого. Цикл перерозподілу

Як було зазначено вище оптимальному розв’язку транспортної задачі відповідає базисний розв’язок системи обмежень. Встановимо алгоритм переходу від одного базису до іншого.

Табл. 8 (1)

Пункти	Пункти призначення	Запаси

відправ.	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	36 110	6 110	31 40	21 -	39 -	260
A_2	38 -	24 -	29 100	16 70	30 -	170
A_3	33 -	47 -	40 -	15 70	35 290	360
Потреби	110	110	140	140	290	

Розглянемо табл. 8(1) – знайдений опорний план перевезень задачі 1. Тут базисні змінні x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{34}, x_{35}. Спробуємо ввести в базис, наприклад, змінну x_{25}, а одну з базисних змінних зробити вільною Це означає, що буде заповнюватись клітинка A_2B_5 деяким значенням $x*$. Але якщо ми з A_2 до B_5 сплануємо перевозити $x*$ одиниць вантажу, то кількість вантажу, що буде перевозитись з A_3 до B_5 зменшиться до $290 - x*$ одиниць, тому, що в сумі до B_5 має завезтись 290 одиниць вантажу, а з бази A_1 до B_5 вантаж не перевозиться.

В свою чергу, в силу того, що з бази A_3 має вивезтись 360 одиниць вантажу, то після зменшення перевезення до B_5 на $x*$, має збільшитись на це ж значення перевезення від A_3 до якогось іншого пункту. Якщо заповнити значенням $x*$ одну з незаповнених клітинок A_3B_1, A_3B_2, A_3B_3, то ми введемо ще одну базисну змінну, що суперечить постановленому завданню. Отже, необхідно збільшити до $70 + x*$ значення клітинки A_3B_4. Продовжуючи аналогічні міркування встановлюємо, що значення клітинки A_2B_4 зменшується до $70 - x*$. При цьому від бази A_2 буде перевезено 170 одиниць вантажу.

Табл. 8(2).

Пункти відправ.	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	36 110	6 110	31 40	21 -	39 -	260
A_2	38 -	24 -	29 100	16 $70-x^*$	30 x^*	170
A_3	33 -	47 -	40 -	15 $70+x^*$	35 $290-x^*$	360
Потреби	110	110	140	140	290	

Як видно з табл. 8(2) при такому перерозподілу виконуються всі умови системи обмежень. Так як ми хочемо ввести в базис x_{25}, то одна із базисних змінних має стати вільною. Для того, щоб вільною стала змінна x_{35} необхідно, щоб $x^*=290$, для $x_{24}: x^*=70$. Перший варіант неможливий так як при цьому x_{35} приймає від'ємного значення. Отже, надавши x^* значення $\min\{70; 290\}=70$, отримаємо новий базисний розв'язок і відповідно новий план перевезень.

Табл. 8(3)

Пункти відправ.	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	36 110	6 110	31 40	21 -	39 -	0
A_2	38 -	24 -	29 100	16 -	30 70	-8
A_3	33 -	47 -	40 -	15 140	35 220	-3
Потреби	36	6	31	18	38	

Базис $x_{11}=110$, $x_{12}=110$, $x_{13}=40$, $x_{23}=100$, $x_{25}=70$, $x_{34}=140$, $x_{35}=220$. Всі інші змінні вільні.

Встановимо алгоритм переходу від одного базисного розв'язку до іншого при якому одна з вільних змінних стає базисною, а одна з базисних – вільно. Для цього введемо поняття циклу перерозподілу.

Циклом перерозподілу називається послідовність змінних x_{ij} для якої виконуються наступні умови:

1) послідовність починається з вільної змінної і закінчується цією ж змінною, всі інші змінні в послідовності – базисні;

2) кожні дві сусідні в послідовності змінні відповідають клітинкам, що знаходяться або в одному рядочку або в одному стовпчику;

3) в послідовності жодна трійка сусідніх змінних не відповідає клітинкам, що знаходяться в одному рядочку або стовпчику.

Друга умова означає, що в двох сусідніх змінних в циклі або перші або другі індекси однакові.

Якщо кожні дві клітинки, що відповідають сусіднім змінним в циклі, сполучити відрізком прямої, то буде отримано геометричне зображення циклу – замкнена ламана, одна з вершин якої знаходиться у вільній клітинці, а інші – в заповнених (базисних).

Неважко довести, що при вказаному вище алгоритмі складання опорного плану для кожної із вільних клітинок існує один і тільки один цикл, що містить змінну, що їй відповідає, причому число вершин в циклі завжди парне.

Розглянемо знову табл. 8(1). Незаповненій клітинці A_2B_5 відповідає цикл: x_{25}, x_{35}, x_{34}, x_{24}, x_{25}.

Його геометричне зображення матиме вигляд

Табл. 8(4)

Пункти відправ.	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	36 110	6 110	31 40	21 -	39 -	
A_2	38 -	24 -	29 100	-* 16 70	+ 30 -	
A_3	33 -	47	40 -	+ 15 70	- 35 290	
Потреби						

Якщо ми збільшимо значення змінних x_{25}, для якої побудували цикл на величину x^*, то, переходячи послідовно від однієї вершини до іншої, в силу незмінності сум по рядкам і стовпчикам почергово зменшувати і збільшувати значення невідомих в циклі на те ж саме значення x^*. Для нашого циклу маємо:

а) старі значення: $x_{25} = 0$, $x_{35} = 290$, $x_{34} = 70$, $x_{24} = 70$.

б) нові значення: $x_{25} = x^*$, $x_{35} = 290 - x^*$, $x_{34} = 70 + x^*$, $x_{24} = 70 - x^*$.

Очевидно, що якщо приписати вершинам циклу почергово знаки “+” та “-“ , причому вільній клітинці знак “+” , то у вершинах із знаком “+” число x^* додається до попереднього значення невідомого, що відповідає цій клітинці, а в вершинах із знаком ”-“ – віднімається.

Для того, щоб одна з базисних змінних стала вільною, необхідно в якості x^* вибрати найменше з чисел, що стоять в вершинах циклу із знаком “-“. При цьому значення однієї з базисних змінних стане рівним нулю, значення всіх інших залишиться невід’ємним. Для нашого циклу маємо:

$$\underset{+}{x_{25}}, \underset{-}{x_{35}}, \underset{+}{x_{34}}, \underset{-}{x_{24}}, \underset{+}{x_{25}}.$$

$$x^* = \min\{x_{35}; x_{24}\} = \min\{290; 70\} = 70.$$

Тоді в новому базисному розв’язку: $x_{25} = 0 + 70 = 70$; $x_{35} = 290 - 70 = 220$; $x_{34} = 70 + 70 = 140$; $x_{24} = 70 - 70 = 0$.

Тобто від розв’язку $x_{11} = 110$, $x_{12} = 110$, $x_{13} = 40$, $x_{23} = 100$, $x_{24} = 70$, $x_{34} = 70$, $x_{35} = 290$ прийшли до розв’язку $x_{11} = 110$, $x_{12} = 110$, $x_{13} = 40$, $x_{23} = 100$, $x_{25} = 70$, $x_{34} = 140$, $x_{35} = 220$.

Зауваження 1. Можливий випадок, коли мінімальне значення серед базисних невідомих, що стоять в клітинках із знаком “-“ приймається в декількох клітинках. Тоді вільною залишають тільки одну з них (з більшим тарифом), а інші заповнюють умовним нулем (вироджений випадок).

Наприклад, якщо маємо цикл:

Пункти відправ.	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	…	…	31 …	21 …	39 …	…
A_2	…	…	-* 10 30	- …	+ 5 -	…
			+ 20	+	- 15	

A_3	…	…	50	…	30	…
Потреби						

То після перерахунку отримаємо:

Пункти відправ.	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	…	…	31 …	21 …	39 …	…
A_2	…	…	10 0	…	5 30	…
A_3	…	…	20 80	…	5 -	…
Потреби						

Тут $x^* = \min\{30; 30\} = 30$. Так як $15 > 10$, то залишаємо незаповненою клітинку з тарифом 15.

Зауваження 2. Можливий випадок, що і саме мінімальне значення серед клітинок циклу і з знаком “-“ рівне нулю. Тоді перетворення таблиці зводяться до перестановки цього уявного нуля у вільну клітинку. Значення всіх невідомих при цьому залишаються незмінними, але розв’язки вважаються різними, так як базиси відмінні. Обидва розв’язки при цьому вироджені.

Наприклад,

Пункти відправ.	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
			31	21	39	

A_1	…	…	…	…	…	…
A_2	…	…	* 5 -	- … 	- 10 -	…
A_3	…	…	- 15 0	+ … 	+ 20 20	…
Потреби						

Пункти відправ.	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	…	…	31 …	21 …	39 …	…
A_2	…	…	5 0	…	10 15	…
A_3	…	…	15 -	…	20 20	…
Потреби						

Описане вище перетворення таблиці і перевезень, в результаті якого здійснюється перехід від одного базису до іншого називається перерозподілом по циклу.

Запишемо його алгоритм:

1. Для незаповненої клітинки складається цикл.

2. Клітинкам, що увійшли до циклу приписується почергово знаки “+” та “-“, причому порожній клітинці приписується знак “+”.

3. Знаходиться мінімальне значення x^* серед змінних, що увійшли в цикл із знаком “-“.

4. У новому плані перевезень значення змінних, що увійшли в цикл із знаком “+” збільшується на x^*, а із знаком “-“ зменшується на x^*. Значення змінних, що не увійшли в цикл залишаються без змін.

5. Вільна змінна, що відповідала незаповненій клітинці циклу стає базисною, а базисна змінна циклу із знаком “-“ із значенням якої x^* стає вільною.

3.6 Покращення плану перевезень. Потенціали.

З’ясуємо тепер, як перерозподіл по циклу впливає на загальну суму витрат на перевезення і при якій умові ці затрати зменшується.

Нехай x_{pq} - вільна змінна, для якої побудовано цикл і по ньому зроблено перерозподіл з деяким числом x^*. Якщо вершині циклу, що знаходиться в i -ому рядочку і j -ому стовпчику приписано знак “+” , то значення невідомої x_{ij}, що відповідає цій вершині збільшується на x^*, що в свою чергу веде до збільшення витрат на величину $c_{ij} \cdot x^*$, де c_{ij} - тариф цієї клітинки. Якщо ж вершині приписано знак “-“, то значення x_{ij} зменшується на x^*, що зменшує витрат на величину $c_{ij} x^*$.

Введемо для величини клітинок x_{pq}, як суми тарифів клітинок, що увійшли в цикл взяті із знаком, що приписаний відповідній вершині циклу, побудованого для x_{pq}. Наприклад, для розглянутого циклу (табл. № 8.4),

$$\underset{+}{x_{25}},\ \underset{-}{x_{35}},\ \underset{+}{x_{34}},\ \underset{-}{x_{24}},\ \underset{+}{x_{25}}\ .$$

Алгебраїчна сума:

$$S_{25} = c_{25} - c_{35} + c_{34} - c_{24} = 30 - 35 + 15 - 16 = -6\ .$$

Очевидно, що в цілому при перерозподілі по циклу, що відповідає вільній змінній x_{pq} загальна сума витрат на перевезення зміниться на добуток алгебраїчної суми s_{pq} на x^*, тобто на величину $s_{pq} \cdot x^*$. Тому в силу невід’ємності x^*, якщо алгебраїчна сума s_{pq} для x_{pq} від’ємна $\left(s_{pq}\right)<0$, то перерозподіл по циклу, що відповідає x_{pq}, приводить до зменшення загальної суми витрат на перевезення. Якщо $s_{pq}>0$, то перерозподіл приводить до збільшення загальної суми витрат. Наприклад, для циклу $\underset{+}{x_{25}}, \underset{-}{x_{35}}, \underset{+}{x_{34}}, \underset{-}{x_{24}}, \underset{+}{x_{25}}$ $s_{25}=-6<0$, отже, перерозподіл по цьому циклу зменшує затрати на $6\cdot 70=420$. Так як плану, що відповідає табл. 8(1).

$S_1 = 110\cdot 36 + 110\cdot 6 + 40\cdot 31 + 100\cdot 29 + 70\cdot 16 + 70\cdot 15 + 290\cdot 35 = 21080$

Після перерозподілу (табл. 8(3)):

$S_1 = 110\cdot 36 + 110\cdot 6 + 40\cdot 31 + 100\cdot 29 + 70\cdot 30 + 140\cdot 15 + 220\cdot 35 = 20660$

Як бачимо $S_2 = S_1 - 420$.

Обчислення алгебраїчних сум тарифів для кожного із вільних невідомих можна проводити без побудови відповідних циклів, що є громіздким процесом. Припишемо кожній базі A_i деяке число α_i $(i=1,2,\ldots,m)$, а кожному споживачу B_j число β_j, так щоб для всіх заповнених клітинок виконувалась умова

$$\alpha_i + \beta_j = C_{ij}. \tag{3.1}$$

де C_{ij} - тарифи відповідних клітинок. Числа α_i і β_j називаються потенціалами відповідних баз та пунктів споживання.

Знаючи потенціали, легко обчислити алгебраїчну суму тарифів s_{pq}. Дійсно, якщо замінити тарифи заповнених клітинок циклу відповідно до формул (3.1), то в силу чергування знаків всі потенціали, крім α_p і β_q скоротяться і отримаємо:

$$S_{pq} = C_{pq} - \left(\alpha_p + \beta_q\right).$$

Так, наприклад, для циклу $\underset{+}{x_{25}}, \underset{-}{x_{35}}, \underset{+}{x_{34}}, \underset{-}{x_{24}}, \underset{+}{x_{25}}$

$$S_{25} = c_{25} + c_{34} - c_{24} = c_{25} - (\alpha_3 + \beta_5) + (\alpha_3 + \beta_4) - (\alpha_2 + \beta_4) =$$

$$= c_{25} - \alpha_3 - \beta_5 + \alpha_3 + \beta_4 - \alpha_2 + \beta_4 = c_{25} - (\alpha_2 + \beta_5).$$

З означення для базисних (заповнених) клітинок сума потенціалів рядочка і стовпчика, в яких знаходиться ця клітинка дорівнює тарифу цієї клітинки (3.1). Якщо ж клітинка незаповнена, то суму потенціалів

$$\alpha_p + \beta_q = C'_{pq} \tag{3.2}$$

називають непрямим тарифом цієї клітинки.

Відповідно алгебраїчна сума тарифів для вільної клітинки дорівнює різниці її "істинного" тарифу і непрямого тарифу

$$S_{pq} = c_{pq} - c'_{pq} . \tag{3.3}$$

Із 3.3 випливає, що якщо непрямий тариф для даної вільної клітинки більший її істинного тарифу, то відповідна алгебраїчна сума тарифів буде від'ємна, якщо менший, то додатне.

Потенціали можна знайти із системи рівнянь (3.1). Так як заповнених клітинок $m+n-1$, кількість $\alpha_i - m$, кількість $\beta_j - n$, то маємо систему $(m+n-1)$ рівнянь з $(m+n)$ невідомими. Так як невідомих на одиницю більше ніж рівнянь, то один із потенціалів ми можемо вибрати довільно. Як правило, покладають $\alpha_1 = 0$. Тоді інші потенціали легко визначаються з рівнянь (3.1).

Наприклад, для плану табл. 8(1).

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 36 \\ \alpha_1 + \beta_2 = 6 \\ \alpha_1 + \beta_3 = 31 \\ \alpha_2 + \beta_3 = 29 \\ \alpha_2 + \beta_4 = 16 \\ \alpha_3 + \beta_4 = 15 \\ \alpha_3 + \beta_5 = 35 \end{cases} .$$

Тут для всіх заповнених клітинок ми записали умови $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$. Наприклад, для клітинки A_2B_3: $\alpha_2 + \beta_3 = 29$.

Покладемо $\alpha_1 = 0$. Тоді $\beta_1 = 36 - \alpha_1 = 36 - 0 = 36$; $\beta_2 = 6$, $\beta_3 = 31$. Далі $\alpha_2 = 29 - \beta_3 = 29 - 31 = -2$; $\beta_4 = 16 - \alpha_2 = 16 - (-2) = 18$; $\alpha_3 = 15 - \beta_4 = 15 - 18 = -3$; $\beta_5 = 35 - \alpha_3 = 35 - (-3) = 38$. Отже, отримали розв'язок системи

$$\begin{array}{ll} & \beta_1 = 36 \\ \alpha_1 = 0 & \beta_2 = 6 \\ \alpha_2 = -2 & \beta_3 = 31 \\ \alpha_3 = -3 & \beta_4 = 18 \\ & \beta_5 = 38 \end{array}$$

Знайдемо тепер непрямі тарифи для вільних клітинок і порівняємо їх з істинними тарифами:

$c'_{14} = \alpha_1 + \beta_4 = 0 + 18 = 18 < 21 = c_{14}$;

$c'_{15} = \alpha_1 + \beta_5 = 0 + 38 = 38 < 39 = c_{15}$;

$c'_{21} = \alpha_2 + \beta_1 = -2 + 36 = 34 < 38 = c_{21}$;

$c'_{22} = \alpha_2 + \beta_2 = -2 + 6 = 4 < 24 = c_{22}$;

$c'_{25} = \alpha_2 + \beta_5 = 36 > 30 = c_{25}$;

$c'_{31} = \alpha_3 + \beta_1 = -3 + 36 = 33 = c_{31}$;

$c'_{32} = \alpha_3 + \beta_2 = -3 + 6 = 3 < 47 = c_{32}$;

$c'_{33} = \alpha_3 + \beta_3 = -3 + 31 = 28 < 40 = c_{33}$.

Лише для клітинки із змінною x_{25} непрямі тарифи більші за істинні, відповідно лише для неї будемо мати від'ємну алгебраїчну суму тарифів:

$s_{25} = 30 - 36 = -6$.

Зауваження 1. Можна показати, що якщо суму всіх затрат по даному плану перевезень виразити через вільні невідомі (для цього потрібно виключити базисні невідомі з виразу для s, то коефіцієнт при кожному з таких невідомих буде дорівнювати алгебраїчній сумі тарифів по циклу, що відповідає їй в таблиці перевезень. Це підтверджує, що перерахунок по циклу є специфічною формою застосування симплекс-метода до розв'язання транспортної задачі.

3.7 Критерії оптимальності базисного розв'язку транспортної задачі. Методи відшукання оптимального розв'язку.

Із сказаного в попередньому пункті випливає наступний критерій оптимальності базисного розв'язку транспортної задачі: якщо для деякого базисного плану перевезень алгебраїчні суми тарифів по циклам для всіх вільних клітин невід'ємні, то цей план оптимальний.

Так як умова

$s_{pq} \geq 0$ рівносильна умові $c'_{pq} = \alpha_p + \beta_q \leq c_{pq}$, то критерієм оптимальності можна вважати неперевищення для всіх вільних клітин непрямих тарифів істинних.

Звідси випливає спосіб знаходження оптимального розв'язку транспортної задачі, який полягає в тому, що маючи деякий базисний розв'язок обраховують алгебраїчні суми тарифів для вільних клітинок. Якщо критерій виконується, то даний розв'язок є оптимальним. Якщо ж є вільні члени клітинки з від'ємними алгебраїчними сумами тарифів, то переходять до нового базису, зробивши перерахунок по циклу, що відповідає одній з таких клітинок.

<u>Зауваження</u>. Ймовірність швидкого знаходження оптимального розв'язку найбільша, якщо будувати цикл для вільної клітинки, якій відповідає найбільша по модулю від'ємна алгебраїчна сума тарифів.

Отриманий новий базисний розв'язок буде кращим вихідного – затрати на його реалізацію будуть меншими. Для нового розв'язку також перевіряють виконання критерія оптимальності і у випадку необхідності знову роблять перерахунок по циклу для однієї з вільних клітинок з від'ємною сумою тарифів і т. д.

Через скінченну кількість кроків обов'язково приходять до оптимального базисного розв'язку.

У випадку, коли алгебраїчні суми тарифів для всіх вільних клітинок додатні оптимальний розв'язок єдиний. Якщо ж всі алгебраїчні суми невід'ємні, але серед них є алгебраїчні суми рівні нулю, то оптимальний розв'язок не єдиний: при перерозподілу по циклу для клітинки з s_{pq} ми отримаємо оптимальний розв'язок, відмінний від вихідного (затрати по обом планам будуть однакові).

В залежності від методів підрахунку алгебраїчних сум тарифів для вільних клітинок розрізняють два методи відшукання оптимального розв'язку транспортної задачі:

I. Розподільний метод. При цьому методі для кожної незаповненої клітинки будують цикл і для кожного циклу безпосередньо обчислюють алгебраїчну суму тарифів.

II. Метод потенціалів. При цьому методі попередньо знаходять потенціали баз і пунктів споживання, а потім обчислюють для кожної незаповненої клітинки алгебраїчну суму тарифів за допомогою потенціалів. Або, що рівносильно порівнюють непрямі тарифи з істинними, при цьому умови невід'ємності алгебраїчних сум замінюються умовою, що непрямі тарифи не перевищують істинних.

Переваги методу потенціалів полягають в тому, що відпадає необхідність побудови циклу для кожної з незаповнених клітинок і спрощується обчислення алгебраїчних сум тарифів. Цикл будується тільки один – той, по якому буде проводитись перерахунок.

Розв'яжемо методом потенціалів наступну транспортну задачу; дані якої занесені в таблицю.

Пункти відправ.	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	70	50	15	80	70	300
	80	90	40	60	85	

A_2						150
A_3	50	10	90	11	25	250
Потреби	170	110	100	120	200	

Знайдемо опорний план перевезень методом північно-західного кута, заповнюючи на кожному кроці в рамках обмежень клітинку, що знаходиться в лівому верхньому куті частини таблиці, що складається з клітинок, які маємо право заповнювати. Отримаємо

Табл. 8(6).

Пункти відправ.	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	70 170	- 50 110	+ 15 20	80	70	300
A_2	80	90	- 40 80	+ 60 70	85	150
A_3	50	+ 10	90	- 11 50	25 200	250
Потреби	170	110	100	120	200	

Складемо систему для потенціалів заповнених клітинок: $\alpha_1 + \beta_j = c_{ij}$.

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 70 \\ \alpha_1 + \beta_2 = 50 \\ \alpha_1 + \beta_3 = 15 \\ \alpha_2 + \beta_3 = 40 \\ \alpha_2 + \beta_4 = 60 \\ \alpha_3 + \beta_4 = 11 \\ \alpha_3 + \beta_5 = 25 \end{cases}$$

Маємо сім рівнянь, що містять вісім невідомих. Покладемо $\alpha_1 = 0$. Тоді однозначно отримуємо:

I рівняння: $\beta_1 = 70 - \alpha_1 = 70 - 0 = 70$

II рівняння: $\beta_2 = 50 - \alpha_1 = 50 - 0 = 50$

III рівняння $\beta_3 = 15 - \alpha_1 = 15 - 0 = 15$

IV рівняння $\alpha_2 = 40 - \beta_3 = 40 - 15 = 25$

V рівняння $\beta_4 = 60 - \alpha_2 = 60 - 25 = 35$

VI рівняння $\alpha_3 = 11 - \beta_4 = 11 - 45 = -24$

VII рівняння: $\beta_5 = 25 - \alpha_2 = 25 - (-24) = 49$.

Отримали:

$$\begin{array}{ll} & \beta_1 = 70 \\ \alpha_1 = 0 & \beta_2 = 50 \\ \alpha_2 = -25 & \beta_3 = 15 \\ \alpha_3 = -24 & \beta_4 = 35 \\ & \beta_5 = 49 \end{array}$$

Знайдемо тепер непрямі тарифи для вільних клітинок і порівняємо їх з істинними тарифами.

Наприклад, для незаповненої клітинки A_1B_4:

$c'_{14} = \alpha_1 + \beta_4 = 0 + 35 = 35 < 80 = c_{14}$; Аналогічно для інших незаповнених клітинок. Маємо:

$c'_{15} = \alpha_1 + \beta_5 = 49 < 70 = c_{15}$;

$c'_{21} = \alpha_2 + \beta_1 = 95 > 80 = c_{21}$;

$c'_{22} = \alpha_2 + \beta_2 = 75 < 90 = c_{22}$;

$c'_{25} = \alpha_2 + \beta_5 = 74 < 85 = c_{25}$;

$c'_{31} = \alpha_3 + \beta_1 = 46 < 50 = c_{31}$;

$c'_{32} = \alpha_3 + \beta_2 = 26 > 10 = c_{32}$;

$c'_{33} = \alpha_3 + \beta_3 = -9 < 90 = c_{33}$.

Для клітинок, що відповідають змінним x_{21} і x_{32} непрямі тарифи більші за істинні, отже знайдений план перевезень не оптимальний. Для цих клітинок маємо від’ємні алгебраїчні суми тарифів:

$S_{21} = c_{21} - \tilde{c}_{21} = 80 - 95 = -15$;

$S_{32} = c_{32} - \tilde{c}_{32} = 10 - 26 = -16$.

Так як $|S_{32}| > |S_{21}|$, побудуємо цикл для змінної x_{32}:

$\underset{+}{x_{32}}, \underset{-}{x_{34}}, \underset{+}{x_{24}}, \underset{-}{x_{23}}, \underset{+}{x_{13}}, \underset{+}{x_{12}}, \underset{+}{x_{32}}$. Знайдемо мінімальне значення серед значень змінних, що увійшли у цикл із знаком “-“ $\min\{x_{34}; x_{23}; x_{12}\} = \min\{50; 80; 110\} = 50$.

Зробимо перерахунок по вказаному циклу, додавши до значень x_{32}, x_{24}, x_{13} 50 і віднявши 50 від значень x_{34}, x_{23}, x_{12}. Отримаємо новий план перевезень

Пункти відправ.	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	- 70 170	50 60	+ 15 70	80	70	
A_2	+ 80	90	- 40 30	60 120	85	
A_3	50	10 30	90	11	25 200	
Потреби	170	110	100	120	200	

Знову складемо систему для потенціалів заповнених клітинок:

$$\begin{cases} \alpha_1+\beta_1=70 \\ \alpha_1+\beta_2=50 \\ \alpha_1+\beta_3=15 \\ \alpha_2+\beta_3=40 \\ \alpha_2+\beta_4=60 \\ \alpha_3+\beta_4=11 \\ \alpha_3+\beta_5=25 \end{cases}$$

Її розв'язок:

	$\beta_1=70$
$\alpha_1=0$	$\beta_2=50$
$\alpha_2=-25$	$\beta_3=15$
$\alpha_3=-10$	$\beta_4=35$
	$\beta_5=65$

Знайдемо непрямі тарифи для вільних клітинок і порівняємо їх з вершинами:

$c'_{14}=\alpha_1+\beta_4=35<80=c_{14}$;

$c'_{15}=\alpha_1+\beta_5=65<70=c_{15}$;

$c'_{21}=\alpha_2+\beta_1=95>80=c_{21}$;

$c'_{22}=\alpha_2+\beta_2=75<90=c_{22}$;

$c'_{25}=\alpha_2+\beta_5=90>85=c_{25}$;

$c'_{31}=\alpha_3+\beta_1=15<50=c_{31}$;

$c'_{33}=\alpha_3+\beta_3=-25<90=c_{33}$;

$c'_{34}=\alpha_3+\beta_4=-5<11=c_{34}$.

Знову план не оптимальний. Умови оптимальності не виконуються для x_{25} і x_{21}. Відповідні алгебраїчні суми тарифів.

$S_{21}=c_{21}-c'_{21}=80-95=-15$;

$S_{32}=85-90=-16$.

Так як $|S_{21}|>|S_{25}|$, побудуємо цикл для змінної x_{21}:

$\underset{+}{x_{21}}, \underset{-}{x_{23}}, \underset{+}{x_{13}}, \underset{-}{x_{11}}, \underset{+}{x_{21}}$. Знайдемо мінімальне значення серед значень змінних, що увійшли у цикл із знаком "-" $\min\{x_{23}; x_{11}\}=\min\{170; 30\}=30$.

Зробимо перерахунок по вказаному циклу збільшивши значення x_{21} та x_{13} на 30 і зменшивши на 30 значення x_{23} та x_{11}. Отримаємо новий план перевезень

Пункти відправ.	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	70 140	50 60	15 100	80	70	
A_2	80 30	90	40	60 120	85	
A_3	50	10 30	90	11	25 200	
Потреби						

Знову складемо систему потенціалів і розв'яжемо її.

$$\begin{cases} \alpha_1+\beta_1=70 \\ \alpha_1+\beta_2=50 \\ \alpha_1+\beta_3=15 \\ \alpha_2+\beta_1=80 \\ \alpha_2+\beta_4=60 \\ \alpha_3+\beta_4=10 \\ \alpha_3+\beta_5=25 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \alpha_1=0 \\ \alpha_2=10 \\ \alpha_3=-40 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \beta_1=70 \\ \beta_2=50 \\ \beta_3=15 \\ \beta_4=50 \\ \beta_5=65 \end{matrix}$$

Знайдемо непрямі тарифи для вільних клітинок і порівняємо їх з істинними:

$c'_{14} = \alpha_1 + \beta_4 = 50 < c_{14}$;

$c'_{15} = \alpha_1 + \beta_5 = 65 < c_{15}$;

$c'_{22} = \alpha_2 + \beta_2 = 60 < c_{22}$;

$c'_{23} = \alpha_2 + \beta_3 = 25 < c_{23}$;

$c'_{25} = \alpha_2 + \beta_5 = 75 < c_{25}$;

$c'_{31} = \alpha_3 + \beta_1 = 30 < c_{31}$;

$c'_{33} = \alpha_3 + \beta_3 = -25 < c_{33}$;

$c'_{34} = \alpha_3 + \beta_4 = 10 < c_{34}$.

Для всіх незаповнених клітинок непрямі тарифи менші за істинні, отже знайдений план перевезень оптимальний. Мінімальні затрати складуть:

$$S_{\min} = S_3 = 140 \cdot 70 + 60 \cdot 50 + 100 \cdot 15 + 30 \cdot 80 + 120 \cdot 60 + 30 \cdot 10 + 200 \cdot 25 = 29400$$

Для порівняння сумарні затрати для перших двох планів складають:

$$S_1 = 170 \cdot 70 + 110 \cdot 50 + 20 \cdot 15 + 80 \cdot 40 + 70 \cdot 60 + 50 \cdot 11 + 200 \cdot 25 = 30650$$

$$S_2 = 170 \cdot 70 + 60 \cdot 50 + 70 \cdot 15 + 30 \cdot 40 + 120 \cdot 60 + 30 \cdot 10 + 200 \cdot 25 = 29850$$

$S_1 > S_2 > S_3$.

Відповідь. Мінімальні сумарні затрати на перевезення складають 29400 грошових одиниць при такому плані перевезень:

$x_{11} = 140$, $x_{12} = 60$, $x_{13} = 100$, $x_{21} = 30$, $x_{24} = 120$, $x_{32} = 30$, $x_{35} = 200$.

3.8 Транспортна задача відкритого типу

Якщо для транспортної задачі умова балансу не виконується

$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$, то одержуємо відкриту модель транспортної задачі.

Нехай $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Для приведення такої задачі до задачі закритого типу необхідно ввести фіктивний $(n+1)$-й пункт споживання B_{n+1} з потребою

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

одиниць вантажу і прийняти, що всі тарифи на перевезення від баз до цього пункту рівні нулю. В результаті отримуємо розширену задачу з m базами та $n+1$ пунктом споживання, для якої виконується умова балансу

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n+1} b_j .$$

Якщо в оптимальному базисному розв'язку цієї задачі отримаємо значення змінної $x_{i\,n+1} = \bar{x}^*$, то це означатиме, що відповідно до оптимального плану перевезення на базі A_i залишиться $\bar{x}^*$ одиниць вантажу.

Якщо для транспортної задачі

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

то для приведення її до задачі закритого типу необхідно ввести фіктивну $(m+1)$- $у$ базу A_{m+1} з запасом

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

одиниць вантажу, і прийняти, що всі тарифи на перевезення від цієї бази до пунктів споживання рівні нулю. В результаті отримуємо розширену задачу з $(m+1)$-ю базою та n пунктами споживання, для якої виконується умова балансу:

$$\sum_{i=1}^{m+1} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Якщо в оптимальному базисному розв'язку цієї задачі отримаємо значення змінної $x_{m+1\,j} = \bar{x}$, то це означатиме, що до пункту B_j не довезено $\bar{x}$ одиниць вантажу.

Приклад. Розв’яжемо транспортну задачу, дані якої занесені до таблиці

Пункти відправ.	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1	3	2			30
A_2	2	6	5			40
A_3	3	5	7			50
Потреби	35	30	60			

Встановимо до якого типу відноситься задача

$\sum a_i = 30 + 40 + 50 = 120$.

$\sum b_j = 35 + 30 + 60 = 125$. $\sum a_1 < \sum b_j$. Отже, маємо транспортну задачу відкритого типу. Щоб привести її до закритого типу введемо уявну базу A_4, на якій нібито є $125 - 120 = 5$ одиниць вантажу. Тарифи на перевезення від цієї бази до пунктів споживання вважаємо рівними нулю. Складемо опорний план перевезень методом північно-західного кута.

Пункти відправ.	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1 30	7 -	6 -			30
	2	- 6	+ 5			

A_2	5	30	5			40
A_3	5 -	+ 5 -	- 7 50			50
A_4	0 -	0 -	0 5			5
Потреби	35	30	60			

Перевіримо план на оптимальність. Складемо систему для потенціалів заповнених клітинок. Розв'яжемо систему, поклавши $\alpha_1 = 0$.

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 1 \\ \alpha_1 + \beta_2 = 2 \\ \alpha_2 + \beta_2 = 6 \\ \alpha_2 + \beta_3 = 5 \\ \alpha_3 + \beta_3 = 7 \\ \alpha_3 + \beta_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2 &= 1 \\ \alpha_3 &= 3 \\ \alpha_4 &= -4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \beta_1 &= 1 \\ \beta_2 &= 5 \\ \beta_3 &= 4 \end{aligned}$$

Порівняємо непрямі тарифи незаповнених клітинок і істинні.

$c'_{12} = \alpha_1 + \beta_2 = 5 < 7 = c_{12}$;

$c'_{13} = \alpha_1 + \beta_3 = 4 < 6 = c_{13}$;

$c'_{31} = \alpha_3 + \beta_1 = 4 < 5 = c_{31}$;

$c'_{32} = \alpha_3 + \beta_2 = 8 > 6 = c_{32}$;

$c'_{41} = \alpha_4 + \beta_1 = -3 < 0$;

$c'_{41} = \alpha_4 + \beta_1 = -3 < 0$;

$c'_{42} = \alpha_4 + \beta_2 = 1 > 0$;

Для змінних x_{32} і x_{42} (відповідно клітинки A_3B_2 і A_4B_2) не виконуються умови оптимальності, отже знайдений план не оптимальний.

$S_{32} = c_{32} - c'_{32} = 5 - 8 = -3$.

$S_{42} = c_{42} - c'_{42} = 0 - 1 = -1$.

Так як $|S_{32}| > |S_{42}|$ будуємо цикл для x_{32}:

$\underset{+}{x_{32}}, \underset{-}{x_{33}}, \underset{+}{x_{23}}, \underset{-}{x_{22}}, \underset{+}{x_{32}}$. $\min\{x_{33}; x_{22}\} = \min\{30; 50\} = 30$.

Зробимо перерозподіл по побудованому збільшивши на 30 значення змінних x_{32} і x_{23} і зменшивши на 30 значення змінних x_{33} і x_{22}. Отримуємо новий план перевезень.

Пункти відправ.	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1 30	7	6			
A_2	2 5	6	5 35			
A_3	5	5 30	7 20			
A_4	0	0	0 5			
Потреби						

Перевіримо план на оптимальність:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 1 \\ \alpha_2 + \beta_1 = 2 \\ \alpha_2 + \beta_3 = 5 \\ \alpha_3 + \beta_2 = 5 \\ \alpha_3 + \beta_3 = 7 \\ \alpha_4 + \beta_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2 &= 1 \\ \alpha_3 &= 3 \\ \alpha_4 &= -4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \beta_1 &= 1 \\ \beta_2 &= 2 \\ \beta_3 &= 4 \end{aligned}$$

$c'_{12} = \alpha_1 + \beta_2 = 2 < 7 = c_{12}$;

$c'_{13} = \alpha_1 + \beta_3 = 4 < 6 = c_{13}$;

$c'_{31} = \alpha_2 + \beta_2 = 3 < 6 = c_{22}$;

$c'_{31} = \alpha_3 + \beta_1 = 4 < 5 = c_{31}$;

$c'_{41} = \alpha_4 + \beta_1 = -3 < 0$;

$c'_{42} = \alpha_4 + \beta_2 = -2 < 0$.

Для всіх порожніх клітинок виконуються умови оптимальності. $\left(c'_{ij} \le c_{ij}\right)$, отже, знайдений план перевезень оптимальний. Мінімальні затрати складають:

$S = 30 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 35 \cdot 5 + 30 \cdot 5 + 20 \cdot 7 = 505$.

Відповідь. Мінімальні сумарні затрати на перевезення вантажу складають 505 грошових одиниць при такому плані перевезень:

$x_{11} = 30$, $x_{21} = 5$, $x_{23} = 35$, $x_{32} = 30$, $x_{33} = 20$. При цьому на пункт споживання B_3 не довезеться 5 одиниць вантажу $\left(x_{43} = 5\right)$.

4. Цілочисельні задачі лінійного програмування. Метод Гоморі

Екстремальна задача, змінні якої можуть приймати лише цілочисельні значення, називаються задачами цілочисельного програмування.

В загальному випадку в математичній моделі задачі цілочисельного програмування як цільова, так і обмеження можуть бути лінійні, нелінійні та змішані. Обмежимось випадком, коли цільова функція та система обмежень є лінійними.

Приклад. В цеху підприємства вирішено встановити додаткове обладнання, для розміщення якого виділено $\frac{19}{3}$ м^2 площі. На придбання обладнання підприємство може витратити не більше 10 тисяч грн. При цьому воно може придбати обладнання двох видів. Комплект обладнання I –го виду коштує 1 тисячу грн., II –го 3 тисячі грн. Придбання одного комплекту обладнання I –го виду дозволяє збільшити випуск продукції в зміну на 2 одиниці, а одного комплекту обладнання II –го виду – на 4 одиниці. Знаючи, що для встановлення одного комплекту обладнання I виду необхідного 2 м^2 площі, а обладнання II-го виду – 1 м^2 площі. Визначити такий набір додаткового обладнання, який дає можливість максимального збільшити випуск продукції.

Розв'язання. Складемо математичну модель задачі. Припустимо, що підприємство придбає x_1 комплект обладнання І –го виду і x_2 комплектів ІІ –го виду. Тоді змінні x_1 та x_2 повинні задовольняти наступні нерівності:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le \dfrac{19}{3}, \\ x_1 + 3x_2 \le 10. \end{cases} \tag{1}$$

Якщо підприємство придбає вказану кількість обладнання, то загальний випуск продукції складе

$$F = 2x_1 + 4x_2 . \tag{2}$$

За своїм економічним змістом змінні x_1 та x_2 можуть приймати лише цілі невід'ємні значення, тобто

$$x_1,\ x_2 \le 0 . \tag{3}$$

$$x_1,\ x_2 \text{ - цілі.} \tag{4}$$

Таким чином, приходимо до наступної математичної задачі. Знайти максимальне значення лінійної функції F (2) при виконанні умов (1), (3), (4). Так як змінні можуть приймати лише цілі значення, то дана задача є задачею цілочисельного лінійного програмування.

Якщо кількість невідомих в задачі рівна двом, розв'язок задачі можна знайти графічним методом. Для цього перш за все побудуємо многокутник – розв'язок системи лінійних нерівностей (1) та (3) – рис. 11. Координати всіх точок многокутника $OABC$ задовольняють нерівностям (1) та (3). Разом з тим умові (4), тобто умови цілочисельності змінних, задовольняють лише 12 точок, помічених "0" на рисунку 11.

Щоб знайти точку, координати якої визначають розв'язок вихідної задачі, замінемо многокутник $OABC$ многокутником $OKEMNF$, що містить всі допустимі точки з цілочисельним координатами і такими, що координати кожної з вершин є цілими числами. Тоді, якщо знайти точку максимуму функції (2) на многокутнику $OKEMNF$, то координати цієї точки і визначають оптимальний план задачі.

Для цього побудуємо вектор $\boldsymbol{n} = (2;\ 4)$ і пряму $2x_1 + 4x_2 = 0$ (лінію рівня). Побудовану пряму переміщуємо в напрямку вектора $\boldsymbol{n}$ до тих пір, поки вона не пройде через її останню спільну точку з многокутником $OKEMNF$. Координати цієї точки і визначають оптимальний план, а значення цільової функції в ній буде максимальним.

В даному випадку шуканою точкою є точка $E(1;\,3)$, в якій цільова функція приймає максимальне значення.

$$F_{\max} = 2\cdot 1 + 4\cdot 3 = 14.$$

Відповідно до плану виробництва, що визначають координати т. E підприємству варто придбати один комплект обладнання І –го виду і три комплекту обладнання ІІ-го виду, що забезпечить підприємству при

наявних у нього обмежених виробничих площах та грошових ресурсів максимальний випуск продукції, рівний 14 одиницям на зміну.

Графічним методом найпростіше знайти розв'язок задачі цілочисельного лінійного програмування, але тільки такої, що містить лише 2 невідомі.

Запишемо задачу цілочисельного програмування в загальному вигляді:

$$F = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n \to \max. \qquad (5)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \qquad (6)$$

$$x_i \geq 0 \ \ (i = 1 \div n). \qquad (7)$$

$$x_i \text{ - цілі } (i = 1 \div n). \qquad (8)$$

Якщо знайти розв'язок задачі (5) – (8) симплексним методом, то воно може виявитись як цілочисельним так і ні (наприклад задачі лінійного програмування, розв'язок якої завжди є цілочисельним є транспортна задача). В загальному ж випадку для визначення оптимального плану задачі (5) – (8) необхідні спеціальні методи. Існує декілька таких методів, найбільш відомий з яких є метод Гоморі, в основі якого лежить описаний вище симплексний метод.

4.1 Метод Гоморі

Знаходження розв'язку задачі цілочисельного програмування методом Гоморі розпочинають з визначення симплексним методом оптимального плану задачі (5) –(7) без умови цілочисельності змінних (8). Якщо серед отриманих значень змінних немає дробових чисел, то знайдений план є оптимальним планом задачі (5) – (8). Якщо ж в оптимальному плані задачі (5) – (7) змінна x_i приймає дробове значення, то до системи рівнянь (6) додають додаткове обмеження.

Нехай в останній симплекс таблиці для базисної змінної x_i, що приймає дробове значення маємо:

$x_1 + a'_{ir}x_r + a'_{i\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{ir+k}x_{r+k} = b_i$, де $x_r, x_{r+1}, \ldots, x_{r+k}$ - вільні змінні. Позначимо $[a]$ - ціла частина числа a, тобто найменше ціле число, яке не перевищує a. $\{a\} = a - [a]$ - дробова частина числа a.

Побудуємо наступне додаткове обмеження для x_i:

$$\{a'_{ir}\}\,x_r + \{a'_{i\,r+1}\} + \ldots + \{a'_{ir+k}\}\,x_{r+k} \geq \{b_i\}$$

(9)

Додавши обмеження (9) до системи рівнянь (6) знаходимо розв'язок задачі (5) – (7) та (9). Якщо в знайденому розв'язку змінні приймають дробові значення, то знову добавляють нове додаткове обмеження і процес обчислень повторюють. Провівши скінчену кількість операцій, або отримують оптимальний план задачі цілочисельного програмування або встановлюють, що вона не має розв'язку.

Отже, процес знаходження оптимального плану задачі цілочисельного програмування методом Гоморі включає в себе наступні етапи:

1. Використовуючи симплекс-метод, знаходять розв'язок задачі (5) – (7) без умови цілочисельності змінних.

2. Якщо в отриманому розв'язку значення всіх змінних – цілі, то знайдено розв'язок задачі (5) – (8). Якщо ж значення

деяких змінних – дробові, для змінної, яка має найбільшу дробову частину складають додаткові обмеження.

3. Використовуючи двоїстий симплекс-метод, знаходять розв’язок задачі, яка отримується в результаті приєднання додаткового обмеження до задачі (5) – (7).

4. У випадку наявності в розв’язку цієї задачі змінних з дробовим значенням складають ще одне додаткове обмеження і продовжують ітераційний процес до отримання оптимального плану задачі (5) – (8), або встановлення відсутності розв’язку.

Приклад. Методом Гоморі розв’язати задачу лінійного цілочисельного програмування

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max \tag{10}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6 \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 9 \end{cases} \tag{11}$$

$$x_i \geq 0 \ \ (i = 1 \div 5) \tag{12}$$

$$x_i \text{ - цілі } (i = 1 \div 5). \tag{13}$$

Розв’язання. Для визначення оптимального плану (10) – (13) спочатку знаходимо оптимальний план задачі (10) – (12) симплекс методом. Складаємо I симплекс таблицю.

Базис	Пункти призначення					b_i
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	1	1	1	0	0	13
x_4	$\boxed{1}$	-1	0	1	0	6 ←
x_5	-3	1	0	0	1	9
F	-3	-2	0	0	0	0

$\max\{|-3|;|-2|\}=3$, отже I –ий стовпчик розв'язувальний. $\min\left\{\frac{13}{1};\frac{6}{1};-\right\}=6$ ($\frac{9}{-3}$ - не розглядається, так як $-3<0$. Отже, II рядочок – розв'язувальний. Перейдемо до наступної таблиці.

Базис	Пункти призначення					b_i
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	$\boxed{2}$	1	-1	0	7←
x_1	1	-1	0	1	0	6
x_5	0	-2	0	3	1	27
F	0	-5	0	3	0	18
		↑				

В останньому рядочку є від'ємна оцінка – план не оптимальний. Встановлюємо розв'язувальний елемент і переходимо до наступної таблиці:

Базис	Пункти призначення					b_i
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	0	1	1/2	-1/2	0	7/2
x_1	1	0	1/2	1/2	0	19/2
x_5	0	0	1	2	1	34
F	0	0	5/2	1/2	0	71/2

В останньому рядочку немає від'ємних оцінок, отже знайдений розв'язок: $x_1 = \frac{19}{2}$, $x_2 = \frac{7}{2}$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 34$ є оптимальним для задачі (10) – (12).

Але він не є розв'язком задачі (10) – (13), так як значення x_1 та x_2 - дробові. Оскільки дробові частини x_1 та x_2 рівні між собою $\{x_1\} = \left\{\frac{19}{2}\right\} = \frac{1}{2}$, $\{x_2\} = \left\{\frac{7}{2}\right\} = \frac{1}{2}$, додаткове обмеження (9) складемо для довільної з них, наприклад для x_2. З останньої симплекс таблиці маємо:

$$x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = \frac{7}{2}.$$

Отже, до системи обмежень (11) – (12) додаємо нерівність

$$\left\{\frac{1}{2}\right\} x_3 + \left\{-\frac{1}{2}\right\} x_4 \geq \left\{\frac{7}{2}\right\}, \text{ або}$$

$$\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \geq \frac{1}{2},$$

$$x_3 + x_4 \geq 1.$$

Введемо додаткову змінну $x_6 \geq 0$:

$$x_3 + x_4 - x_6 = 1.$$

Додамо отримане рівняння в останню симплекс таблицю

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i	
x_2	0	1	1/2	1/2	0	0	7/2	
x_1	1	0	1/2	1/2	0	0	19/2	
x_5	0	0	1	2	1	0	34	
x_6	0	0	-1	$\boxed{-1}$	0	14	-1	←
F	0	0	5/2	1/2	0	0	71/2	

В останньому рядочку немає від'ємних оцінок, але є від'ємний вільний член. За допомогою двоїстого симплекс метода встановимо розв'язувальний елемент і перейдемо до наступної таблиці.

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i	
x_2	0	1	1	0	0	-1/2	4	
x_1	1	0	0	0	0	1/2	9	
x_5	0	0	-1	0	1	2	32	
x_6	0	0	1	1	0	-1	1	
F	0	0	2	0	0	1/2	35	

Отримана таблиця є останньою. У розв'язку $x_1 = 9$, $x_2 = 4$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 32$ значення всіх змінних цілі, отже, знайдений розв'язок є оптимальним розв'язком задачі (10) – (13). При цьому $F_{\max} = 3 \cdot 9 + 2 \cdot 4 = 35$.

Дамо геометричну інтерпретацію розв'язання задачі. Так як $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$, то системи обмежень (11) рівносильна системі обмежень.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 13 \\ x_1 - x_2 \leq 6 \\ -3x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{14}$$

Областю допустимих значень розв'язків задачі (10) – (13) є многокутник $OABCD$ (рис. 12). Максимальне значення цільова функція F приймає в т. $C\left(\frac{19}{2}; \frac{7}{2}\right)$, тобто $x_1 = \frac{19}{2}$, $x_2 = \frac{7}{2}$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 34$ є оптимальним планом задачі (10) – (13). Але так як значення x_1 та x_2 - дробові, то він не є розв'язком задачі (10) – (14). Тому вводиться додаткове обмеження: $x_3 + x_4 \geq 1$. Виключаючи з нього x_3 і x_4 підставимо замість них відповідних виразів з рівнянь системи (11) $x_3 = 13 - x_1 - x_2$, $x_4 = 6 - x_1 + x_2$.

Отримаємо $x_1 \leq 9$. Ця півплощина відтинає від многокутника $OABCD$ трикутник EFC. Як видно із рисунку 12 областю допустимих розв'язків отриманої задачі є многокутник $OABEFD$. В точці $E(9; 4)$ цього многокутника цільова функція даної задачі приймає максимальне значення. Так як координати точки E - цілі числа і невідомі x_3, x_4, x_5

приймають цілочисельні значення при підстановці в рівняння (11) значень $x_1 = 9$ і $x_2 = 4$, то розв'язок $x = (9;\,4;\,0;\,0;\,32)$ є оптимальним планом задачі (10) – (14).

Приклад. Знайти розв'язок задачі лінійного програмування методом Гоморі.

$$F = x_1 + 4x_2 \to \max .$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le \dfrac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 \le 4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 .$$

$$x_1,\, x_2 \text{ - цілі}$$

Розв'язання. Запишемо задачу в канонічному вигляді:

$$F = x_1 + 4x_2 \to \max \qquad (15)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 4 \end{cases} \qquad (16)$$

$$x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4 \ge 0 . \qquad (17)$$

$$x_1,\, x_2 \text{ - цілі} \qquad (18)$$

Сформульована задача є частково цілочисельною, так як на змінні x_3 і x_4 не накладено умову цілочисельності. Знаходимо за допомогою симплекс метода розв'язок задачі (15) – (17).

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_3	2	1	1	0	19/3
x_4	1	$\boxed{3}$	0	1	4
F	-1	-4	0	0	
		↑			

$\max\{|-4|;\,|-1|\} = -4$, тому II –ий стовпчик буде розв'язувальний; $\min\left\{\dfrac{19/3}{1};\,\dfrac{4}{3}\right\} = \dfrac{4}{3}$, тому другий рядочок буде розв'язувальний, а 3 – розв'язувальний елемент. Перейдемо до наступної таблиці.

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i

x_3	5/3	0	1	-1/3	5
x_4	1/3	1	0	1/3	4/3
F	1/3	0	0	4/3	16/3

В останньому рядочку немає від'ємних оцінок, отже $x = \left(0; \frac{4}{3}; 5; 0\right)$ - оптимальний розв'язок задачі (15) – (17). Але x_2 прийняла при цьому дробове значення, то для неї побудуємо додаткове обмеження. Так як з останньої таблиці:

$x_2 + \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 = \frac{4}{3}$, то шукане обмеження:

$\left\{\frac{1}{3}\right\}x_1 + \left\{\frac{1}{3}\right\}x_4 \geq \left\{\frac{4}{3}\right\}$ або $\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 \geq \frac{1}{3}$,

$x_1 + x_4 \geq 1$. В канонічному вигляді $x_1 + x_4 - x_5 = 1 \ (x_5 \geq 0)$.

Додамо отримане рівняння до останньої таблиці:

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	
x_3	5/3	0	1	-1/3	0	5	
x_2	1/3	1	0	1/3	0	4/3	
x_5	$\boxed{-1}$	0	0	-1	1	-1	←
F	1/3	0	0	4/3	0	16/3	
	↑						

В останньому рядочку немає від'ємних оцінок, але є від'ємний вільний член. За допомогою двоїстого симплекс метода переходимо до наступної таблиці:

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	
x_3	0	0	1	-2	5/3	10/3	
x_2	0	1	0	0	1/3	1	
x_5	1	0	0	1	-1	1	
F	0	0	0	1	1/3	5	

Із таблиці видно, $x = \left(1; 1; \frac{10}{3}; 0; 0\right)$ є оптимальним планом складеної задачі. Так як при цьому x_1 і x_2 приймають цілі значення, то він також є шуканим планом вихідної задачі:

$F_{\max} = 1 + 4 \cdot 1 = 5$ (при $x_1 = 1$, $x_2 = 1$).

Дамо геометричну інтерпретацію розв'язання задачі. На рис. 13 видно, що максимальне значення цільова функція приймає в т. $A\left(0;\ \frac{4}{3}\right)$, тобто $x = \left(0;\ \frac{4}{3};\ 5;\ 0\right)$ є оптимальним планом задачі (15) – (17). В той же час, так як x_2 приймає дробове значення цей розв'язок не є розв'язком задачі (15) – (18). Тому вводимо додаткове обмеження $x_1 + x_4 \geq 1$, звідки підставивши замість x_4 його значення із другого рівняння системи (16) отримаємо $x_2 \leq 1$. Цій нерівності на рис. 13 відповідає півплощина, обмежена прямою $x_2 = 1$, що відсікає від чотирикутника $OABC$ трикутник ADE. В області $ODEBC$ знаходимо точку $E(1;\ 1)$, в якій функція F (15) приймає максимальне значення. Так як координати т. E - цілі числа, то $x = \left(1;\ 1;\ \frac{10}{3};\ 0\right)$ є оптимальним планом задачі (15) – (18).

5. Нелінійне програмування

В загальному вигляді задача нелінійного програмування полягає у визначенні максимального (мінімального) значення

$$F(x_1,\ x_2, \ldots, x_n)\ , \tag{1}$$

при умові, що її змінні задовольняють відношенні:

$$\begin{cases} g_i(x_1,\ x_2, \ldots, x_n) \leq b_i, & (i = 1 \div k) \\ g_i(x_1,\ x_2, \ldots, x_n) = b_i, & (i = (k+1) \div m), \end{cases} \tag{2}$$

де f і g_i - деякі відомі функції n змінних, b_i - задані числа.

Тобто, необхідно визначити точку $x^* = (x_1^*,\ x_2^*, \ldots, x_n^*)$, координати якої задовольняють відношення (2) і така, що для будь-якої іншої точки $x = (x_1,\ x_2, \ldots, x_n)$ координати якої задовольняють відношення (2) виконується нерівність $F(x_1^*,\ x_2^*, \ldots, x_n^*) \geq f(x_1,\ x_2, \ldots, x_n)$. $\left(f(x_1^*,\ x_2^*, \ldots, x_n^*) \leq f(x_1,\ x_2, \ldots, x_n)\right)$.

Для розв'язання сформульованої задачі в загальній постановці не існує універсальних методів. Проте для окремого класу задач, в яких зроблені додаткові обмеження відносно властивостей функцій f і g_i, розроблені ефективні методи їх розв'язання. Зокрема, є ряд методів для розв'язання задач нелінійного програмування у випадку, коли f вгнута (випукла) функція і область допустимих розв'язків, що визначається обмеженням (2) – випукла.

Якщо визначена область допустимих розв'язків, то знаходження розв'язку задачі (1), (2) зводиться до визначення такої точки цієї області, через яку проходить гіперповерхня найвищого (найнищого) рівня:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = h .$$

Вказана точка може знаходитись як на межі області допустимих розв'язків так і в її внутрішній точці.

Процес знаходження розв'язку задачі нелінійного програмування (1), (2) з використанням її геометричної інтерпретації включає в себе наступні етапи:

1. Знаходять область допустимих розв'язків задачі, що визначається співвідношеннями (2) (якщо вона пуста, то задача не має розв'язку).

2. Будують поверхню $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = h$.

3. Визначають гіперповерхню найвищого (найнищого) рівня чи встановлюють, що задача не має розв'язку в зв'язку з тим, що функція (1) необмежена зверху (знизу) на множині допустимих розв'язків.

4. Знаходять точку області допустимих розв'язків, через яку проходить поверхня найвищого (найнищого) рівня і визначають в ній значення функції (1).

Приклад. Знайти максимальне значення функції

$$F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 \tag{3}$$

При умовах:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1 + 2x_2 \le 15 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24 \\ x_2 \le 4 \end{cases} \tag{4}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

<u>Розв'язання</u>. Так як цільова функція (3) – нелінійна, то задача (3) – (5) є задачею нелінійного програмування. Областю допустимих розв'язків даної задачі є многокутник $OABC$ (рис. 14). Відповідно для знаходження її розв'язку необхідно визначати таку точку многокутника $OABC$, в якій функція (3) прийме значення. Побудуємо лінію рівня $F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 = h$, де h - деяка константа, і дослідимо її поведінки при різних значеннях h . При кожному значенні h отримуємо параболу, яка тим вище віддалена від осі Ox_1, чим більше значення h (рис. 14). Отже, функція F приймає максимальне значення в точці дотику однієї із парабол з межею многокутника $OABC$. В даному випадку ця точка D, в якій лінія рівня $F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 = 13$ дотикається до межі многокутника $OABC$. Координата т. D можна знайти із системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_2 - x_1^2 + 6x_1 = 13 \\ x_2 = 4. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримуємо: $x_1^* = 3$, $x_2^* = 4$. Отже, $F_{\max} = 13$ при $x^* = (3;\, 4)$.

Як бачимо, в задачі (3) – (5) точка максимального значення цільової функції не є вершиною многокутника розв'язків. Тому процедура перебору вершин, яка використовувалась при розв'язанні задач лінійного програмування, непридатна до розв'язування даної задачі.

Приклад. Знайти максимальне і мінімальне значення функції

$$F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2. \qquad (7)$$

при умовах

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ 10x_1 - x_2 \leq 8 \\ 18x_1 + 4x_2 \leq 12 \end{cases}. \qquad (8)$$

$$x_1,\, x_2 \geq 0. \qquad (9)$$

<u>*Розв'язання*</u>. Областю допустимих розв'язків задачі (7) – (9) є трикутник (7) рівним деякому числу h, отримуємо лінії рівня, а саме кола $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 = h$ з центром в т. $E(3;\, 4)$ і радіусом $\sqrt{h}$. Із збільшенням (зменшенням) числа h значення функції F відповідно збільшуються (зменшуються).

Проводячи з точки E кола різних радіусів, бачимо, що мінімальне значення цільова функція приймає в точці D, в якій коло дотикається області допустимих розв'язків. Для визначення координат цієї точки скористаємось рівністю кутових коефіцієнтів прямої $10x_1 - x_2 = 8$ і дотичної до кола в точці D.

З рівняння прямої $x_2 = 10x_1 - 8$ встановлюємо, що її кутовий коефіцієнт рівний 10. Кутовий коефіцієнт дотичної до кола в точці D визначимо як значення похідної функції x_2 по змінній x_1 в цій точці. Розглядаючи x_2 як неявну функцію змінної x_1 і продиференціювавши рівняння кола, отримуємо

$$2(x_1 - 3) + 2(x_2 - 4)\cdot x_2', \text{ звідки } x_2' = -\frac{x_1 - 3}{x_2 - 4}.$$

Прирівнюючи знайдений вираз до 10 отримаємо $x_1 + 10x_2 = 43$, приєднавши до нього рівняння прямої, на якій лежить т. E отримуємо систему:

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 43 \\ 10x_1 - x_2 = 8 \end{cases}, \text{ звідки } x_1^* = \frac{123}{101},\ x_2^* = \frac{422}{101}.$$

Таким чином $F_{\min} = \left(\dfrac{123}{101} - 3\right)^2 + \left(\dfrac{422}{101} - 4\right)^2 = \dfrac{324}{101}$.

Як видно з рис. 15, цільова функція приймає максимальне значення в т. $C(2;\,12)$. Її координати визначені шляхом розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} -18x_1 \\ \\ \end{cases}$$

прямих, на перетині яких знаходиться т. C. Таким чином максимальне значення функції $F_{\max} = 65$.

Приклад. Знайти максимальне значення функції.

$$F = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2.$$

при умовах $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 18 \\ -x_1 + 2x_2 \le 8 \end{cases}$

$x_1,\, x_2 \ge 0.$

Розв'язання. Областю допустимих розв'язків вихідної задачі є многокутник $ABCDE$ (рис. 16), а лініями рівня кола $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 = h$ з центром $E(4;\,3)$ і радіусом $R = \sqrt{h}$.

З рис. 16 видно, що цільова функція приймає мінімальне значення в точці $F(4;\,3)$, а максимальне в т. $C(13;\,10{,}5)$ відповідно.

$F_{\min} = 0$, $F_{\max} = 137{,}25$.

Приклад. Знайти максимальне значення функції

$$F = 3x_1 + 4x_2$$

при умовах $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 25 \\ x_1,\, x_2 \ge 4 \end{cases}$

$x_1,\, x_2 \ge 0.$

Розв'язання. Область розв'язків задачі зображена на рис. 17. На цьому рисунку побудовані дві лінії рівня, які представлять собою прямі. З рисунку 17 видно, що максимальне значення цільова функція задачі приймає в точці E, в якій пряма є дотичною до кола $x_1^2 + x_2^2 = 25$. Для визначення координат точки E скористаємось рівністю кутових коефіцієнтів прямої $3x_1 + 4x_2 = h$ (де h - деяка константа) і дотичної до кола в т. E. Розглядаючи x_2 як неявну функцію змінної x_1, почленно диференціюємо рівняння кола $x_1^2 + x_2^2 = 25$, почленно диференціюємо рівняння кола $x_1^2 + x_2^2 = 25$, отримуємо

$$2x_1 + 2x_2 \cdot x_2^1 = 0 \text{ або } x_2^1 = -\frac{x_1}{x_2}.$$

Прирівнюючи знайдений вираз до $k = -\frac{3}{4}$, отримуємо $3x_1 + 4x_2 = 0$. Так як т E належить колу, то $x_1^2 + x_2^2 = 25$. Отримуємо

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 25 \end{cases}, \text{ звідки } x_1^* = 4,\ x_2^* = 3. \text{ Отже}$$

$$F_{\max} = 3^2 + 4^2 = 25.$$

6. Динамічне програмування

В розглянутих вище задачах лінійного і нелінійного програмування економічні процеси, для яких складали математичну модель вважалися статичними, тобто незалежними від часу. Тому оптимальний розв'язок знаходився за один етап планування. Такі задачі отримали назву одноетапні або однокрокові.

В задачах динамічного програмування економічний процес залежить від декількох етапів (періодів часу), тому знаходиться ряд оптимальних розв'язків (послідовного для кожного етапу), що забезпечує оптимальний розвиток всього процесу в цілому. Іншими словами, знаходження розв'язків задач методами динамічного програмування включає в себе декілька етапів (кроків) на кожному з яких визначається розв'язок деякої часткової задачі, зумовленої вихідною. Тому задачі динамічного програмування називаються багатоетапними чи багатокроковими. Динамічне програмування представляє собою математичний аппарат, який дозволяє здійснювати оптимальне планування багатоетапних керованих процесів. Економічний процес називається керованим, якщо можна впливати на хід його розвитку. Керуванням називається сукупність рівнянь, що приймаються з метою впливу на процес.

Зробимо загальну постановку задачі динамічного програмування і визначимо підхід до його розв'язку.

Припустимо, що дана фізична система S знаходиться в початковому стані $S_0 \in \tilde{S}_0$ і керованою. Внаслідок деякого керування u вказана система переходить із початкового стану S_0 в кінцевий стан $S_{\text{кін}} \in \tilde{S}_K$. При цьому якість кожного з керувань u, що реалізується, характеризується відповідним значенням функції $W(u)$. Задача полягає в тому, щоб із множини можливих керувань u знайти таке u^*, при якому функція $W(u)$ прийме експериментальне (максимальне чи мінмальне) значення $W(u^*)$.

Дано геометричну інтерпретацію цієї задачі. Припустимо, що стан системи характеризується деякою точкою S на площині X_1OX_2 (рис. 19) і ця точка внаслідок управління її рухом переміщується вздовж лінії, зображеної на рис. 19 із області можливих станів $\tilde{S}_0$ в область допустимих кінцевих станів $\tilde{S}_K$. Кожному управлінню u рухом точки, тобто кожній траєкторії руху точки поставимо у відповідність значення деякої функції $W(u)$ (наприклад, довжину шляху, що пройде точка під дією даного керування). Тоді задача полягає в тому, щоб з усіх допустимих траєкторій руху точки S знайти таку, яка отримується в результаті реалізації управління u^*, що забезпечує екстремальне значення функції $W(u^*)$. До визначення такої траєкторії і зводиться задача динамічного програмування у випадку, коли допустимі стани системи S визначаються точками n - мірного простору.

Розглянемо тепер в загальному вигляді розв'язання поставленої загальної задачі динамічного програмування. Для цього введемо ряд позначень.

Нехай початковий стан системи характеризується числом або набором чисел $X^{(0)}$. В результаті реалізації деякого управління u_1 система перейде в стан $X^{(1)}$. Потім після реалізації управління u_2 система перейде в стан $X^{(2)}$ і так далі до свого кінцевого стану $X^{(K)}$.

$$\underbrace{X^{(0)}}_{\substack{\text{початковий}\\\text{стан системи}}} \xrightarrow{u_1} X^{(1)} \xrightarrow{u_2} X^{(2)} \to \ldots \to X^{(i-1)} \xrightarrow{u_i} X^{(i)} \to \ldots \to X^{(K-1)} \xrightarrow{u_K} \underbrace{X^{(K)}}_{\substack{\text{кінцевий}\\\text{стан ситеми}}}.$$

При цьому вважаємо, що стан $X^{(i)}$, в який перейшла система S, залежить від стану $X^{(i-1)}$ і вибраного керування u_i і не залежить від нього, яким чином система S прийшла в стан $X^{(i-1)}$. Ця умова називається умовою відсутності після дії.

Позначимо через $W_i = W_i\left(X^{(i-1)}, u_i\right)$ - певний виграш чи прибуток, що ортимується при переході системи S із стану $X^{(i-1)}$ в стан $X^{(i)}$ внаслідок реалізації управління u_i. Тоді загальний виграш, що отримується при переході S із початкового стану $X^{(0)}$ в кінцевий стан $X^{(K)}$ складає

$$F = \sum_{i=1}^{K} W_i\left(X^{(i-1)}, u_i\right). \tag{4}$$

Умова відсутності післядії дозволяє сформулювати так званий принцип оптимальності Белмана: яким би не був стан системи, перед черговим кроком необхідно вибрати таке управління на цьому кроці, щоб виграш на даному кроці плюс оптимальний сумарний виграш на всіх наступних кроках був максимальним.

Введемо поняття оптимальної стратегії управління. Під такою стратегією будемо розуміти сукупність управлінь $u^* = \left(u_1^*, u_2^*, \ldots, u_k^*\right)$ в результаті реалізації яких система S за K кроків перейде із початкового стану $X^{(0)}$ в кінцевий стан $X^{(K)}$ і при цьому функція (4) приймає найбільше значення.

Із сформульованого принципу оптимальності випливає, що оптимальну стратегію управління можна отримати, якщо спочатку знайти оптимальну стратегію управління на k - ому кроці, потім на двох останніх кроках, потім на трьох останніх кроках і т. д., аж до першого кроку. Таким чином, розв'язання задачі динамічного програмування доцільно розпочинати з визначення оптимального розв'язку останньому k - ому кроці. Для цього, щоб знайти цей розв'язок, очевидно, необхідно зробити різні припущення про те, як міг закінчиться прередостанній крок, і з врахуванням цього вибрати управління u_K^0, яке забезпечить максимальне значення $W_K\left(X^{(K+1)}, u_K\right)$. Таке управління $\underline{u_n^0}$, вибране при конкретних визначених припущеннях про те, як закінчився попередній крок, називається умовно оптимальним розв'язком. Відповідно, принцип оптимальності вимагає знаходити на кожному кроці умовно оптимальний розв'язок для будь-якого з можливих результатів попереднього кроку.

Дано математичне формулювання принципу оптимальності Белмана. Позначимо через $F_K\left(X^{(0)}\right)$ максимальний прибуток, який отримуємо за k кроків при переході системи S із $X^{(0)}$ в $X^{(K)}$ при реалізації оптимальної стратегії управління $u = \left(u_1, u_2, \ldots, u_k\right)$, а через $F_{k-i}\left(X^{(i)}\right)$ - максимальний при переході із деякого стану $X^{(i)}$ в кінцевий стан $X^{(K)}$ при оптимальній стратегії управління на $(n-i)$ кроках, що залишилися. Тоді,

$$F_K\left(X^{(0)}\right) = \max_u \left[W_1\left(X^{(0)}, u_1\right) + W_2\left(X^{(0)}, u_2\right) + \ldots + W_K\left(X^{n-1}, u_K\right)\right] \qquad (5)$$

$$F_{K-i}\left(X^{(i)}\right) = \max_{u_{i+1}} \left[W_{i+1}\left(X^{(i)}, u_{(i+1)}\right) + F_{K-i-1}\left(X^{(i+1)}\right)\right], \ (i = 0 \div K-1). \qquad (6)$$

Вираз (6) представляє собою математичний запис принципу оптимальності і носить назву основного функціонального рівняння Белмана або рекурентного співвідношення. Використовуючи дане рівняння знаходимо розв'язок задачі динамічного програмування.

Спочатку покладемо $i = K-1$ в рекурентному відношенні (6) і отримаємо наступне функціональне рівняння:

$$F_1\left(X^{K-1}\right)=\max_{u_K}\left[W_K\left(X^{(K-1)},u_K\right)+F_0\left(X^{(K)}\right)\right]. \qquad (7)$$

В цьому рівнянні $F_0\left(X^{(K)}\right)$ будемо вважати відомими. Розглядаючи всі можливі допустимі значення стану системи S на $(k-1)$ - ому кроці.

$$X_1^{(K-1)},X_2^{(K-1)},\dots,X_m^{(K-1)},\dots,$$

знаходимо умовні оптимальні розв'язки.

$$u_K^0\left(X_1^{(K-1)}\right),u_2^0\left(X_2^{(K-1)}\right),\dots,u_K^0\left(X_m^{(K-1)}\right),\dots$$

і відповідні їм значення функції (7)

$$F_1^0\left(X_1^{(K-1)}\right),\ F_1^0\left(X_2^{(K-1)}\right),\dots,F_1^0\left(X_m^{(K-1)}\right),$$

Таким чином, на k -ому кроці знаходимо умовно оптимальне управління при будь-якому допустимому стані системи після $(K-1)$ -го кроку. Іншими словами в який би стан не потрапила система S після $(k-1)$ -го кроку, нами визначено, яке рішення необхідно прийняти на k -ому кроці. Відомо також і відповідне значення функції (7).

Далі переходимо до розгляду функціонального рівняння при $i=k-2$.

$$F_2\left(X^{(i-1)}\right)=\max_{u_{K-1}}\left[W_{K-1}\left(X^{(K-1)},u_{K-1}\right)+F_1\left(X^{(K-1)}\right)\right]. \qquad (8)$$

Для того, щоб знайти значення F_2 для всіх допустимих значень $X^{(K-1)}$ очевидно, необхідно знайти $W_{K-1}\left(X^{(K-2},u_{K-1}\right)$ і $F_1\left(X^{(K-1)}\right)$. Що стосується $F_1\left(X^{(K-1)}\right)$, то їх значення визначено на попередньому кроці. Тому потрібно провести обчислення для $W_{K-1}\left(X^{(K-1)},u_{K-1}\right)$ для всіх допустимих значень $X^{(K-2)}$ і відповідних управлінь u_{K-1}. Ці обчислення дозволять визначити умовно оптимальне управління u_{K-1}^0, для кожного $X^{(K-2)}$. Кожне з таких управлінь разом із вже вибраним управлінням на останньому кроці забезпечую максимальне значення прибутку на двох останніх кроках.

Послідовно реалізуючи описаний вище ітераційний процес, дійдемо до першого кроку. На цьому кроці нам відомо, в якому стані може знаходитись система. Тому вже не потрібно робити припущення про допустимий стан системи, а лише вибрати управління, яке є найкращим з врахуванням умовно оптимальних управлінь, прийнятих на всіх попередніх кроках.

Таким чином, в результаті послідовного проходження всіх етапів від кінця і до початку визначаємо максимальне значення виграшу (прибутку) за k кроків і для кожного з них знаходимо умовно оптимальне управління.

Щоб знайти оптимальну стратегію управління, тобто визначити шуканий розв'язок задачі, необхідно тепер пройти всю послідовність кроків, тільки на цей раз від початку до кінця. А саме: на першому кроці в якості оптимального управління u_1^* візьмемо знайдене умовно оптимальне управління u_1^0. На другому кроці знайдемо стан $X^{(1)*}$, в який переводить систему S управління u_1^*. Цей стан визначає знайдене умовно оптимальне значення u_2^0, яке будемо вважати шуканим значенням u_2^*. Знаючи u_2^* знаходимо X_2^*, а значить визначаємо u_3^* і т. д. В результаті цього знаходимо розв'язання задачі, тобто максимальний прибуток та оптимальну стратегію управління u^*, що включає в себе оптимальні управління на окремих кроках $u^* = \left(u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*\right)$.

Із викладеного видно, що процес розв'язування задачі динамічного програмування в загальному вигляді досить громіздкий. Тому на прикладі розглянемо саму просту задачу, що допускає постановку в термінах загальної задачі динамічного програмування. Разом з тим відзначимо, що використання ЕОМ дозволяє знаходити на основі описаного вище підходу розв'язання і більш складних практичних задач.

Приклад. Фірма планує нарощувати виробничі потужності на трьох своїх підприємствах, маючи для цього 4 млн. грн.. Кожне підприємство виставило на розгляд проекти свого розвитку, при яких в результаті виділення коштів k -ому підприємству в розмірі u млн. грн. Воно дасть прибуток $W_k(u)$, $(k = 1, 2, 3)$, величини яких розміщені в таблиці.

u	0	1	2	3	4	
$W_1(u)$	0	4	10	13	15	
$W_2(u)$	0	5	8	12	16	
$W_3(u)$	0	6	9	11	14	

Розподілити кошти між підприємствами таким чином, щоб їх сумарний прибуток був максимальний.

<u>Розв'язання</u>. Цю задачу можна розглядати як задачу динамічного програмування, в якій в якості системи S виступає сума коштів, що розподіляється між підприємствами. Її стан характеризується сумою коштів, виділені певним підприємством.

Нехай u_1 - кошти, які буде виділено І –ому підприємству;

u_2 - ІІ –ому підприємству;

u_3 - ІІІ ому підприємству;

$x^{(k)}$ - сума коштів, які виділені підприємством з номерами від 1 до k, тобто

$x^{(1)} = u_1$; $x^{(2)} = u_1 + u_2$; $x^{(3)} = u_1 + u_2 + u_3$.

В ролі управлінь виступають рішення про визначення величини коштів, що буде виділено конкретному підприємству.

Очевидно, що початковий стан системи $x^{(0)}=0$, кінцевий $x^{(3)}=4$.

Позначимо сумарний прибуток, отриманий від трьох підприємств W.

Тоді задача полягає в знаходженні максимального значення функції

$$W=W_1(u_1)+W_2(u_2)+W_3(u_3)\to \max,$$

при умові $u_1+u_2+u_3=4$, де u_1, u_2, u_3 можуть приймати цілі значення від 0 до 4.

Розглянемо покроковий розрахунок оптимальної стратегії розподілу коштів.

Очевидно, що після останнього кроку отримаємо кінцевий стан $x^{(3)}=4$. Розглянемо всі можливі припущення щодо попереднього стану $x^{(2)}=u_1+u_2$, тобто суми коштів, яка вже виділена I –ому та II –ому підприємству та визначимо умовно оптимальне значення u_3^0 - кошти, що буде виділено III –ому підприємству, які принесуть максимальний прибуток. На цьому кроці однозначно отримуємо:

$x^{(2}$	u_3^0	$F_1\left(x^{(2)}\right)=0$, W_3
0	4	14
1	3	11
2	2	9
3	1	6
4	0	0

Тут якщо першим двом підприємствам виділено 0 млн. грн. $\left(x^{(2)}=0\right)$, то максимальний прибуток отримуємо при наданні III –ому підприємству всіх наявних 4 млн. грн. $(u_3=4)$. Якщо ж $x^{(2)}=1$, то III –ому підприємству надаємо $u_3=4-x^{(2)}=4-1=3$ (млн. грн.) і т. д. Значення функції Белмана $F_1\left(x^{(2)}\right)=\max(W_3)$ буде дорівнювати W_3.

На наступному кроці розглянемо всі можливі значення стану $x^{(1)}$ - кошти, що виділені на I –ому підприємству та визначаємо умовно оптимальне значення u_2^0 при вже відомих u_3^0.

u_2	W_2	$F_1\left(x^{(2)}\right)=W_3^0\left(x_0^{(2)}, u_3\right)$					
		$u_3^0=4$ 14	$u_3^0=3$ 11	$u_3^0=2$ 9	$u_3^0=1$ 6	$u_3^0=0$ 0	
0	0	14	11	9	$\boxed{6}$	$\boxed{0}$	$x^{(1)}=4$
1	5	-	16	$\boxed{14}$	$\boxed{11}$	5	$x^{(1)}=3$
2	8	-	-	17	$\boxed{14}$	8	$x^{(1)}=2$
3	12	-	-	-	$\boxed{18}$	12	$x^{(1)}=1$
4	16	-	-	-	-	16	$x^{(1)}=0$

Для цього побудуємо таблицю, в якій в рядочки занесемо можливі значення u_2 і прибуток який при цих значеннях отримаємо W_2, а в стовпчиках значення u_3^0 та $W_3^{(0)}$ отримані на попередньому етапі. Припустимо, що $x^{(1)}=0$. Тоді можливі наступні випадки $u_2=0$, $u_3^0=4$, $u_2=1$, $u_3^0=3$, $u_2=2$, $u_3^0=2$, $u_2=3$, $u_3^0=1$, $u_2=4$, $u_3^0=0$. Клітинки, які знаходяться на перетині відповідних рядочків і стовпчиків розміщені в головній (найбільшій) діагоналі таблиці. Для кожного з п'яти перелічених варіантів запишемо в клітинку сумарний прибуток як суму $W_2+W_3^0$ і виберемо з них найбільше, тобто знайдемо значення функції Белмана $F_2\left(x^{(1)}\right)=\max\left(W_2+F_1\left(x^{(2)}\right)\right)$ і помістимо його в прямокутну рамочку.

$\max\{14;16;17;18;16\}=18$, отже для стану $x^{(1)}=0$, $F_2\left(x^{(1)}\right)=18$ при $u_2^0=3$, $u_3^0=6$.

Стану $x^{(1)}=1$ відповідають чотири клітинки, що розміщені прямій, паралельній головній діагоналі. Провівши аналогічні розрахунки, встановлюємо, що при

$x^{(1)}=1$, $F_2\left(x^{(1)}\right)=14$ при 1) $u_2^0=1$, $u_3^0=2$ або 2) $u_2^0=2$, $u_3^0=1$.

Далі: при $x^{(1)}=2$, $F_2\left(x^{(1)}\right)=\max\{9;11;8\}=11$ при $u_2^0=1$, $u_3^0=1$;

при $x^{(1)}=3$, $F_2\left(x^{(1)}\right)=\max\{6;5\}=6$ при $u_2^0=0$, $u_3^0=1$;

при $x^{(1)}=4$, $F_2\left(x^{(1)}\right)=\max\{0\}=0$ при $u_2^0=0$, $u_3^0=0$;

Отже, для кожного виділення коштів I –ому підприємству ми знайшли оптимальне розподілення коштів, що залишилися між II та III –ім підприємствами.

Переходимо до наступного кроку, який буде останній для $x^{(0)}=0$ - початковий стан складаємо наступну таблицю.

u_1	W_1	$F_2\left(x^{(1)}\right)$				
		$u_2^0+u_3^0=4$ 18	$u_2^0+u_3^0=3$ 14	$u_2^0+u_3^0=2$ 11	$u_2^0+u_3^0=1$ 6	$u_2^0+u_3^0=0$ 0
0	0	18	-	-	-	-
1	4	-	18	-	-	-
2	10	-	-	21	-	-
3	13	-	-	-	19	-
4	15	-	-	-	-	15

Стану $x^{(0)}=0$ (мові $u_1+u_2+u_3=u$) відповідають 5 клітинок, що знаходяться в головній діагоналі таблиці $F_3^0\left(x^{(0)}\right)=\max\left\{W_1+F_2\left(x^{(1)}\right)\right\}=\max\{18;18;21;19;15\}=21$ при $u_1=2$, $u_2=1$, $u_3=1$.

Отже, максимально можливий прибуток становить 21 млн. грн., при такому розподілі 4 млн. грн. між трьома підприємствами I –ому підприємству виділити 2 млн. грн., II –ому – 1 млн. грн., III –ому – 1 млн. грн.

Дамо геометричну інтерпретацію розв'язання задачі.

На рисунку зобразимо основні результати кожного кроку оптимізації. Позначимо значення $x^{(k)}$ точками, розміщеними на рисунку для кожного значення k в одному стовпчику один над одним.

Будь-якому набору значень $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$ відповідає фазова траєкторія у вигляді ламаної лінії, яка з'єднує відповідні точки. Оскільки $x^{(0)}=0$, $x^{(3)}=4$, то кожна траєкторія повинна починатись з лівого нижнього кута і закінчуватись в правому верхньому куті, причому для кожної ланки, що сполучає точки $x^{(i)}$ та $x^{(i+1)}$ має виконуватись умова $x^{(i)}\le x^{(i+1)}$. Довжина фрагменту такої траєкторії від I –го стовпця до II –го оцінюється $W_1\left(n_1\right)$, від II –го до III –го - $W_2\left(u_2\right)$, від III –го до IV –го - $W_3\left(u_3\right)$. Задача полягає в знаходженні такої траєкторії, що починається із точки $x^{(0)}=0$ і закінчується $x^{(3)}=4$, яка має максимальну довжину.

Згідно із схемою оптимізації заповнення рисунка здійснюється справа- наліво.

$x^{(0)}=4$ •	$x^{(1)}=4$ •	$x^{(2)}=4$ •	$x^{(3)}=4$ •
$x^{(0)}=3$ •	$x^{(1)}=3$ •	$x^{(2)}=3$ •	$x^{(3)}=3$ •
$x^{(0)}=2$ •	$x^{(1)}=2$ •	$x^{(2)}=2$ •	$x^{(3)}=2$ •

$x^{(0)} = 1$ •	$x^{(1)} = 1$ •	$x^{(2)} = 1$ •	$x^{(3)} = 1$ •
$x^{(0)} = 0$ •	$x^{(1)} = 0$ •	$x^{(2)} = 0$ •	$x^{(3)} = 0$ •

Спочатку розглядаємо всі можливі траєкторії від стовпчика $x^{(3)}$ до стовпчика $x^{(2)}$. Це будуть відрізки, які сполучають точку $x^{(3)} = 4$ з усіма точками стовпчика $x^{(2)}$. Довжина цих ліній будуть відповідними значеннями $W_3(u_3) = W_3\left(x^{(3)} - x^{(2)}\right)$ і внаслідок єдиності будуть оптимальними на цьому кроці. Далі розглядаємо всі можливі продовження траєкторії до стовпчика $x^{(1)}$. В точку $x^{(1)} = 4$ можна потрапити тільки з точки $x^{(2)} = 4$. Зображаємо цю ланку, довжина якої O. В точку $x^{(1)} = 3$ можна потрапити з точки $x^{(2)} = 4$, тоді довжина ламаної $W_3(0) + W_2(1) = 0 + 5 = 5$, або з точки $x^{(2)} = 3$, тоді довжина $W_3(1) + W_2(0) = 6 + 0 = 6$. Так як $\max\{6; 5\}$ зображаємо останню ланку. В точку $x^{(1)} = 2$ можна потрапити:

1) з точки $x^{(2)} = 4$: $l = W_3(0) + W_2(2) = 0 + 8 = 8$;

2) з точки $x^{(2)} = 3$: $l = W_3(1) + W_2(1) = 6 + 5 = 11$;

3) з точки $x^{(2)} = 2$: $l = W_3(2) + W_2(0) = 9 + 0 = 9$.

$\max\{8; 11; 9\} = 11$, отже зображаємо ланку, що сполучає $x^{(1)} = 2$ з $x^{(2)} = 3$.

Аналогічно для інших значень $x^{(1)}$. І нарешті на останньому кроці розглядаємо всі можливі продовження траєкторії в точку $x^{(0)} = 0$. Аналогічно попереднім кроком встановлюємо, що найоптимальніша ланка, що сполучає $x^{(1)} = 2$ з $x^{(0)} = 0$. Шукана оптимальна траєкторія зображена неперервною лінією.

В задачі пунктирними лініями зображені ланки, яким відповідають значення таблиці, поміщені в прямокутні рамки.