Математичний аналіз

Лекція 7.

Тема: ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ.

§ 2. ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ.

2.1. Частинні похідні.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M(x, y)$. Надамо змінній x приросту Δx, залишаючи змінну y незмінною, так, щоб точка $M_1(x + \Delta x, y)$ належала заданому околу.

Величина

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

називається частинним приростом функції $f(x, y)$по змінній x.

Аналогічно вводиться частинний приріст $\Delta_y z$ функції по змінній y:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

то вона називається частинною похідною функції $f(x, y)$ в точці $M(x, y)$ по змінній x і позначається одним із таких символів:

$$z'_x = f'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$f'_x\left(x_{0,} y_0\right)$=$f'_x\mathrm{I}_{M_0}$ $-$ частинні похідні по x в точці $M_0(x_0; y_0)$.

Аналогічно частинна похідна функції $f(x, y)$ по y визначається як Границя

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

і позначається одним із символів:

$$z'_y = f'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Згідно з означенням, при знаходженні частинної похідної z'_x обчислюють звичайну похідну функції однієї змінної x, вважаючи змінну y сталою, а при знаходженні z'_y сталою вважається змінна x. Тому частинні похідні знаходять за формулами і правилами обчислення похідних функцій однієї змінної.

Частинна похідна z'_x (або z'_y) характеризує швидкість зміни функції в напрямі осі Ox (або Oy).

Для функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n змінних можна знайти n частинних похідних:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n},$$

де

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i},$$

$$\Delta_{x_i} u = f(x_1, \ldots, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Щоб знайти частинну похідну $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, треба взяти звичайну похідну функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по змінній x_i, вважаючи решту змінних сталими.

Приклад. Знайти частинні похідні функцій:

а) $z = x^2 + y^3 - 2xy^2 + 5x - 1.$

Розв’язання:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 + y^3 - 2xy^2 + 5x - 1)'_x =$$

$$= (x^2)'_x + 0 - 2y^2(x)'_x + 5(x)'_x - 0 = 2x - 2y^2 + 5;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 + y^3 - 2xy^2 + 5x - 1)'_y =$$

$$= 0 + (y^3)'_y - 2x(y^2)'_y + 0 - 0 = 3y^2 - 4xy.$$

б) $u = x^2 z + arctg\,\frac{x}{y}$.

Розв'язання: $\frac{\partial u}{\partial x} = \left(x^2 z + arctg\,\frac{x}{y}\right)'_x = z(x^2)'_x + \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_x = 2xz + \frac{y^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{y} \cdot (x)'_x = 2xz + \frac{y}{x^2+y^2}$;

$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(x^2 z + arctg\,\frac{x}{y}\right)'_y = 0 + \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_y = \frac{y^2}{x^2+y^2} \cdot x \cdot \left(\frac{1}{y}\right)'_y = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2+y^2}$;

$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(x^2 z + arctg\,\frac{x}{y}\right)'_z = x^2 (z)'_z + 0 = x^2$.

Якщо функція $z = f(x, y)$ задана в області D і має частинні похідні z'_x, z'_y в усіх точках $(x; y) \in D$, то ці похідні можна розглядати як нові функції, задані в області D. Тому має сенс питання про існування частинних похідних від цих функцій по якій-небудь змінній в точці $(x; y) \in D$.

Якщо існує частинна похідна по x від функції $\frac{\partial f}{\partial x}$, то її називають *частинною похідною другого порядку від функції* $f(x, y)$ *по змінній* x і позначають $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ або f''_{xx}.

Таким чином, за означенням

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \text{або} \quad f''_{xx} = (f'_x)'_x.$$

Якщо існує частинна похідна від функції $\frac{\partial f}{\partial x}$ по змінній y, то цю похідну називають *мішаною частинною похідною другого порядку від функції* $f(x, y)$ і позначають $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ або f''_{xy}.

Отже, за означенням

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \text{або} \quad f''_{xy} = (f'_x)'_y.$$

Для функції двох змінних $f(x, y)$ можна розглядати чотири похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Якщо існують частинні похідні від частинних похідних другого порядку, то їх називають *частинними похідними третього порядку функції* $f(x, y)$, їх вісім:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \ \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}, \ \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, \ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}.$$

Теорема (про мішані похідні). Якщо функція $f(x, y)$ визначена разом із своїми похідними f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} в деякому околі точки M_0 $(x_0; y_0)$, причому похідні f''_{xy} та f''_{yx} неперервні в точці M_0, то в цій точці

$$f''_{xy}\big|_{M_0} = f''_{yx}\big|_{M_0}.$$

Приклади

1. Знайти похідні другого порядку від функції

$$z = x^3 - x^2y + y^2.$$

○ Маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 2xy, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 2y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x^2 + 2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2x. \ ●$$

2.2. Диференційовність функції

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M(x; y)$. Виберемо прирости Δx і Δy так, щоб точка $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$

належала розглядуваному околу і знайдемо повний приріст функції в точці $M(x; y)$:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Функція $f(x, y)$ називається *диференційовною в точці* M, якщо її повний приріст в цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

де A та B — дійсні числа, які не залежать від Δx та Δy, $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ — нескінченно малі при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$ функції.

Теорема 1 *(неперервність диференційовної функції)*. *Якщо функція $z = f(M)$ диференційовна в точці M, то вона неперервна в цій точці.*

Теорема 2 *(існування частинних похідних диференційовної функції)*. *Якщо функція $z = f(M)$ диференційовна в точці $M(x; y)$, то вона має в цій точці похідні $f'_x = f'_x(x, y)$ та $f'_y = f'_y(x, y)$ і*

$$\Delta z = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y.$$

Теорема 3 *(достатні умови диференційовності)*. *Якщо функція $f(x, y)$ має частинні похідні в деякому околі точки M і ці похідні неперервні в точці M, то функція $f(x, y)$ диференційовна в точці M.*

2.3. Повний диференціал функції та його застосування до обчислення функцій і похибок. Диференціали вищих порядків

Нагадаємо, що коли функція $z = f(M)$ диференційовна в точці M, то її повний приріст у цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

де $\alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ і $\beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Повним диференціалом dz диференційовної в точці M функції $z = f/M$ називається лінійна відносно Δx та Δy частина повного приросту цієї функції в точці M, тобто

$$dz = A\Delta x + B\Delta y. \qquad (*)$$

Диференціалами незалежних змінних x та y назвемо прирости цих змінних $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Тоді з урахуванням теореми 2 рівність (*) можна записати так:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad (**)$$

Аналогічна формула має місце для диференційовної функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Формула наближених обчислень функції двох змінних.

Повний диференціал називають також головною частиною повного приросту диференційовної функції. При цьому виконується наближена рівність $\Delta z \approx dz$.

Або $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \Delta y.$

Тоді $f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \Delta y.$ (1)

Приклади

1. Знайти повний диференціал функції

$$z = x^3y^2.$$

○ Частинні похідні заданої функції $z'_x = 3x^2y^2$ і $z'_y = 2x^3y$ є неперервними функціями на всій площині Oxy. Тому диференціал цієї функції на всій площині дорівнює

$$dz = 3x^2y^2dx + 2x^3ydy. \; ●$$

2. Обчислити наближено за допомогою повного диференціала

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1,97}{1,02}-1\right).$$

○ Розглянемо функцію $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}-1\right)$ і застосуємо до неї формулу (1), поклавши $x=2$, $y=1$, $\Delta x = -0,03$, $\Delta y = 0,02$:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\Delta x}{y+\Delta y}-1\right) \approx \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}-1\right) + \frac{y}{y^2+(x-y)^2}\,\Delta x - \frac{x}{y^2+(x-y)^2}\,\Delta y;$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{2-0,03}{1+0,02}-1\right) \approx \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{1}-1\right) + \frac{1}{1+(2-1)^2}(-0,03) - \frac{2}{1+(2-1)^2}\,0,02.$$

Маємо

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1,97}{1,02}-1\right) = \frac{\pi}{4} - 0,015 - 0,02 = 0,75. \quad ●$$

Введемо поняття диференціала вищого порядку. Нехай $z=f(x,y)$ функція незалежних змінних x,y. Повний диференціал цієї функції, знайдений за формулою (**), називають ще диференціалом першого порядку. Диференціал другого порядку визначають за формулою $d^2z=d(dz)$.

Тоді, якщо функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні, то

$$d^2z=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x dx+\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x dy,$$

звідки

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Символічно це записують так:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 z.$$

Аналогічно можна дістати формулу для диференціала третього порядку:

$$d^3z = d(d^2z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^3 z.$$

Застосовуючи метод математичної індукції, можна дістати формулу для диференціала n-го порядку:

$$d^nz = d(d^{n-1}z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n z.$$

Зазначимо, що дана формула справедлива лише для випадку, коли змінні x і y функції $z = f(x, y)$ є незалежними змінними.

Приклад

Знайти d^2z, якщо $z = e^{x^2+y^2}$.

○ Послідовно дістаємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2e^{x^2+y^2}(1+2x^2);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xye^{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^{x^2+y^2}(1+2y^2).$$

За формулою (11) маємо

$$d^2z = 2e^{x^2+y^2}\left[(1+2x^2)\,dx^2 + 4xy\,dx\,dy + (1+2y^2)\,dy^2\right]. \bullet$$

2.4. Диференціювання неявної функції.

Нехай задано рівняння

$$F(x, y) = 0,$$

де $F(x, y)$ — функція двох змінних.

Теорема. *Нехай функція $F(x, y)$ і її похідні $F'_x(x_0, y_0)$ та $F'_y(x, y)$ визначені та неперервні в якому-небудь околі точки $M_0(x_0, y_0)$ і $F(x_0, y_0) = 0$, а $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$; тоді існує окіл точки M_0, в якому рівняння $F(x, y) = 0$ визначає єдину неявну функцію $y = \varphi(x)$, неперервну та диференційовну в околі точки x_0 і таку, що $\varphi(x_0) = y_0$.*

Тоді
$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Приклад

Знайти похідну $\frac{dy}{\partial x}$ функції y, заданої рівнянням

$$e^y - e^x + 2xy = 0.$$

○ Тут $F(x, y) = e^y - e^x + 2xy$, $F'_x = -e^x + 2y$, $F'_y = e^y + 2x$, отже за формулою (20) маємо

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-e^x + 2y}{e^y + 2x} = \frac{e^x - 2y}{e^y + 2x}. \bullet$$

§3. ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ.

3.1. Дотична площина та нормаль до поверхні. Геометричний зміст диференціала функції двох змінних.

Нехай задано поверхню

$$F(x, y, z) = 0. \quad (1)$$

Точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ належить цій поверхні і функція $F(x, y, z)$ диференційовна в точці M_0, причому не всі частинні похідні в точці M_0 дорівнюють нулю, тобто

$$\left(F'_x(M_0)\right)^2 + \left(F'_y(M_0)\right)^2 + \left(F'_z(M_0)\right)^2 \neq 0.$$

Розглянемо довільну криву L, яка проходить через точку M_0 , лежить на поверхні (1) і задається рівнянням $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, де точці M_0 відповідає параметр t_0.

Оскільки крива лежить на поверхні, то координати її точок задовольняють рівняння (1):

$$F\big(x(t), y(t), z(t)\big) = 0. \qquad (2)$$

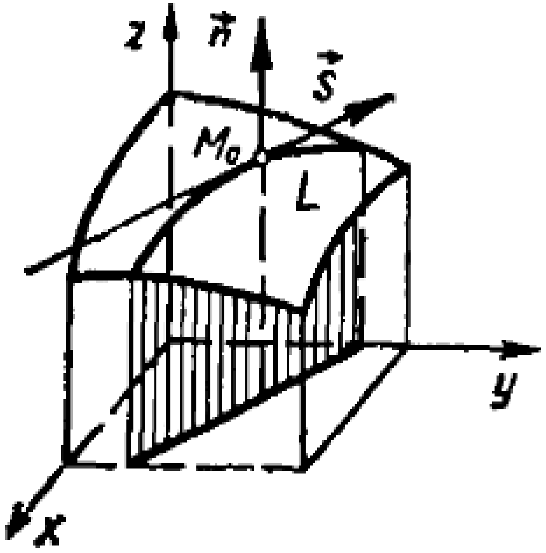
Диференціюючи рівність (2), маємо

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0. \quad (3)$$

Ця рівність показує, що вектори (див. рис.)

$$\vec{n} = \left\{F'_x(M_0); F'_y(M_0); F'_z(M_0)\right\}, \qquad \vec{s} = \{x'(t_0); y'(t_0); z'(t_0)\}$$

ортогональні, причому другий з них є напрямним вектором дотичної до кривої L у точці M_0.



Крім того, з рівності (3) випливає, що дотичні до всіх кривих, які проходять через точку M_0 і лежать на поверхні (1), ортогональні до одного й того самого вектора $\vec{n}$. Тоді всі ці дотичні лежать в одній і тій самій площині, яка називається дотичною площиною до поверхні в точці M_0.

Знайдемо рівняння дотичної площини. Оскільки ця площина проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\vec{n}$, то її рівняння має вигляд

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0. \quad (4)$$

Нормаллю до поверхні в точці M_0 називають пряму, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до дотичної площини в цій точці.

Оскільки нормаль проходить через точку M_0 і має напрямний вектор $\vec{n}$, то канонічні рівняння нормалі мають такий вигляд:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}. \qquad (5)$$

Якщо рівняння поверхні задано в явній формі $z = f(x, y)$, то, поклавши $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$, дістанемо

$F'_x(M_0) = f'_x(x_0, y_0)$, $F'_y(M_0) = f'_y(x_0, y_0)$, $F'_z(M_0) = -1$,

тоді рівняння (4) і (5) наберуть вигляду

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0; \qquad (6)$$

$$\frac{(x - x_0)}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{(y - y_0)}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{(z - z_0)}{-1}. \qquad (7)$$

Приклади.

1. Написати рівняння нормалі та дотичної площини до еліпсоїда $2x^2 + y^2 + z^2 = 15$ в точці $M_0(1; 2; 3)$.

Розв’язання. Скористаємось рівняннями (4) і (5). Маємо

$F(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 15;$ $F'_x = 4x;$ $F'_y = 2y;$ $F'_z = 2z;$

$F'_x(M_0) = 4;$ $F'_y(M_0) = 4;$ $F'_z(M_0) = 6.$

Отже, шукані рівняння нормалі та дотичної площини мають вигляд

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{6} \quad \text{або} \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3};$$

$$4(x-1) + 4(y-2) + 6(z-3) = 0 \quad \text{або} \quad 2x + 2y + 3z - 15 = 0.$$

2. Написати рівняння нормалі та дотичної площини до параболоїда $z = x^2 + y^2$ в точці $M_0(1; -2; 5)$.

Розв’язання. Скористаємося формулами (6) та (7). Маємо

$f(x, y) = x^2 + y^2; \quad f'_x(x, y) = 2x; \quad f'_y(x, y) = 2y;$

$f'_x(1, -2) = 2; \quad f'_y(1, -2) = -4.$

Звідси $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-5}{-1}$ — рівняння нормалі,

$2x - 4y - z - 5 = 0$—рівняння дотичної площини.