Математичний аналіз

Лекція 6.

Тема: Асимптота кривої. Схема дослідження і побудови графіка функції. Функція багатьох змінних , її границя та неперервність.

10.5. Асимптота кривої.

Асимптотою кривої $y = f(x)$ називають пряму, до якої необмежено наближається точка кривої за необмеженого віддалення її від початку координат. Існує три типи асимптот: *вертикальні, похилі* та *горизонтальні.*

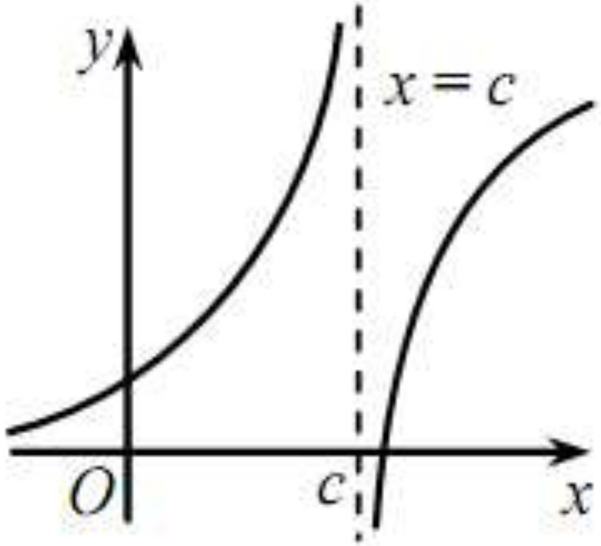
Пряма $x = c$ - *вертикальна* асимптота кривої $y = f(x)$ якщо

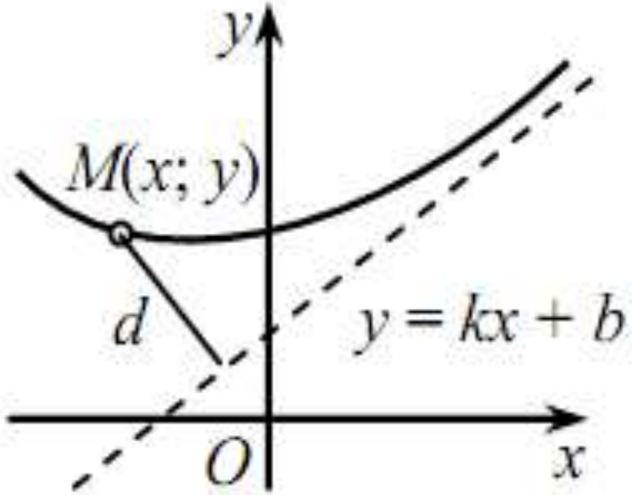
$\lim\limits_{x\to c+0} f(x) = \pm\infty$ або $\lim\limits_{x\to c-0} f(x) = \pm\infty$

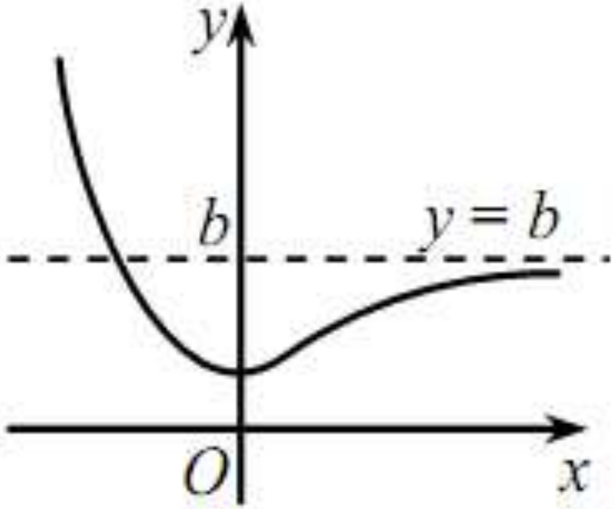
Пряма $y = kx + b$ є *похилою* асимптотою кривої $y = f(x)$ якщо існують скінченні границі

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad (k \neq 0), \quad \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = b.$$

Зазначимо, що горизонтальна асимптота є окремим випадком похилої асимптоти при $k = 0$.


y
x = c
O
c
x


y
M(x; y)
d
y = kx + b
O
x


y
b
y = b
O
x

Приклад. Знайти асимптоти кривих.

Знайдіть асимптоти кривої $y = \frac{x^3}{x^2-4}$

Розв’язання. Рівняння похилої асимптоти шукаємо у вигляді
$y = kx + b$.

За відповідними формулами дістанемо:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x^2-4)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{4}{x^2}}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+4x}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x^2-4}=0.$$

Отже, $y=x$ — рівняння похилої асимптоти. Оскільки точки $x=-2;\,2$ — точки розриву другого роду функції $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$, то прямі $x=-2$ і $x=2$ — вертикальні асимптоти заданої кривої.

Горизонтальних асимптот крива не має $\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^2-4}=\infty\right)$.

10.6. Схема дослідження і побудови графіка функції.

Щоб дослідити функцію та побудувати її графік, треба:

1) знайти область існування функції;

2) знайти (якщо це можна) точки перетину графіка з координатними осями;

3) дослідити функцію на періодичність, парність і непарність;

4) знайти точки розриву та дослідити їх;

5) знайти інтервали мотононності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках;

6) знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину;

7) знайти асимптоти кривої;

8) побудувати графік функції, враховуючи дослідження, проведені в п. 1—7.

Якщо графік виявиться не зовсім зрозумілим, потрібно додатково знайти кілька точок графіка, обчисливши значення функції при певних значеннях аргументу; бажано також в цих самих точках обчислити першу похідну, щоб визначити в них напрям дотичної.

Якщо дана функція періодична з періодом T, то досить побудувати її графік на відрізку $[0; T]$, після чого повторити цей графік на проміжках $(nT; (n+1)T)$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Якщо функція парна (або непарна), то достатньо побудувати її графік для $x \geqslant 0$, а потім відобразити його симетрично відносно осі Oy (або відносно початку координат).

Приклад 1. Дослідіть функцію $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ та побудуйте її графік.

Розв'язання. 1) область визначення — вся числова пряма, за винятком точки $x = 1$, тобто $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$;

2) функція неперіодична. З несиметричності області визначення $D(y)$ відносно нуля випливає, що задана функція не є ні парною, ні непарною, тобто є функцією загального вигляду;

3) графік функції $y = f(x)$ перетинає вісь ординат (якщо це можливо) у точці $(0; f(0))$. У цьому випадку $y(0) = -1$, отже, $A(0; -1)$ — точка перетину кривої з віссю Oy. Щоб знайти точки перетину графіка з віссю Ox, потрібно розв'язати рівняння $y = 0$, тобто $\dfrac{x^2+1}{x-1} = 0$. Це рівняння не має дійсних коренів, тому функція не перетинає вісь абсцис;

4) функція в точці $x=1$ має розрив другого роду: $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^2+1}{x-1}=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^2+1}{x-1}=+\infty$. В усіх інших точках функція неперервна.

Пряма $x=1$ — вертикальна асимптота кривої.

Оскільки

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x-1}=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x-1}=-\infty,$$

то горизонтальних асимптот немає.

Рівняння похилої асимптоти шукаємо у вигляді $y=kx+b$.

Обчислимо границі

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2-x}=1,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^2-x}=1.$$

Отже,

$$k=1,\ b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{x-1}=1.$$

Таким чином, пряма $y=x+1$ — похила асимптота заданої кривої;

5) знаходимо похідну

$$y' = \frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

і розв'язуємо рівняння $y' = 0$, або $x^2 - 2x - 1 = 0$, звідки дістаємо стаціонарні точки $x_1 = 1-\sqrt{2}$ і $x_2 = 1+\sqrt{2}$. Крім того, похідна не існує в точці $x = 1$ (у цій точці задана функція не визначена). Отже, $x_1 = 1-\sqrt{2}$ і $x_2 = 1+\sqrt{2}$ — *критичні точки*, або точки можливого екстремуму заданої функції. Ці точки розбивають область визначення на чотири інтервали: $(-\infty; 1-\sqrt{2})$, $(1-\sqrt{2}; 1)$, $(1;\ 1+\sqrt{2})$, $(1+\sqrt{2};\ \infty)$. На кожному з цих інтервалів похідна y' має певний знак, який можна встановити за *методом інтервалів* або обчислення значень похідної в окремих точках (по одній точці з кожного інтервалу). На інтервалах $(-\infty; 1-\sqrt{2})$ та $(1+\sqrt{2};\ \infty)$ похідна додатна, отже, функція зростає; для всіх $x \in (1-\sqrt{2}; 1) \cup\ \cup (1; 1+\sqrt{2})$ функція спадає, бо на цих інтервалах похідна від'ємна. Переходячи через точку $x_1 = 1-\sqrt{2}$ (рух відбувається зліва направо), похідна змінює знак з плюса на мінус; отже, в цій точці функція має локальний максимум. Тоді

$$y_{\max} = y(1-\sqrt{2}) = \frac{(1-\sqrt{2})^2 + 1}{1-\sqrt{2}-1} = 2 - 2\sqrt{2}.$$

При переході через точку $x_2 = 1+\sqrt{2}$ похідна змінює знак з мінуса на плюс, отже, в цій точці існує локальний мінімум, причому

$$y_{\min} = y(1+\sqrt{2}) = \frac{(1+\sqrt{2})^2 + 1}{1+\sqrt{2}-1} = 2 + 2\sqrt{2}.$$

Точка $x = 1$ не є точкою екстремуму (в цій точці функція невизначена);

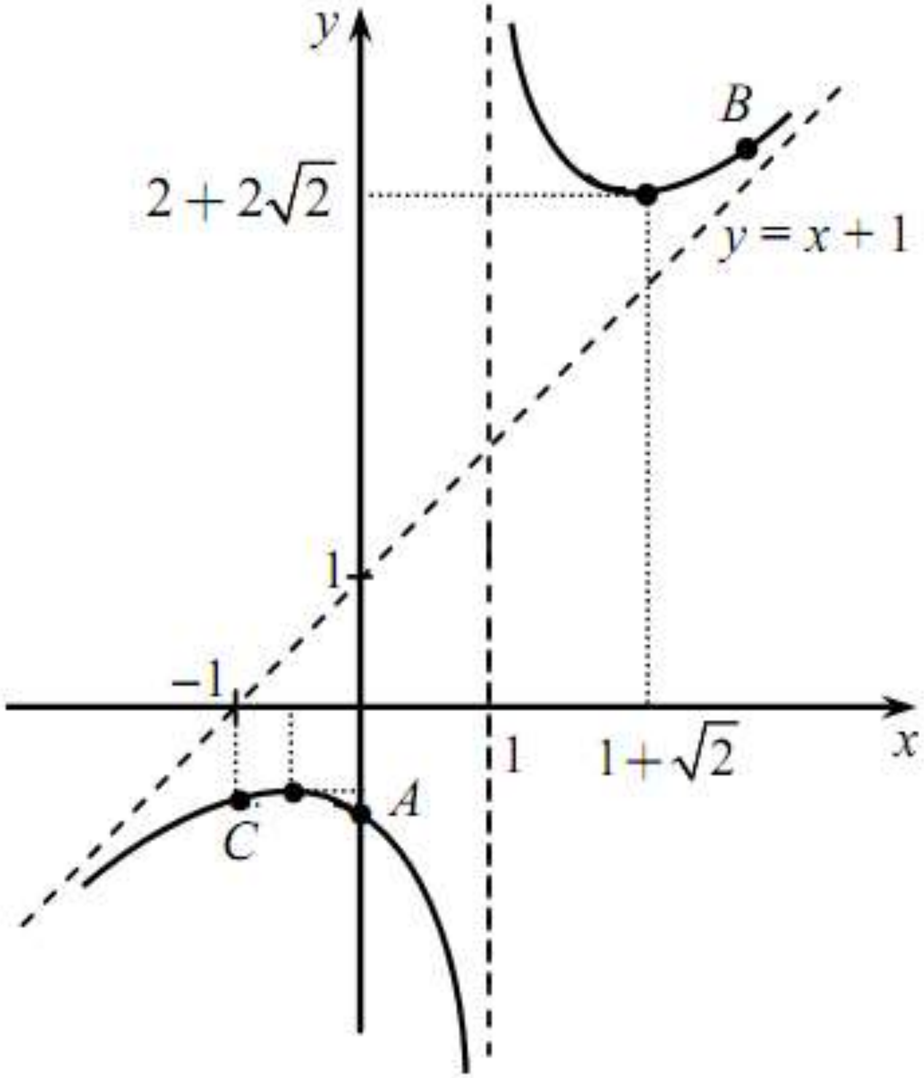
6) знайдемо другу похідну y'':

$$y''=\left(\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}\right)'=\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-1)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{4}{(x-1)^3}.$$

На інтервалі $(-\infty;1)$ $y''<0$, отже, на цьому інтервалі крива опукла; якщо $x\in(1;\infty)$, то $y''>0$ — крива вгнута. Точок перегину немає;

7) обчислимо додатково (хоча це необов'язково) кілька значень функції: $y(3)=5$, $y(-1)=-1$. Отже, графік заданої функції проходить через точки $B(3;5)$ і $C(-1;-1)$;

8) підсумовуючи проведені дослідження, будуємо графік даної функції



y
B
2 + 2√2
y = x + 1
1
−1
1
1 + √2
x
A
C

Приклад 2. Дослідити та побудувати графік функції $y=\sqrt[3]{x^3-2x^2}$

Розв'язання. 1) область визначення: $D(y)=(-\infty;\infty)$;

2) функція ні парна, ні непарна;

3) точки перетину з осями координат: якщо $x=0$, то $y=0$; якщо $y=0$, то $x=0$ або $x=2$. Отже,

крива проходить через точки (0; 0) і (2; 0);

4) точок розриву і вертикальних асимптот не існує. Знайдемо похилу асимптоту:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 3x^2}}{x} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} (\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} - x) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^2} + x \cdot \sqrt[3]{x^3 - 2x^2} + x^2} = -\frac{2}{3}.$$

Отже, пряма $y = x - \frac{2}{3}$ — похила асимптота цієї кривої. Інших асимптот немає;

5) знайдемо похідну

$$y' = \frac{1}{3}\frac{3x^2 - 4x}{\sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^2}} = \frac{x(x - 4/3)}{\sqrt[3]{x^4(x-2)^2}} = \frac{x - 4/3}{\sqrt[3]{x(x-2)^2}}.$$

Похідна дорівнює нулю в точці $x = 4/3$ і її не існує в точках $x = 0$ і $x = 2$; усі ці точки є критичними і розбивають числову пряму на чотири інтервали $(-\infty; 0)$, $(0; 4/3)$, $(4/3; 2)$, $(2; \infty)$. На кожному з цих інтервалів похідна y' має певний знак, а саме: якщо $x \in (-\infty; 0)$, то $y' > 0$ — функція зростає; якщо $x \in \left(0; \frac{4}{3}\right)$, то $y' < 0$ — функція спадає; якщо $x \in \left(\frac{4}{3}; 2\right) \cup (2; \infty)$, то $y' > 0$ — функція зростає. Переходячи через точку

$x=0$, похідна змінює знак з плюса на мінус, отже, $x=0$ є точкою максимуму, причому $y_{\max}=y(0)=0$. Переходячи через точку $x=\frac{4}{3}$, похідна змінює знак з мінуса на плюс, отже, в цій точці функція набуває мінімуму:

$$y_{\min}=y(4/3)=\sqrt[3]{(4/3)^2(4/3-2)}=-\sqrt[3]{32/27}=-\frac{2\cdot\sqrt[3]{4}}{3}\approx-1,1\,.$$

$P\left(\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}\right)$ — екстремальна точка.

Переходячи через точку $x = 2$, похідна не змінює знака, отже, ця точка не є точкою екстремуму;

6) знайдемо другу похідну

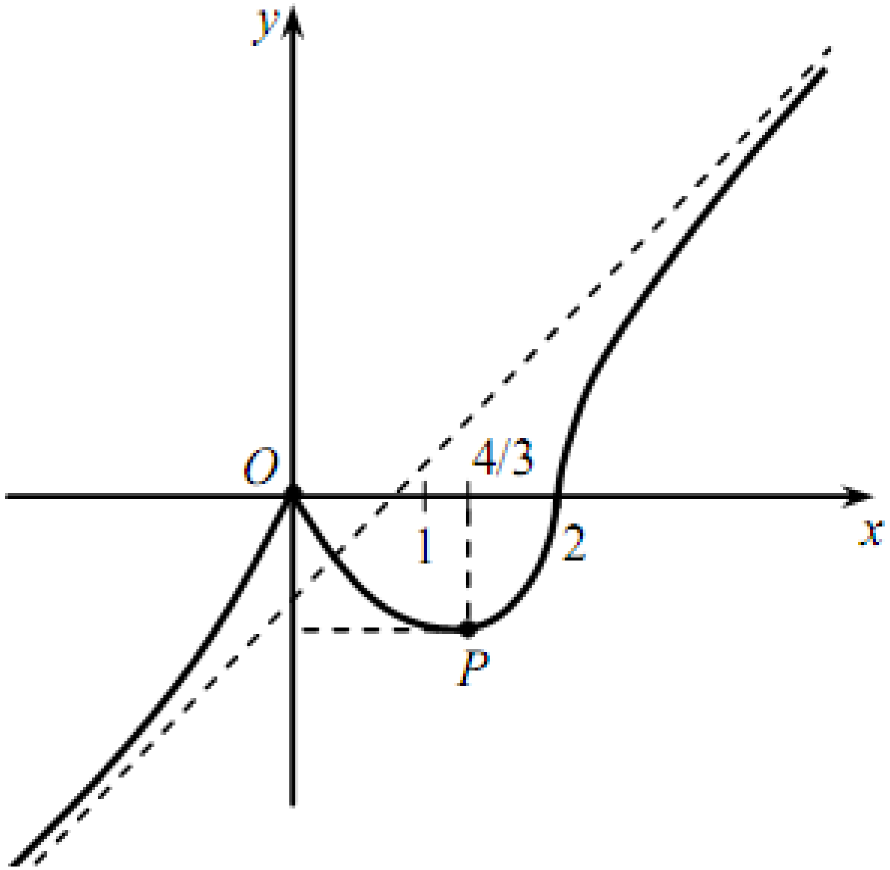
$$y'' = \left(\frac{x - 4/3}{\sqrt[3]{x(x-2)^2}} \right)' = \frac{\sqrt[3]{x(x-2)^2} - (x - 4/3)\dfrac{(x-2)^2 + x2(x-2)}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2(x-2)^4}}}{\sqrt[3]{x^2(x-2)^4}} =$$

$$= \frac{9x(x-2)^2 - (3x-4)(x-2)(3x-2)}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4(x-2)^8}} = -\frac{8}{9}\frac{(x-2)}{\sqrt[3]{x^4(x-2)^8}} =$$

$$-\frac{8}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4(x-2)^5}}.$$

Другої похідної не існує в точках $x = 0$ і $x = 2$. Отже, точки $x = 0;\ 2$ — критичні точки другого роду. Розглянемо проміжки $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ і $(2; \infty)$. На інтервалах $(-\infty; 0)$ і $(0; 2)$ $y'' > 0$ — крива вгнута; якщо $x \in (2; \infty)$, то $y'' < 0$ — крива опукла. Точка перегину має координати (2; 0);

7) ураховуючи проведені дослідження, будуємо графік заданої функції



ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

§1. ФУНКЦІЯ, ЇЇ ГРАНИЦЯ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ

1.1. Функція багатьох змінних. Означення та символіка.

Нехай задано множину D упорядкованих пар чисел (x, y). Якщо кожній парі чисел $(x, y) \in D$ за певним законом відповідає число z, то кажуть, що на множині D визначено функцію z від двох змінних x і y і записують $z = f(x, y)$.

Наведемо такі приклади: а) площу S прямокутника із сторонами a та b знаходять за формулою $S = ab$. Кожній парі значень a і b відповідає єдине значення площі, тобто S — функція двох змінних: $S = f(a, b)$;

б) за законом Ома електрорушійна сила E, сила струму I та опір R замкнутого електричного кола пов'язані співвідношенням $E = IR$. Тут E є функцією змінних I та R: $E = f(I, R)$.

Змінну z називають залежною змінною (функцією), а змінні x та y — незалежними змінними (аргументами).

Множину пар (x, y) значень x та y, для яких функція $z = f(x, y)$ визначена, називають *областю визначення цієї функції* і позначають $D(f)$ або D.

Множину значень z позначають $E(f)$ або E.

Значення функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ позначають $z_0 = f(x_0, y_0)$ або $z_0 = f(M_0)$, або $z_0 = z_0 \mathrm{I}_{M_0}$.

Лінію, що обмежує область D, називають межею області визначення. Точки області, які не лежать на її межі, називаються внутрішніми. Область, яка містить одні внутрішні точки, називається відкритою. Якщо ж до області визначення належать і всі точки межі, то така область називається замкненою.

Функція двох змінних, як і функція однієї змінної, може бути задана різними способами. Ми користуватимемося, як правило, аналітичним способом, коли функція задається за допомогою формули.

Областю визначення такої функції вважається множина всіх тих точок площини, для яких задана формула має зміст.

Приклади: а) $z = x^2 + y^2$.

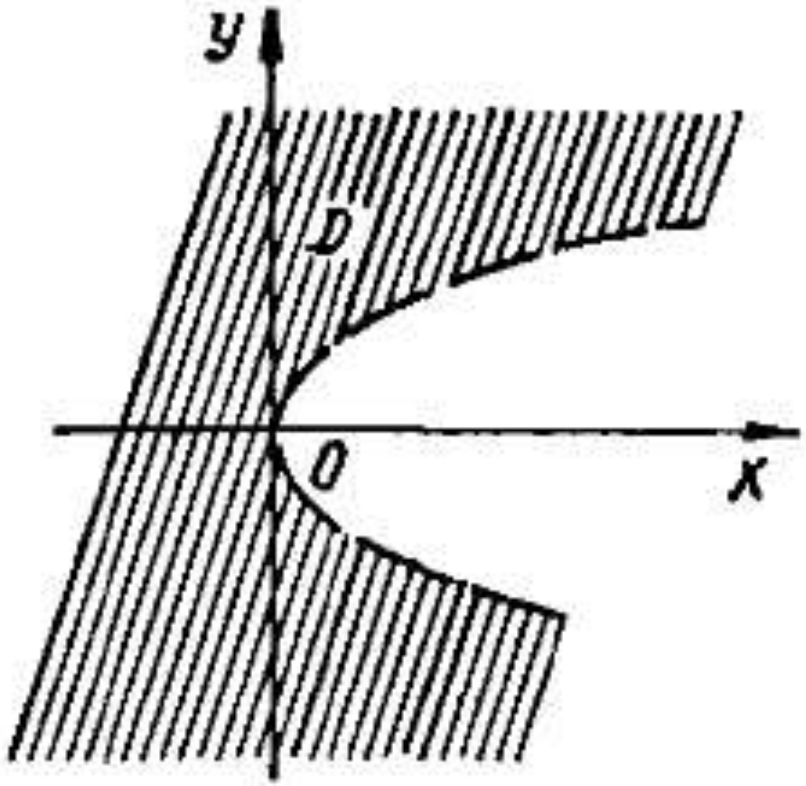
○ а) Вираз $x^2 + y^2$ існує і невід'ємний для будь-яких значень x та y. Тому областю визначення D функції $z = x^2 + y^2$ є вся площина Oxy, а множиною значень — проміжок $E = [0; +\infty)$.

в) $z = \dfrac{1}{\sqrt{y^2 - x}}$

в) Область визначення D цієї функції визначається з нерівності $y^2 - x > 0$.

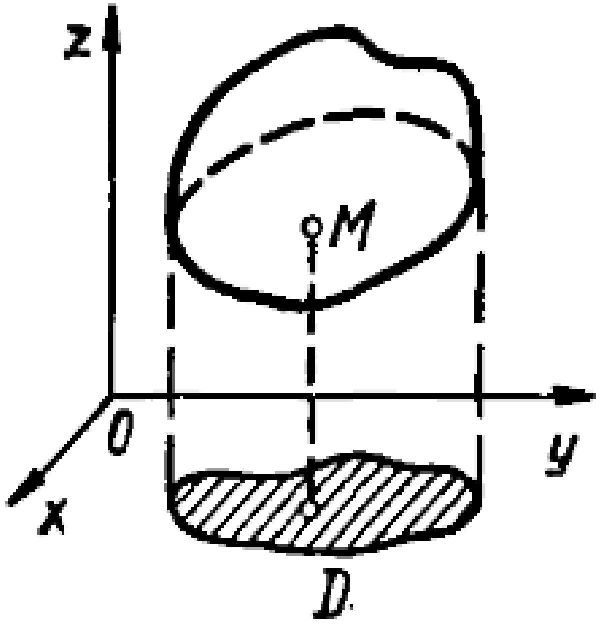
Межа області (парабола $y^2 = x$) не належить їй, тобто це відкрита область

Множина значень заданої функції — інтервал $E = (0; +\infty)$.



Функцію двох змінних можна зобразити графічно у вигляді деякої поверхні. Дійсно, нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в області D. Кожній точці $(x; y) \in D$ відповідає певне значення функції $z = f(x, y)$.

Графіком функції $z = f(x, y)$ в прямокутній системі $Oxyz$ називають геометричне місце точок $M\big(x; y; f(x, y)\big)$, проекції яких $(x; y)$ належать області D. Це геометричне місце точок утворює в тривимірному просторі R_3 певну поверхню, проекцією якої на площину Oxy є множина D.



Криву $f(x, y) = c$ називають *лінією рівня (або ізокривою) функції*. Термін «лінія рівня» запозичений з картографії. Там лінії рівня – це лінії, на яких висота точок земної поверхні над рівнем моря стала.

Приклад

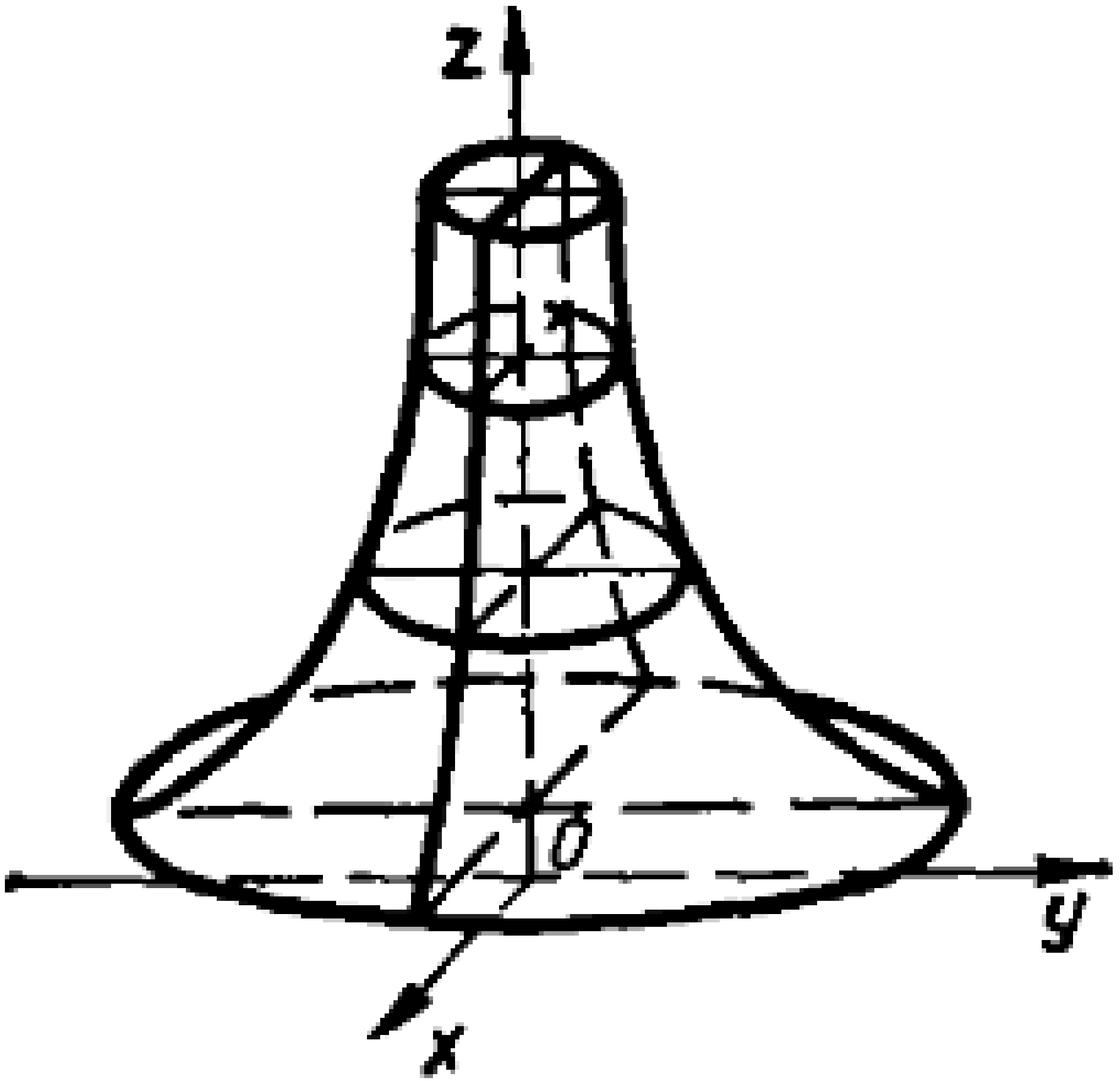
Знайти лінії рівня і побудувати графік функції

$$z = \frac{1}{x^2 + 2y^2}.$$

○ Лінії рівня $z = c$ знайдемо з рівняння $\frac{1}{x^2 + 2y^2} = c$, де $c > 0$. Маємо

$$x^2 + 2y^2 = \frac{1}{c}, \quad \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{c}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{2c}}\right)^2} = 1,$$

тобто лініями рівня даної функції є еліпси з півосями $a = \sqrt{\frac{1}{c}}$ та $b = \sqrt{\frac{1}{2c}}$



z
O
y
x

Ми розглянули поняття функції двох змінних. Узагальнимо його на випадок трьох і більшого числа незалежних змінних.

Нехай D — деяка множина упорядкованих трійок (x, y, z) дійсних чисел, тобто точок $M(x; y; z)$ тривимірного простору R_3.

Якщо кожній точці $(x; y; z) \in D$ за певним законом відповідає єдине число u, то кажуть, що на множині D визначено функцію u від трьох змінних x, y і z, і записують $u = f(x, y, z)$ або $u = f(M)$.

При цьому змінна u називається залежною змінною (функцією), x, y, z — незалежними змінними (аргументами), множина $D \subset R_3$ — областю визначення функції.

Область визначення функції трьох змінних можна геометрично зобразити у вигляді деякої частини тривимірного простору. Але саму функцію $u = f(x, y, z)$ геометрично зобразити вже не можна, тому що наш простір тривимірний і четверту координатну вісь для значень u зобразити неможливо.

Поверхнею рівня функції $u = f(x, y, z)$ називають множину всіх точок $(x; y; z) \in D(f)$, для яких задана функція набуває одне й те саме значення $c \in E(f)$:

$$f(x, y, z) = c \qquad \text{(\textit{ізоповерхні})}.$$

Приклади

1. Областю визначення функції

$$u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$$

є куля одиничного радіуса з центром у початку координат. Це замкнена область, тому що їй належать точки сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ — межі області.

2. Поверхні рівня функції $u = \dfrac{z^2}{x^2 + y^2}$ визначаються рівнянням $x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{c} = 0$, де $c > 0$.

Це сім'я конусів з вершиною в точці $O\,(0;\,0;\,0)$.

Лінії і поверхні рівня часто зустрічаються на практиці. Наприклад, сполучивши на карті поверхні Землі точки з однаковою середньодобовою температурою або з однаковим середньодобовим тиском дістанемо відповідно ізотерми та ізобари, які є важливими даними для прогнозу погоди.

Якщо число n незалежних змінних більше трьох, то їх частіш позначають однією буквою, але з різними індексами: $x_1, x_2, \dots x_n$. Функцію u від цих незалежних змінних можна визначити так. Нехай задано множину D упорядкованих систем $(x_1;\ x_2;\ \dots x_n)$. з n чисел $(n \in N)$, або, що те саме, множину точок $M(x_1;\ x_2;\ \dots x_n)$ n-вимірного простору R_n.

Якщо кожній точці $(x_1;\ x_2;\ \ldots x_n) \in D$ за певним законом відповідає єдине число u, то кажуть, що на множині D визначено функцію u від n змінних: $x_1, x_2, \ldots x_n$ і записують

$$u = f(x_1, x_2, \ldots x_n), \text{ або } u = f(M),\ M \in R_n.$$

Область визначення D цієї функції у випадку $n \geq 4$ геометрично зобразити не можна.

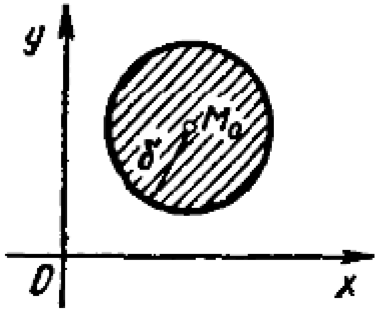
Надалі розглядатимемо лише функції двох змінних, тому що результати для функцій двох змінних легко по аналогії узагальнити на випадок більшого числа змінних. Крім того, для функції двох змінних можна дати геометричні ілюстрації.

1.2. Границя функції багатьох змінних.

Введемо поняття δ-околу заданої точки $M_0(x_0; y_0)$ і поняття збіжної послідовності точок площини.

Множина всіх точок $M(x; y)$, координати яких задовольняють нерівність $\rho(M; M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, де $\rho(M; M_0)$ — відстань від точки M до M_0, називається δ-околом точки $M_0(x_0; y_0)$.

Іншими словами, *δ-окіл точки M_0* — це всі внутрішні точки круга з центром M_0 радіуса δ



Розглянемо послідовність точок $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, ..., $M_n(x_n; y_n)$, яку позначимо символом $\{M_n\}$. Послідовність точок $\{M_n\}$ називається *збіжною до точки* M_0, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує номер $N = N(\varepsilon)$ такий, що при $n > N$ виконується нерівність $\rho(M; M_0) < \varepsilon$. При цьому точку M_0 називають границею послідовності $\{M_n\}$ і записують так:

$$\lim_{n\to\infty} M_n = M_0 \text{ або } M_n \to M_0 \text{ при } n \to \infty.$$

Якщо $M_n(x_n; y_n) \to M_0(x_0; y_0)$ при $n \to \infty$, то, очевидно, $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$.

Тепер розглянемо границю функції двох змінних. її означення аналогічне означенню границі функції однієї змінної.

Нехай функція $z = f(x, y)$ задана в деякій області D і точка $M_0(x_0; y_0) \in D$ або $M_0(x_0; y_0) \notin D$, але має таку властивість, що в довільному δ-околі цієї точки міститься хоча б одна точка множини D, відмінна від M_0. Число A називається *границею функції* $z = f(M)$ *в точці* M_0, якщо для довільної, збіжної до M_0 послідовності точок $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ ($M_n \in D$, $M_n \neq M_0$), відповідна послідовність значень функції

$f(M_1), f(M_2), \ldots, f(M_n), \ldots$ збігається до числа A. При цьому пишуть: $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$ або $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$.

Наведене означення границі функції називають *означенням за Гейне або означенням «на мові послідовностей»*.

Дамо еквівалентне означення границі функції за Коші або означення «на мові $\varepsilon - \delta$». Число A називається *границею функції* $z = f(M)$ *в точці* M_0, якщо для кожного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta > 0$ таке, що для всіх точок $M(x; y) \in D$, які задовольняють умову $0 < \rho(M; M_0) < \delta$, виконується нерівність $|f(M) - A| < \varepsilon$.

Користуючись означенням границі функції двох змінних, можна перенести основні теореми про границі для функції однієї змінної на функції двох змінних. Наприклад, правильне таке твердження.

Теорема. *Нехай функції* $f(M)$ *і* $g(M)$ *визначені на одній і тій самій множині* D *і мають в точці* M_0 *границі* B *і* C. *Тоді функції* $f(M) \pm g(M)$, $f(M)\,g(M)$, $\frac{f(M)}{g(M)}$, $g(M) \neq 0$, *мають в точці* M_0 *границі, які відповідно дорівнюють* $B \pm C$, $B \cdot C$, $\frac{B}{C}$, $C \neq 0$.

Функція $z = f(M)$ називається *нескінченно малою в точці* M_0 (або при $M \to M_0$), якщо $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = 0$. Якщо функція $z = f(M)$ має в точці M границю, яка дорівнює A, то функція $\alpha(M) = f(M) - A$ є нескінченно малою в точці M_0, тому що $\lim\limits_{M \to M_0} \alpha(M) = \lim\limits_{M \to M_0} (f(M) - A) = 0$. Звідси випливає, що функція $f(M)$ в околі точки M_0 відрізняється від границі A на нескінченно малу функцію.

Приклади. Знайти границі: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

○ а) Якщо $M(x;\ y)\to M_0(0;\ 0)$, то $\rho(M;\ M_0)=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$, тому

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2(\sqrt{\rho^2+1}+1)}{(\sqrt{\rho^2+1}-1)(\sqrt{\rho^2+1}+1)}=2.$$

б) Нехай $f(x,\ y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Візьмемо дві послідовності точок: $\{M_n\}=$ $=\left\{\left(0;\ \frac{1}{n}\right)\right\}\to 0$ і $\{P_n\}=\left\{\left(\frac{1}{n};\ 0\right)\right\}\to 0$ при $n\to\infty$, тоді

$$\lim_{n\to\infty} f(M_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{0-\frac{1}{n^2}}{0+\frac{1}{n^2}}=-1; \qquad \lim_{n\to\infty} f(P_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}-0}{\frac{1}{n^2}+0}=1.$$

Таким чином, двом різним, збіжним до точки $(0;\,0)$, послідовностям точок відповідають дві послідовності значень функції, які мають різні границі. Отже дана функція в точці $(0;\,0)$ границі не має.

1.3. Неперервність функції багатьох змінних.

Поняття неперервної функції багатьох змінних вводиться за допомогою поняття границі.

Нехай функція $z = f(M)$ визначена на множині D, точка $M_0 \in D$ і довільний δ-окіл точки M_0 містить точки множини D.

Функція $z = f(M)$ називається *неперервною в точці* M_0, якщо

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Точки, в яких функція неперервна, називаються *точками неперервності*, а точки, в яких неперервність порушується — *точками розриву* цієї функції.

Наприклад, функція

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{x+y}, & x+y \neq 0; \\ 1, & x+y=0 \end{cases}$$

розривна в точці (0; 0), оскільки $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ не існує; функція

$$f(x, y) = \begin{cases} x+2y, & x \in R \setminus \{1\},\ y \in R \setminus \{2\}; \\ 1, & x=1, \quad y=2 \end{cases}$$

розривна в точці (1; 2), оскільки $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x, y) = 5$, а $f(1, 2) = 1$.

Умові (1) неперервності можна надати іншого вигляду. Позначимо $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = f(x,y) - f(x_0,y_0)$. Величини Δx, Δy називають *приростами аргументів x* і *y, а* Δz – *повним приростом функції* $f(x,y)$ в точці $(x_0; y_0)$. З рівності (1) дістаємо:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \big(f(x,y) - f(x_0,y_0)\big) = 0 \qquad \text{або} \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \Delta z = 0. \qquad (2)$$

Рівність (2) дає ще одне означення неперервності.

Функція $f(x, y)$ називається *неперервною в точці* $M_0(x_0; y_0)$, якщо повний приріст її в цій точці прямує до нуля, коли прирости її аргументів x та y прямують до нуля.

Функція $f(x, y)$ називається *неперервною на множині* D, якщо вона неперервна в кожній точці $(x; y)$ цієї множини.

Наприклад, функція $z = x^2 + y^2$ неперервна на всій площині Oxy, оскільки повний приріст цієї функції в довільній точці $(x_0; y_0)$ має вигляд

$$\Delta z = (x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 - (x_0^2 + y_0^2) =$$
$$= 2x_0\Delta x + 2y_0\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2$$

і

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

Множина D точок площини називається *зв'язною*, якщо будь-які її дві точки можна сполучити неперервною лінією, яка цілком належить множині D. Наприклад, круг — зв'язна множина, а множина, що складається з двох кругів, які не мають спільних точок, не є зв'язною.

Точка M називається *внутрішньою точкою множини* D, якщо існує δ-окіл цієї точки, який цілком міститься у множині D.

Множину D називають *відкритою*, якщо кожна її точка внутрішня.

Областю (або *відкритою областю*) називають зв'язну відкриту множину точок.

Точку M називають *межовою точкою множини* D, якщо будь-який її окіл містить як точки, що належать D, так і точки, що не належать множині D. Множину всіх межових точок області називають *межею області*.

Область разом з її межею називається замкненою. Якщо існує круг скінченного радіуса, який цілком містить область, то вона називається обмеженою.

Замкнена область, в якій визначена функція двох змінних, є аналогом відрізка для функції однієї змінної.

Тепер сформулюємо властивості неперервних функцій двох змінних в замкненій обмеженій області.

1°. *Якщо функція* $z = f(M)$ *неперервна в замкненій обмеженій області, то вона обмежена в цій області, тобто існує таке число* $c > 0$, *що для всіх точок області виконується нерівність* $|f(M)| < c$.

2°. *Якщо функція* $z = f(M)$ *неперервна в замкненій обмеженій області, то в цій області існують точки, в яких функція набуває найбільшого і найменшого значень.*

3°. *Якщо функція* $z = f(M)$ *неперервна в замкненій обмеженій області* D *і* $f(M_1) < c < f(M_2)$, *де* $M_1, M_2 \in D$, *то існує точка* $M_0(x_0; y_0)$, *в якій* $f(M_0) = c$. *Зокрема, якщо* $f(M_1) < 0$, *а* $f(M_2) > 0$, *то в області* D *існує точка* M_0, *в якій* $f(M_0) = 0$.