Математичний аналіз

Лекція 4.

Тема: Диференціал функції. Властивості та застосування. Похідні та диференціали вищих порядків. Деякі теореми диференціального числення. Правило Лопіталя.

§ 6. Диференціал.

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в точці $x \in [a; b]$, тобто в цій точці має похідну

$$f^{'}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Тоді з властивості 1 границь випливає

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f^{'}(x) + \alpha,\ \ \alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$,

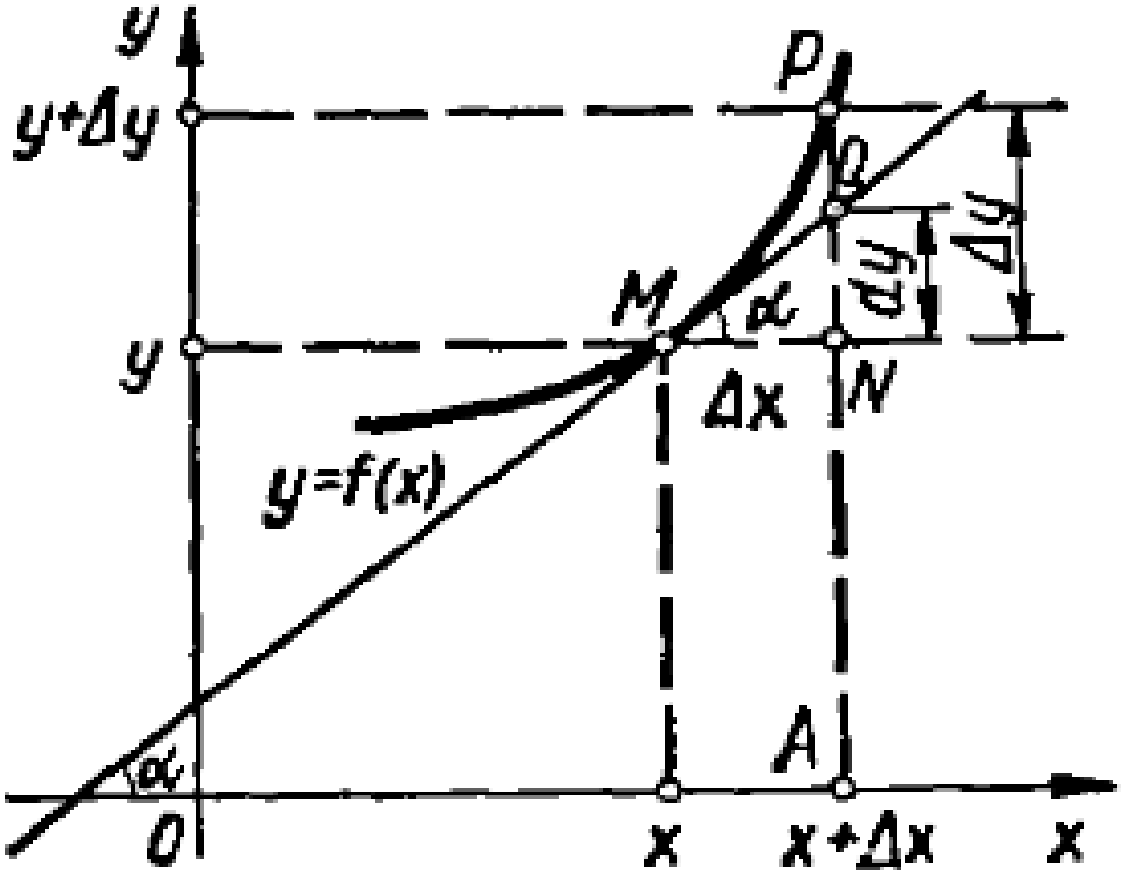
Звідки $\qquad \Delta y = f^{'}(x)\Delta x + \alpha\Delta x.$

Означення. Диференціалом функції dy функції $y = f(x)$ в точці x називається головна, лінійна відносно Δx, частина приросту функції $f(x)$ в цій точці: $dy = f^{'}(x)\Delta x.$

Диференціал dy називають також диференціалом першого порядку.

Якщо $y = x$, то $y^{'} = x^{'} = 1$, тому $dy = dx = \Delta x$, тобто диференціал dx незалежної змінної x збігається з її приростом Δx. Тому $dy = f^{'}(x)dx$.

6.1. Геометричний зміст диференціала.



6.2. Властивості диференціала. Інваріантність форми диференціала.

Оскільки диференціал функції дорівнює добутку її похідної на диференціал незалежної змінної, то властивості диференціала можна легко дістати із відповідних властивостей похідної. Якщо, наприклад, u і v — диференційовні функції від x, C — стала, то маємо такі правила знаходження диференціалів:

$$dC = 0; \qquad d(uv) = vdu + udv;$$

$$d(Cu) = Cdu; \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv;$$

Особливо важливий висновок випливає з правила диференціювання складеної функції. Нехай $y = f(x) = f(\varphi(t))$ — складена функція з проміжним аргументом $x = \varphi(t)$ і кінцевим аргументом t, причому функції $f(x)$, $\varphi(t)$ диференційовні в точках x і t. Тоді існує похідна $y'_t = y'_x x'_t$, а отже, і диференціал

$$dy = y'_t dt = y'_x x'_t dt = y'_x dx.$$

Приклад. Знайдіть диференціал функції $\boldsymbol{y = \sqrt{1 - x^2} + \ln\sin x}$.

Розв'язання. Маємо

$$dy = \left(\sqrt{1-x^2} + \ln\sin x\right)' dx = \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} + \operatorname{ctg} x\right) dx\,.$$

6.3. Застосування диференціала у наближених обчисленнях.

Як уже зазначалось, приріст Δy функції $y = f(x)$ у точці x можна наближено замінити диференціалом dy в цій точці: $\Delta y \approx dy$. Підставивши сюди значення Δy і dy, дістанемо

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

Диференціал зазвичай відшукується значно простіше, ніж приріст функції, тому дану формулу зручно використовувати для наближених обчислень значень функції.

Нехай $y = f(x)$, при цьому величина x визначається наближено, тобто з деякою абсолютною похибкою Δx, тоді і значення функції y матиме абсолютну похибку Δy. Відносна похибка, що виникає під час обчислення значення функції y, може бути наближено визначена за допомогою диференціала, тобто

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| \approx \left|\frac{dy}{y}\right|.$$

Приклад. Обчисліть наближено за допомогою диференціала значення $\sqrt{15}$.

Розв'язання. Нехай $f(x) = \sqrt{x}$. Покладемо

$x = 16$, $x + \Delta x = 15$, $\Delta x = -1$. Тоді $\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$, або

$\sqrt{15} \approx 4 + \frac{1}{2 \cdot 4}(-1) = \frac{31}{8}$. Отже,

$$\sqrt{15} \approx \frac{31}{8} = 3{,}875.$$

Приклад. Обчислити наближено $arctg\ 1{,}05$.

Нехай $f(x) = arctgx$, тоді за формулою

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$ маємо

$$arctg(x+\Delta x) \approx arctgx + (arctgx)'\,\Delta x$$

$$arctg(x+\Delta x) \approx arctgx + \frac{\Delta x}{1+x^2}\ .$$

Якщо $x = 1$, $\Delta x = 0{,}05$, то $arctg\ 1{,}05 \approx arctg\ 1 + \frac{0{,}05}{2} = \frac{\pi}{4} + 0{,}025 \approx 0{,}811.$

§7. ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

7.1. Похідні вищих порядків явно заданої функції.

Нехай на інтервалі $(a;\ b)$ задана диференційовна функція $y = f(x)$, тоді її похідна $f'(x)$, яку називатимемо ще *першою похідною* (або *похідною першого порядку*), також є функцією від x. Може трапитись, що функція $f'(x)$ також має похідну на інтервалі $(a;\ b)$ або в деякій точці $x \in (a;\ b)$. Цю останню похідну називають *другою похідною* (або *похідною другого порядку*) і позначають одним із таких символів:

$$y'', \qquad f''(x), \qquad \frac{d^2y}{dx^2}, \qquad \frac{d^2f}{dx^2}, \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Похідну від другої похідної, якщо вона існує, називають *третьою похідною*, або *похідною третього порядку*, і позначають так:

$$y''', \quad f'''(x), \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \frac{d^3f}{dx^3}, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^3}\right).$$

Похідною n-го порядку функції $y = f(x)$ називають першу похідну, якщо вона існує, від похідної $(n-1)$-го порядку:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' \quad \text{або} \quad f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))',$$

або

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Похідні порядку вище першого називають *похідними вищого порядку*.

Починаючи з похідної четвертого порядку, похідні позначають не штрихами, а цифрами. Порядок похідної береться в дужки для того, щоб не сплутати його з показником степеня.

Приклад. Знайти четверту похідну функції $y = x^5 - 7x^2 + x - 1$

$$y' = \left(x^5 - 7x^2 + x - 1\right)' = 5x^4 - 14x + 1$$

$$y'' = \left(5x^4 - 14x + 1\right)' = 20x^3 - 14$$

$$y''' = \left(20x^3 - 14\right)' = 60x^2$$

$$y^{(4)} = \left(60x^2\right)' = 120x$$

7.2. Похідні вищих порядків неявно заданої функції

Нехай функція $y = f(x)$ задана неявно рівністю $F(x, y) = 0$. Диференціюючи цю рівність по x і розв'язуючи одержане рівняння відносно y', знайдемо першу похідну.

Щоб знайти другу похідну, потрібно продиференціювати по x першу похідну і в одержане співвідношення підставити її значення. Продовжуючи диференціювання, можна знайти одну за одною послідовно похідні будь-якого порядку. Всі вони будуть виражені через незалежну змінну x і саму функцію y.

Приклад

Знайти y'', якщо $x^2 + y^3 = 1$.

○ Продиференціюємо задану рівність по x і знайдемо y':

$$2x + 3y^2y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x}{3y^2}.$$

Далі маємо

$$y'' = -\frac{2}{3}\,\frac{y^2 - x2yy'}{y^4} = -\frac{2}{3}\,\frac{y - 2xy'}{y^3} =$$

$$= -\frac{2}{3}\,\frac{y - 2x\left(-\frac{2x}{3y^2}\right)}{y^3} = -\frac{2}{9}\,\frac{3y^3 + 4x^2}{y^5} =$$

$$= -\frac{2}{9}\,\frac{3y^3 + 3x^2 + x^2}{y^5} = -\frac{2}{9}\,\frac{3\,(x^2 + y^3) + x^2}{y^5} = -\frac{2\,(3 + x^2)}{9y^5}. \; ●$$

Приклад. **Знайдіть y'', якщо $x^2+y^2+y=1$.**

Розв'язання. Продиференціюємо задану рівність за x і знайдемо y':

$$2x+2yy'+y'=0,\ \ y'(2y+1)=-2x,\ \ y'=\frac{-2x}{2y+1}.$$

Далі маємо:

$$y''=-2\frac{x'(2y+1)-x(2y+1)'}{(2y+1)^2}=-2\frac{2y+1-2y'x}{(2y+1)^2}.$$

Ураховуючи, що $y'=\dfrac{-2x}{2y+1}$, остаточно дістаємо

$$y''=-2\frac{2y+1-2\dfrac{-2x}{2y+1}x}{(2y+1)^2}=-2\frac{(2y+1)^2+4x^2}{(2y+1)^3}.$$

7.3. Похідні вищих порядків параметрично заданої функції

Нехай функція $y = f(x)$ задана параметрично рівняннями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \text{де} \quad t \in (\alpha; \beta).$$

Тоді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Якщо функції $x(t)$ і $y(t)$ мають похідні другого порядку, то можна знайти другу похідну від y по x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_t \frac{1}{x'(t)} = \frac{(y'_x)'_t}{x'(t)}.$$

Дійсно, диференціюючи першу похідну за правилом диференціювання складеної функції і використовуючи похідну оберненої функції, маємо

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_x = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_t t'_x = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_t \frac{1}{x'(t)}.$$

Аналогічно знаходять похідну будь-якого порядку $n > 2$:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)'_t \frac{1}{x'(t)}.$$

Приклад. Знайдіть $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$.

Розв'язання. Маємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3\sin t)'_t}{(2\cos t)'_t} = \frac{3\cos t}{-2\sin t} = -\frac{3}{2}\operatorname{ctg} t;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-\frac{3}{2}\operatorname{ctg} t)'_t}{(2\cos t)'_t} = \frac{\frac{3}{2\sin^2 t}}{-2\sin t} = -\frac{3}{4\sin^3 t}.$$

Приклад. Знайти $\boldsymbol{\frac{d^n y}{dx^n}}$***, якщо*** $\boldsymbol{x = \ln t,\ y = t^3.}$

Маємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(t^3)'_t}{(\ln t)'_t} = \frac{3t^2}{1/t} = 3t^3;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(3t^3)'_t}{(\ln t)'_t} = \frac{9t^2}{1/t} = 9t^3 = 3^2t^3;$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{(9t^3)'_t}{(\ln t)'_t} = \frac{27t^2}{1/t} = 27t^3 = 3^3t^3;$$

....

$$\frac{d^ny}{dx^n} = 3^nt^3;$$

7.4. Диференціали вищих порядків.

Нехай маємо диференційовну функцію $y = f(x)$, де x – незалежна змінна. Тоді її перший диференціал або диференціал першого порядку

$$\boldsymbol{dy = f'(x)\,dx}$$

— це деяка функція від x і можна говорити про диференціал цієї функції.

Другим диференціалом d^2y, або *диференціалом другого порядку*, називається диференціал від першого диференціала:

$$d^2y = d\,(dy).$$

Оскільки dx не залежить від x, то при диференціюванні першого диференціала dx можна винести за знак похідної, тому

$$d^2y = d\,(dy) = d\,(f'(x)\,dx) = (f'(x)\,dx)'_x\,dx = f''(x)\,dxdx = f''(x)\,dx^2.$$

Тут dx розглядається як єдиний символ (а не як добуток d на x), тому дужки в степені диференціала dx опускають, $(dx)^n = dx^n$:

$$d^2y = f''(x)\,dx^2.$$

Третім диференціалом d^3y, або *диференціалом третього порядку*, називається диференціал від другого диференціала:

$$d^3y = d(d^2y) = d(f''(x)\,dx^2) = f'''(x)\,dx^3.$$

Взагалі, *n-м диференціалом* d^ny, або *диференціалом n-го порядку*, називається диференціал від диференціала $(n-1)$-го порядку:

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

Приклад. Знайти d^3y, якщо $y = sin2x$.

Скористаємося формулою $d^3y = f'''(x)dx^3$.

Оскільки

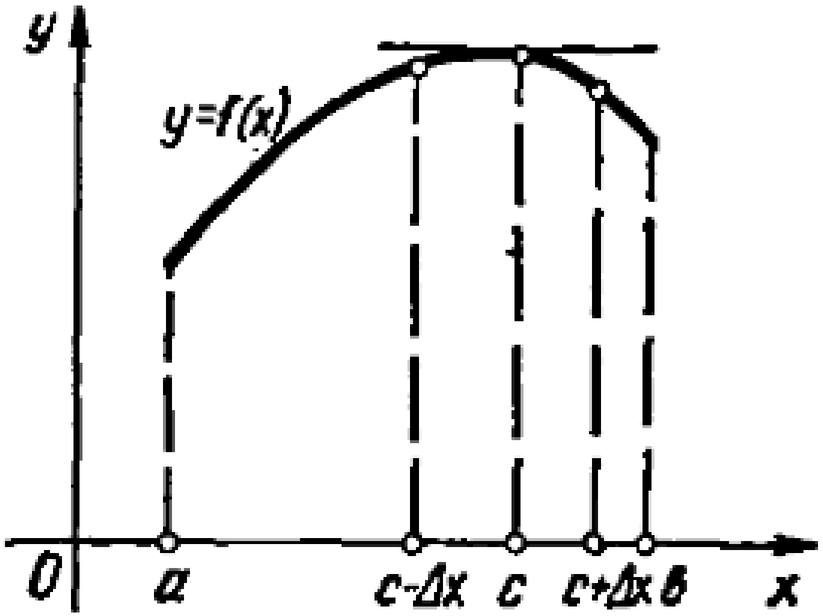
$y' = 2cos2x,\ y'' = -4sin2x, y''' = -8cos2x,$

то $$d^3y = -8cos2xdx^3$$

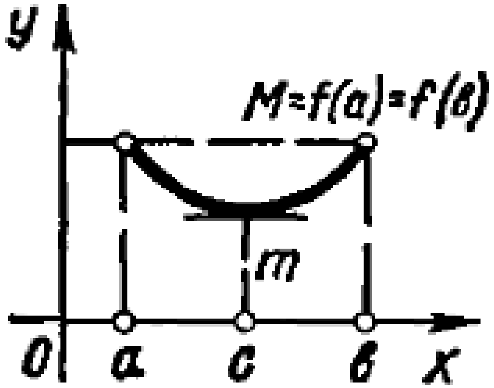
§ 8. ДЕЯКІ ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

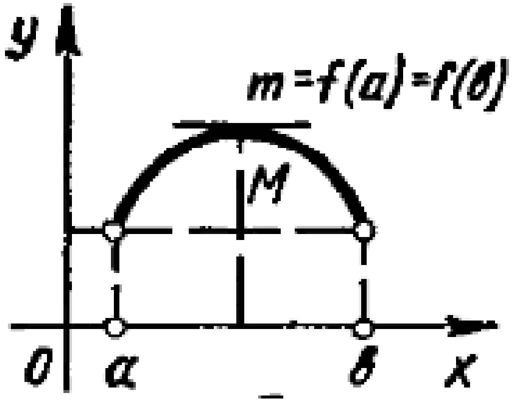
Теорема Ферма.

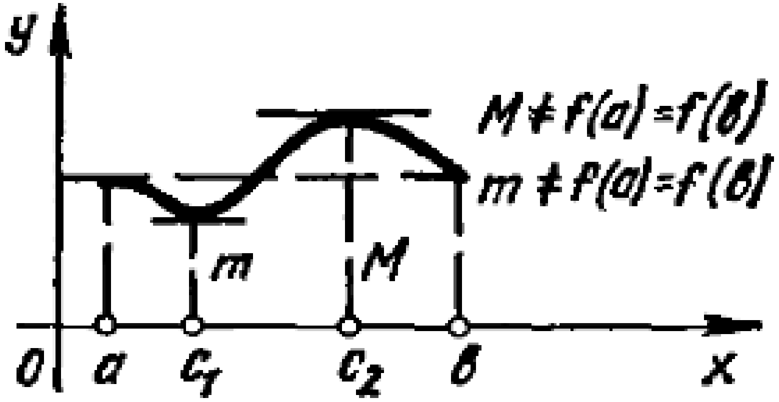
Нехай функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $(a; b)$ і набуває свого найбільшого або найменшого значення у деякій точці c цього інтервалу. Тоді, якщо в точці c існує похідна $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.

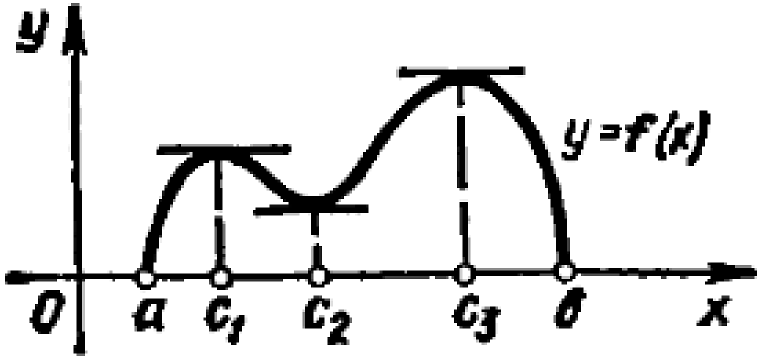


Теорема Ролля. *Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, диференційовна в інтервалі $(a; b)$ і на кінцях відрізка набуває однакових значень $f(c) = f(b)$, то знайдеться хоча б одна точка $c \in (a; b)$, в якій $f'(c) = 0$.*









Теорема Коші. *Якщо функції* $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ *неперервні на відрізку* $[a; b]$, *диференційовні в інтервалі* $(a; b)$, *причому* $\varphi'(x) \neq 0$, $x \in \in (a; b)$, *то існує така точка* $c \in (a; b)$, *що*

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Теорема Лагранжа. *Якщо функція* $f(x)$ *, неперервна на відрізку* $[a;\ b]$*, диференційовна в інтервалі* $(a;\ b)$*, то всередині цього інтервалу знайдеться хоча б одна точка* $c \in (a;\ b)$*, в якій*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Правило Лопіталя

Раніше ми ознайомились з деякими способами розкриття невизначеностей. Розглянемо ще один спосіб, який ґрунтується на застосуванні похідних.

Теорема 1. *Нехай функції* $f(x)$, $\varphi(x)$ *визначені і диференційовні в околі точки* x_0, *за винятком, можливо, самої точки* x_0, *причому*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 0,$$

і у вказаному околі $\varphi'(x) \neq 0$. *Тоді якщо існує границя відношення похідних* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, *то існує і границя відношення функцій* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *і ці границі рівні між собою:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{5x} - e^{2x}}{x}$.

Маємо невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$, тому за правилом Лопіталя:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{5x} - e^{2x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^{5x} - e^{2x})'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{5e^{5x} - 2e^{2x}}{1} = \frac{5 - 2}{1} = 3.$$

З а у в а ж е н н я 1. Теорема справедлива і в тому випадку, коли $x_0 = \infty$.

З а у в а ж е н н я 2. Якщо похідні $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ задовольняють ті самі умови, що і функції $f(x)$ і $\varphi(x)$, то теорему 1 можна застосувати ще раз. При цьому дістанемо

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}.$$

Взагалі, теорему 1 можна застосовувати доти, поки не прийдемо до відношення похідних $\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}$, яке має певну границю при $x \to x_0$. Цю саму границю матиме й відношення функцій:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}.$$

Приклад. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos x}$.

Розв'язання. Тут невизначеність $\dfrac{0}{0}$. За правилом Лопіталя дістаємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}.$$

Знову маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Правило Лопіталя застосовуємо ще раз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{\cos x}=\frac{1+1}{1}=2.$$

Теорема 2. *Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначені і диференційовні в околі точки x_0 і в цьому околі*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty, \quad \varphi'(x) \neq 0.$$

Тоді якщо існує границя $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, *то існує границя* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ *і*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Приклад. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\dfrac{\infty}{\infty}$, тоді

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

Виражене теоремами 1 і 2 правило обчислення границь називають *правилом Лопіталя* за іменем математика, який опублікував його. Але це правило відкрив І. Бернуллі, тому правило Лопіталя називають ще *правилом Бернуллі — Лопіталя*.

Зауважимо, що правило Лопіталя застосовується лише для розкриття невизначеностей виду $\frac{0}{0}$ і $\frac{\infty}{\infty}$, які називають *основними*. Відомі ще й такі невизначеності, як $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, ∞^0, 1^∞, 0^0. Покажемо, як ці невизначеності зводяться до основних.

а) Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$, то невизначеність виду $0 \cdot \infty$ можна звести до основних так:

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)\varphi(x)] = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{1/\varphi(x)} = \frac{0}{0},$$

або

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)\varphi(x)] = \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)}{1/f(x)} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Приклад 1 $\lim\limits_{x\to 2} (2 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}$

$$\lim_{x\to 2} (2 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} = \lim_{x\to 2} \frac{2 - x}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4}} = \lim_{x\to 2} \frac{-1}{-1/\sin^2 \frac{\pi x}{4} \cdot \frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}.$$

Приклад 2. $\lim\limits_{x\to+0} x^2 \ln x$.

$$\lim_{x\to+0} x^2 \ln x = \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{1/x^2} = \lim_{x\to+0} \frac{(\ln x)'}{(1/x^2)'} = \lim_{x\to+0} \frac{1/x}{-2/x^3} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to+0} x^2 = 0 .$$

б) Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$, то невизначеність виду $\infty - \infty$ вводиться до невизначеності $\frac{0}{0}$:

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{1/\varphi(x) - 1/f(x)}{1/f(x) \cdot 1/\varphi(x)} .$$

Приклад. $\lim_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg} x - \sec x)$.

$$\lim_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg} x - \sec x) = \lim_{x\to\pi/2}\left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin x - 1}{\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pi/2}\frac{(\sin x - 1)'}{(\cos x)'} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{-\sin x} = 0.$$

в) Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} (\varphi(x) \ln f(x))}$$

і невизначеність виду 0^0 зводиться до невизначеності $0 \cdot \infty$, розглянутої вище. Аналогічно розкриваються невизначеності 1^∞ і ∞^0.

Приклад 1. $\lim\limits_{x\to 0} (\ln \operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$

Тут невизначенність виду ∞^0. Маємо

$$\lim_{x\to 0} (\ln \operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{tg} 2x) \ln \ln \operatorname{ctg} x}$$

Знайдемо границю в показнику. Для цього зведемо дану невизначеність до виду $\frac{\infty}{\infty}$, потім скористаємось правилом Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{tg} 2x \ln\ln \operatorname{ctg} x) = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\ln\operatorname{ctg} x}{1/\operatorname{tg} 2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\ln\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{-1/\ln\operatorname{ctg} x\ 1/\operatorname{ctg} x\ 1/\sin^2 x}{-2/\sin^2 2x} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{\sin x\cos x\ln\operatorname{ctg} x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{x\cos x\ln\operatorname{ctg} x} = 0,$$

тому

$$\lim_{x\to 0}(\ln\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^0 = 1.$$

Приклад 2. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$

Маємо невизначеність виду 1^∞, тоді

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\cos 2x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\cos 2x = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x/\cos 2x}{2x} = -2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{2x} = -2;$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)\ 1/x^2 = e^{-2}.$$

Приклад 3. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x)^{\operatorname{tg} 3x}$

Тут невизначеність виду 0^0, тоді

$$\lim_{x\to 0}(\sin 2x)^{\operatorname{tg} 3x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg} 3x \ln\sin 2x};$$

$$\lim \operatorname{tg} 3x \ln\sin 2x = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{\operatorname{ctg} x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{ctg} 2x}{-3/\sin^2 3x} = -\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\operatorname{tg} 2x} = -\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{2x} = 0.$$

$$\lim_{x\to 0}(\sin 2x)^{\operatorname{tg} 3x} = e^0 = 1.$$

Таким чином, щоб розкрити невизначеності $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, їх треба спочатку звести до основних і лише після цього застосовувати правило Лопіталя.