Математичний аналіз

Лекція 3.

Тема: Похідна. Механічний фізичний та геометричний зміст похідної. Правила диференціювання. Таблиця похідних. Похідна складеної функції. Похідні функцій заданих параметрично та неявно. Логарифмічне диференціювання функцій.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Диференціальне числення — розділ математики, в якому розглядається дослідження функцій за допомогою похідних та диференціалів.

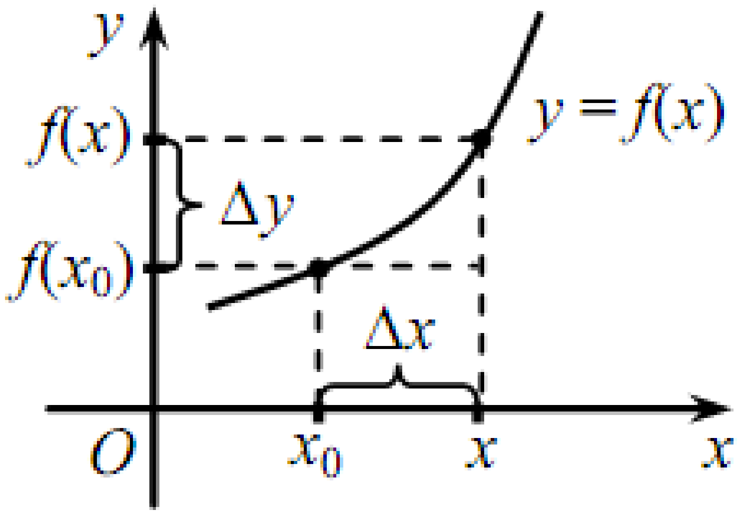
Деякі задачі диференціального числення розв'язані ще в давнину. Так, Евклід розв'язав задачу про паралелограм найбільшої площі, який можна вписати в даний трикутник; Архімед побудував дотичну до спіралі, що носить його ім'я, а Аполлоній — дотичну до еліпса, гіперболи та параболи.

Загальні методи диференціального числення розроблено Ньютоном і Лейбніцем наприкінці 17 ст., але лише в 19 ст. Коші обгрунтував ці методи на основі теорії границь.

§4. Похідна.

Центральне поняття диференціального числення — похідна — широко використовується при розв’язуванні багатьох задач з математики, фізики та інших наук, а також при вивченні різних процесів. Якщо перебіг того чи іншого процесу описується деякою функцією, то дослідження даного процесу зводиться до вивчення властивостей цієї функції та її похідної.

Нехай на деякому інтервалі $(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$ задано функцію $y = f(x)$. Візьмемо будь-яку точку $x \in (\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$ і надамо x довільного приросту Δx такого, щоб точка $x + \Delta x$ також належала інтервале $(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$. Знайдемо приріст функції: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.



4.1. Означення похідної.

Означення. Похідною функції $y = f(x)$ в точці x називається границя відношення приросту функції Δy в цій точці до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля, якщо ця границя існує.

Таким чином, за означенням

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Похідна функції $y = f(x)$ в точці x позначається одним із таких символів:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = y'_x.$$

Значення похідної функції $y = f(x)$ в точці $x = x_0$ позначається одним із таких символів:

$$y'(x_0) = f'(x_0).$$

Приклад. Знайдіть за означенням похідну функції $y = \cos x$.

Розв'язання. Запишемо приріст заданої функції

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x .$$

Використовуючи першу важливу границю у вигляді

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1,$$

а також формулу розкладання різниці косинусів у добуток

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x - y}{2} \sin \frac{x + y}{2},$$

дістаємо

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -1\sin x = -\sin x\,.$$

4.2. Механічний фізичний та геометричний зміст похідної.

Механічний зміст похідної: Швидкість в даний момент часу — це похідна від пройденого шляху $S(t)$ за часом $t : v = S'(t)$.

Фізичний зміст похідної: Якщо функція $y = f(x)$ описує деякий фізичний процес, то похідна $y' = f'(x)$ є швидкістю зміни цього процесу. В цьому полягає фізичний зміст похідної. Інакше кажучи, яку б залежність не відображала функція $y = f(x)$, відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ можна розглядати як середню швидкість зміни функції у відносно аргументу x, а похідну $f'(x)$ — миттєву швидкість зміни функції.

Геометричний зміст похідної. Кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ або тангенс кута α, що утворює дотична до кривої в даній точці з додатним напрямом осі Ox,— це похідна $f'(x_0)$ в цій точці: $k = tg\alpha = f'(x_0)$.

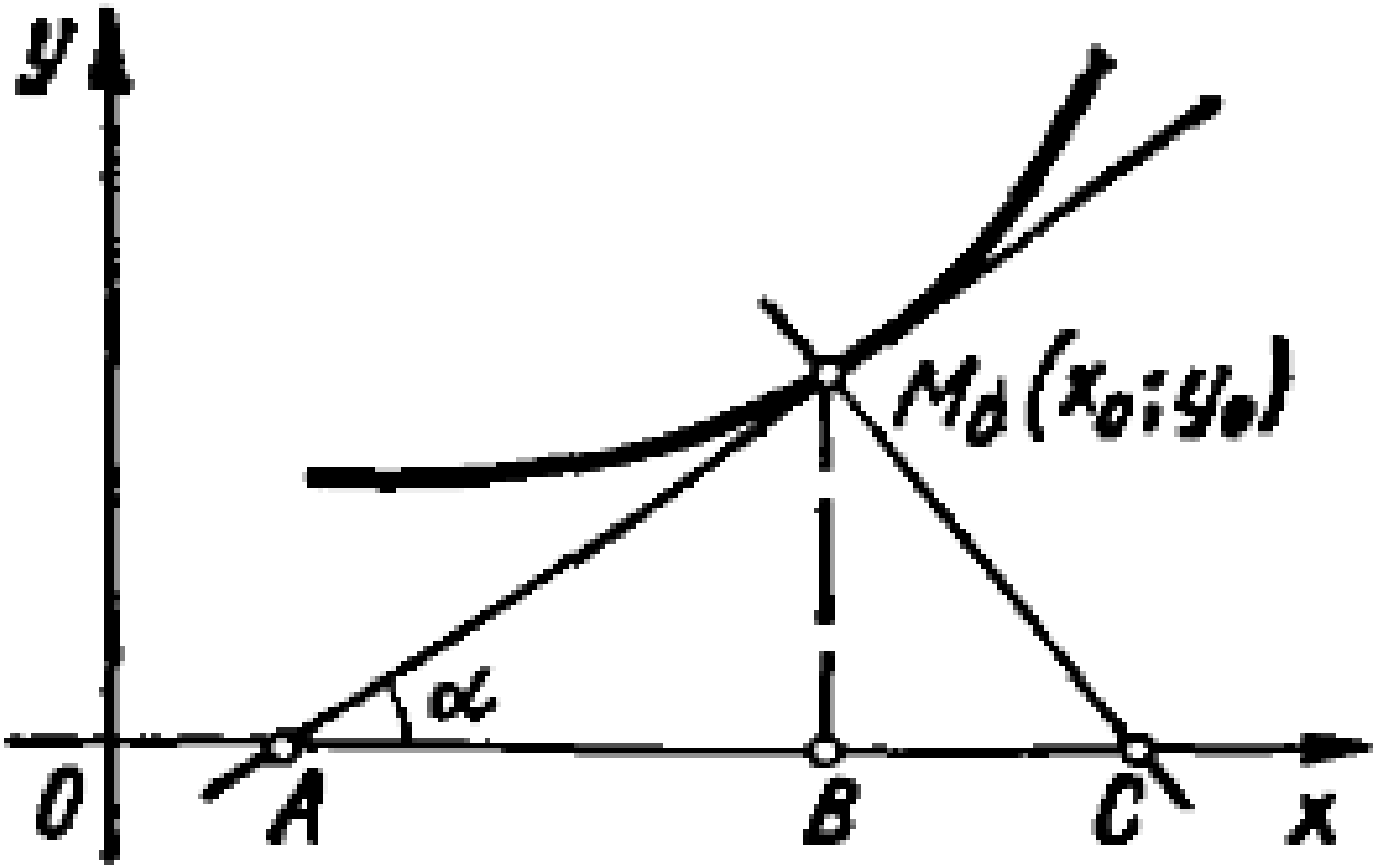
Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0).$$

Нормаллю до кривої називається пряма, що проходить через точку дотику, перпендикулярно до дотичної.

Оскільки кутові коефіцієнти дотичної і нормалі пов’язані між собою умовою перпендикулярності, то рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ має вигляд:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$



y
$M_0(x_0; y_0)$
α
0
A
B
C
x

4.2. Неперервність і диференційовність функцій.

Функція $f(x)$ називається диференційовною в точці x_0, якщо в цій точці вона має похідну $f'(x_0)$.

Функцію $f(x)$ називають диференційовною на інтервалі, якщо вона диференційовна в кожній точці цього інтервалу.

Зв’язок між неперервністю функції в точці і диференційовністю її в цій точці встановлює така теорема.

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0, то вона в цій точці неперервна.

§ 5. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ.

5.1. Правила диференціювання суми, різниці, добутку і частки.

Теорема 1. Якщо функції $u = u(x)$, $v = v(x)$ диференційовні в точці x, сума, різниця, добуток і частка цих функцій (частка за умови, що $v(x) \neq 0$) також диференційовні в цій точці і справедливі такі формули:

$$(u + v)' = u' + v';$$

$$(u - v)' = u' - v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Теорема 2. Якщо $y = f(x) = C$, де C — стале число, то

$$f'(x) = C' = 0.$$

Теорема 3. Сталий множник можна виносити за знак похідної, тобто $(Cu)' = Cu'$.

5.2. Гіперболічні функції.

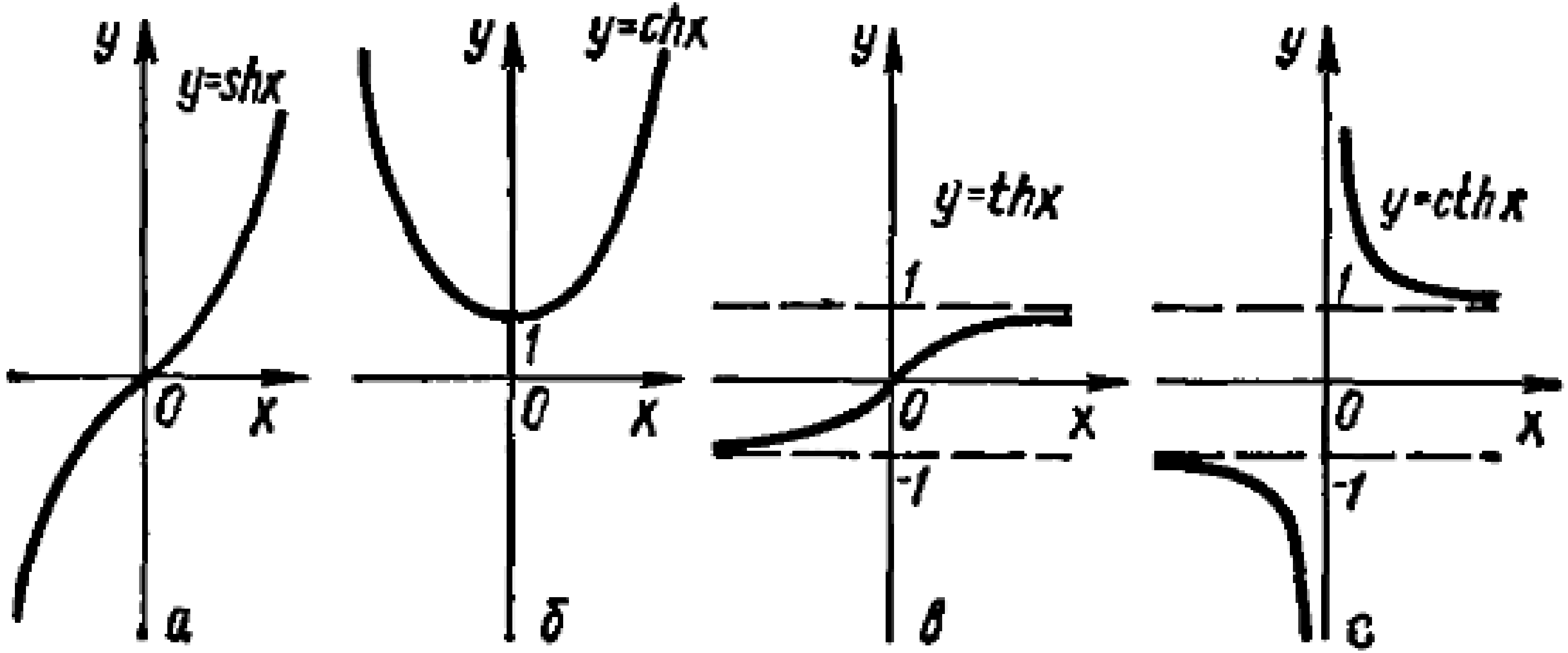
У математиці, будівельній механіці, електротехніці та інших дисциплінах зустрічаються так звані гіперболічні функції.

Гіперболічними синусом $sh\,x$, косинусом $ch\,x$, тангенсом $th\,x$ і котангенсом $cth\,x$ називаються

$$sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$th\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \quad cth\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Справедлива формула: $ch^2 x - sh^2 x = 1$.


y
y=shx
0
x
a
y
y=chx
1
0
x
б
y
y=thx
1
0
x
-1
в
y
y=cthx
1
0
x
-1
c

5.3. Похідна оберненої функції.

Нехай $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ — пара взаємно обернених функцій.

Теорема 4. Якщо функція $y = f(x)$ строго монотонна на інтервалі $(a; b)$ і має відмінну від нуля похідну $f'(x)$ в довільній точці цього інтервалу, то існує обернена функція $x = \varphi(y)$, яка також має похідну $\varphi'(y)$, причому $\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

5.4. Таблиця похідних.

1. $C' = 0$;

2. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$;

1. При $\alpha = 1$ маємо $(x)' = 1$;
2. При $\alpha = \frac{1}{2}$ маємо $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
3. При $\alpha = -1$ маємо $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$;

3. $(a^x)' = a^x \, lna$, $a > 0$, $a \neq 1$;

4. $(e^x)' = e^x$;

5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \, lna}$;

6. $(ln \, x)' = \frac{1}{x}$;

7. $(\sin x)' = \cos x;$

8. $(\cos x)' = -\ \sin x;$

9. $(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{cos^2 x};$

10. $(ctg\ x)' = -\ \frac{1}{sin^2 x};$

11. $(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x;$

12. $(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x\ ;$

13. $(\mathrm{th}\, x)' = \frac{1}{ch^2 x};$

14. $(cth\ x)' = -\frac{1}{sh^2 x};$

15. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

16. $(\arccos x)' = -\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

17. $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2};$

18. $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}\ .$

Приклади. Знайти похідні функцій.

1. $y = \frac{3}{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$

Розв'язання: $y' = \left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = (3x^{-2} - x^{-1/2})' =$

$= 3(x^{-2})' - (x^{-1/2})' = 3\cdot(-2)x^{-2-1} - (-1/2)x^{-1/2-1} =$

$= -6x^{-3} + (1/2)x^{-3/2} = -\frac{6}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$

2. $y = \dfrac{x^2}{\sin x}$

Розв'язання. За формулою похідної частки маємо

$$y' = \left(\frac{x^2}{\sin x}\right)' = \frac{(x^2)'\sin x - x^2(\sin x)'}{(\sin x)^2} = \frac{2x\sin x - x^2\cos x}{\sin^2 x}.$$

3. $y = tg\,x$

$$(\mathrm{tg}\,x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

5.5. Похідна складеної функції.

Нехай $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$, тоді $y = f\big(\varphi(x)\big)$ — складена функція з проміжним аргументом u і кінцевим x.

Теорема 5. Якщо функція $u = \varphi(x)$ мав похідну u'_x в точці x, а функція $y = f(u)$ має похідну y'_u у відповідній точці u, то складена функція $y = f\big(\varphi(x)\big)$ має похідну y'_x в точці x і справедлива формула

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Застосовуючи правило диференціювання складеної функції, знайдіть похідні функцій.

1. $y=(x^2+1)^3$

Розв'язання. Позначимо $u=x^2+1$, тоді $y=(u(x))^3$. За правилом диференціювання складеної функції маємо:

$$y'=(u^3)'=3u^2u'=3(x^2+1)^2(x^2+1)'=3(x^2+1)^2(2x)=6x(x^2+1)^2.$$

2. $y = \sqrt{x^4 + x^3 + 1}$

Розв'язання. У цьому разі $y = \sqrt{u}$, де $u = x^4 + x^3 + 1$. Тоді

$$y' = (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u' = \frac{(x^4 + x^3 + 1)'}{2\sqrt{x^4 + x^3 + 1}} = \frac{4x^3 + 3x^2}{2\sqrt{x^4 + x^3 + 1}}.$$

3. $y = ln(x^2 + 1)$

Розв'язання. Маємо складену функцію $y = \ln u$, де $u = x^2 + 1$. Тоді

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u}u' = \frac{1}{x^2+1}(x^2+1)' = \frac{2x}{x^2+1}.$$

5.6. Похідна функції, заданої параметрично.

Функція може задаватися параметрично:
$x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \le t \le \beta.$

Приклад. Рівняння кола радіуса R з центром в початку координат відоме: $x^2 + y^2 = R^2$. Параметрично воно запишеться так:
$x = R\cos t, y = R\sin t, 0 \le t \le 2\pi.$

Нехай функція $y = f(x)$ задана параметрично у вигляді: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$. Тоді

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Приклади.

1. Знайти y'_x, якщо $x = Rcos\, t$, $y = Rsin\, t$.

Оскільки $x'_t = -Rsin\, t$, $y'_t = Rcos\, t$, то за формулою $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ отримаємо: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{Rcos\, t}{-Rsin\, t} = -ctg\, t.$

2. Знайти y'_x, якщо $x = 2t + t^2$, $y = t^2 - 2t^3$.

Розв'язання. Знаходимо похідні

$$y'(t) = 2t - 6t^2, \; x'(t) = 2 + 2t,$$

тоді

$$y'_x = \frac{2t - 6t^2}{2 + 2t} = \frac{t - 3t^2}{1 + t}.$$

5.7. Диференціювання неявно заданої функції.

Нехай неявна функція $y(x)$ задана рівнянням

$$F(x, y) = 0$$

Щоб продиференціювати неявно задану функцію, потрібно взяти похідну по x від обох частин рівності $F(x, y) = 0$, вважаючи y функцією від x, і одержане рівняння розв'язати відносно y'. Похідна неявної функції виражається через незалежну змінну x і саму функцію y.

Приклад
Знайти похідну y', якщо $x^2 + y^2 - 2y + 3x = 1$.
○ Маємо

$$2x + 2yy' - 2y' + 3 = 0,$$

$$y'(2y - 2) = -2x - 3, \quad y' = \frac{2x + 3}{2 - 2y}.$$

Зауважимо, що при диференціюванні другого доданка ми скористалися правилом диференціювання складеної функції:

$$(y^2)'_x = (y^2)'_y y'_x = 2yy'. \quad ●$$

2. Знайдіть y'_x , якщо $arctg\frac{y}{x} = ln\sqrt{x^2 + y^2}$.

Розв'язання. Послідовно маємо

$$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)\right), \quad \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{1}{2(x^2 + y^2)}(x^2 + y^2)',$$

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2}\frac{y'x - y}{x^2} = \frac{2x + 2yy'}{2(x^2 + y^2)}, \; y'x - y = x + yy', \; y'(x - y) = x + y,$$

звідси

$$y' = \frac{x + y}{x - y}.$$

У деяких випадках при знаходженні похідної доцільно задану функцію спочатку прологарифмувати, а потім знайти похідну як від неявної функції. Така операція називається *логарифмічним диференціюванням.*

Приклад

Знайти похідну функції $y = \dfrac{x^2 (x^2 + 1) e^x}{(x-1)\sqrt{3x+5}}$.

○ Цю функцію можна диференціювати за правилом диференціювання частки. Проте такий спосіб дуже громіздкий. Застосуємо логарифмічне диференціювання. Маємо

$$\ln y = 3\ln x + \ln(x^2+1) + x - \ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln|3x+5|;$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x} + \frac{2x}{x^2+1} + 1 - \frac{1}{x-1} - \frac{3}{2(3x+5)};$$

$$y' = \frac{x^3(x^2+1)e^x}{(x-1)\sqrt{3x+5}}\left(\frac{3}{x} + \frac{2x}{x^2+1} + 1 - \frac{1}{x-1} - \frac{3}{2(3x+5)}\right). \; ●$$

Знайдіть похідну функції $y = \dfrac{x^2(3x-2)e^x}{\sin x\sqrt{2x+1}}$.

Розв'язання. Цю функцію можна диференціювати за правилом диференціювання частки. Проте такий спосіб для розглядуваного прикладу громіздкий. Застосуємо логарифмічне диференціювання. Маємо

$$\ln y = \ln\left(\frac{x^2(3x-2)e^x}{\sin x\sqrt{2x+1}}\right),\ \ln y = 2\ln x + \ln(3x-2) + x - \ln\sin x - \frac{1}{2}\ln(2x+1),$$

$$(\ln y)' = \left(2\ln x + \ln(3x-2) + x - \ln\sin x - \frac{1}{2}\ln(2x+1)\right)',$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{2}{x} + \frac{3}{3x-2} + 1 - \frac{1}{\sin x}\cos x - \frac{1}{2x+1},$$

$$y' = y\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{3x-2} + 1 - \frac{1}{\sin x}\cos x - \frac{1}{2x+1}\right),$$

або

$$y' = \frac{x^2(3x-2)e^x}{\sin x\sqrt{2x+1}}\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{3x-2} + 1 - \operatorname{ctg} x - \frac{1}{2x+1}\right).$$

У розглянутому прикладі похідну можна знаходити двома способами: за допомогою відомих правил і формул диференціювання і логарифмічним диференціюванням. Проте існують функції, похідні яких знаходять лише логарифмічним диференцюванням. Прикладом такої функції є *показниково-степенева функція*

$$y = u^v,$$

де u, v — задані і диференційовні функції від x.

Тоді

$$\ln y = v \ln u; \quad \frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{u'}{u};$$

$$y' = u^v \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right) = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} u'.$$

Отже

$$(u^v)' = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} u'.$$

Приклад. Знайдіть похідну функції $y = x^{\cos x}$.

Розв'язання. Перший спосіб. Застосуємо логарифмічне диференціювання. Маємо

$$\ln y = \ln x^{\cos x}, \ \ln y = \cos x \ln x, \ (\ln y)' = (\cos x \ln x)',$$

$$\frac{y'}{y} = -\sin x \ln x + \cos x \frac{1}{x}, \ y' = y\left(-\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x}\right),$$

тобто

$$y' = x^{\cos x}\left(-\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x}\right).$$

Другий спосіб. Скориставшись основною логарифмічною тотожністю $a^{\log_a b} = b$, запишемо задану функцію у вигляді

$$y = x^{\cos x} = \left(e^{\ln x}\right)^{\cos x} = e^{\cos x \ln x}.$$

Тоді

$$y' = \left(e^{\cos x \ln x}\right)' = e^{\cos x \ln x} \ (\cos x \ln x)' =$$

$$= e^{\cos x \ln x}\left(-\sin x \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^{\cos x}\left(-\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x}\right).$$

5.8. Зведена таблиця правил і формул диференціювання.

Зведемо формули в таблицю. Вважатимемо, що $u = u(x)$, $v = v(x)$ — диференційовні функції, C — стала величина.

П р а в и л а д и ф е р е н ц і ю в а н н я:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'; \qquad y = f(u), \quad u = u(x) \Rightarrow y'_x = y'_u u'_x;$$

$$(uv)' = u'v + uv'; \qquad y = f(x), \quad x = \varphi(y) \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y};$$

$$(Cu)' = Cu'; \qquad y = y(t), \quad x = x(t) \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t};$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}; \qquad (u^v)' = u^v \ln u \cdot v' + vu^{v-1}u'.$$

Формули диференціювання:

1. $C' = 0;$
2. $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1} u', \quad \alpha \in R;$
3. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u', \quad a > 0, \quad a \neq 1;$
4. $(e^u)' = e^u u';$
5. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} u';$
6. $(\ln u)' = \frac{1}{u} u';$
7. $(\sin u)' = \cos u \cdot u';$
8. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$

9. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} u'$;

10. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} u'$;

11. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$;

12. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$;

13. $(\operatorname{th} u)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u} u'$;

14. $(\operatorname{cth} u)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 u} u'$;

15. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$;

16. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$;

17. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} u'$;

18. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} u'$.