Математичний аналіз

Лекція 2

Тема: Односторонні границі. Основні теореми про границі. Важливі границі. Розкриття деяких невизначеностей. Порівняння нескінченно малих функцій. Неперервність функції.

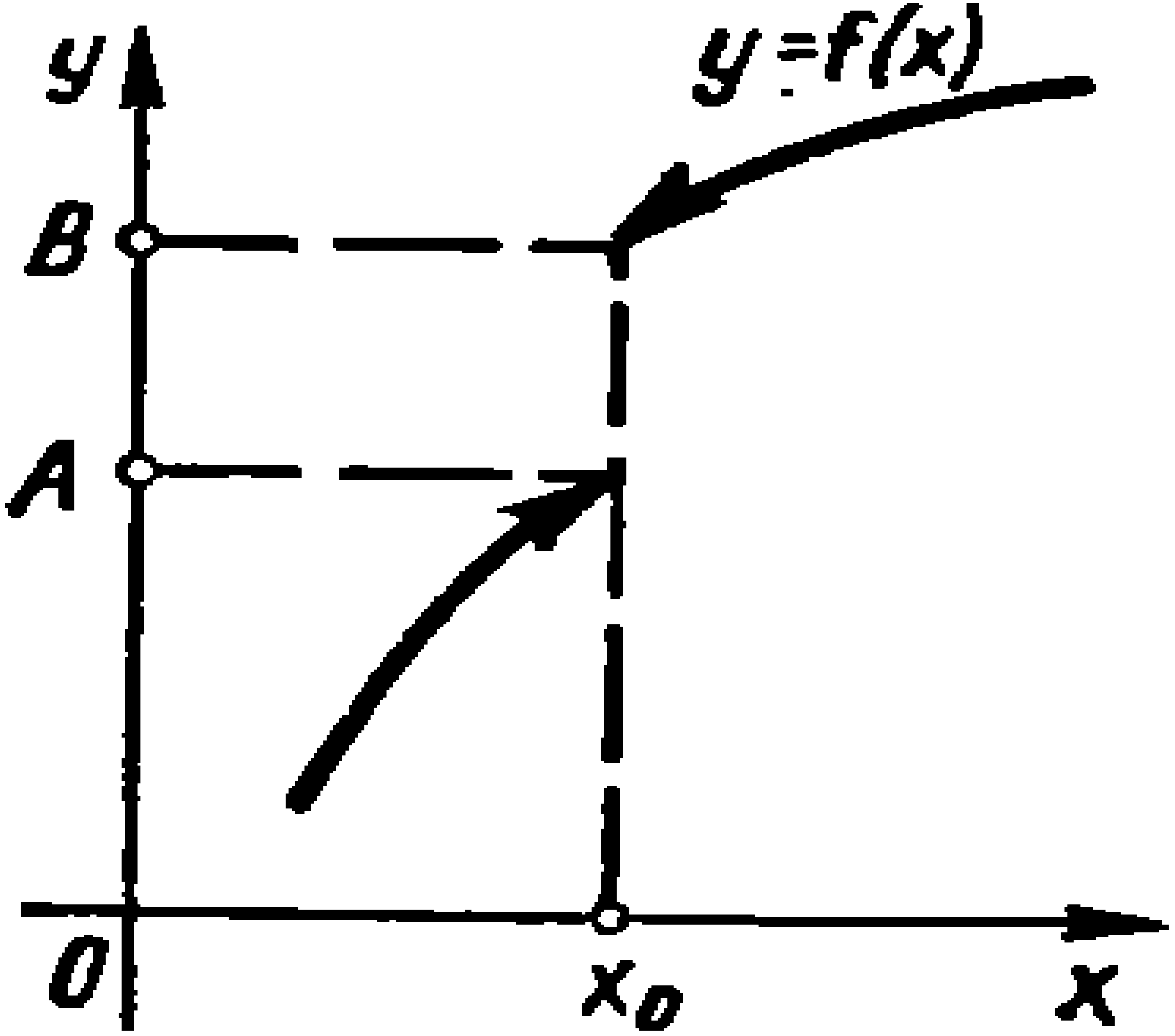
2.9. Односторонні границі

У деяких випадках спосіб наближення аргументу x до x_0 суттєво впливає на значення границі функції. Тому доцільно ввести поняття односторонніх границь.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0.

Означення. Число A називається границею функції $y = f(x)$ зліва (або лівою границею) в точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $x \in (\, x_0 - \delta;\ x_0)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Означення. Число B називається границею функції $y = f(x)$ справа (або правою границею) в точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $x \in (\, x_0;\ x_0 + \delta)$ виконується нерівність $|f(x) - B| < \varepsilon$.


y
y = f(x)
B
A
0
x_0
x

Ліву і праву границі функції називають односторонніми границями і позначають

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = A$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = B$$

Якщо $x_0 = 0$, то записують

$$\lim_{x \to -0} f(x) = f(-0) = A$$

$$\lim_{x \to +0} f(x) = f(+0) = B$$

2.10. Основні теореми про границі.

Теорема 1 (про границю суми, добутку і частки). Якщо кожна з функцій $f(x)$ та $y = g(x)$ має скінченну границю в точці x_0, то в цій точці існують також границі функцій $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (остання за умови, що $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$) і справедливі формули

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$
$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)-g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)$$
$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$$

Дана теорема справджується для алгебраїчної суми та добутку будь-якого скінченного числа функцій, які мають границю в точці.

Наслідки. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ існує, то виконуються рівності:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} cf(x) = c \lim\limits_{x \to x_0} f(x), c \in R$;
2. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right]^n$;
3. $\lim\limits_{x \to x_0} x^n = {x_0}^n$

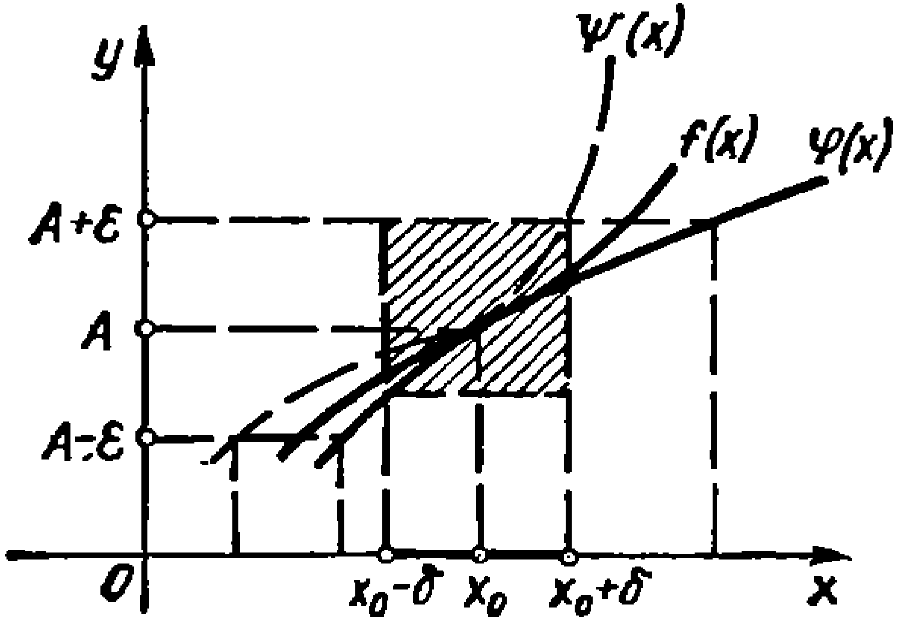
Приклад. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x \to 3}\left(4x^2 - 5x + 8\right)$

Оскільки функція $f(x) = 4x^2 - 5x + 8$ $\left(D(f) = (-\infty, +\infty)\right)$ є елементарною, то підставивши в аналітичний вираз функції замість аргументу x його граничне значення 3, одержимо

$$\lim_{x \to 3}\left(4x^2 - 5x + 8\right) = 4 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 8 =$$

$$= 36 - 15 + 8 = 29$$

Теорема 2. (про границю проміжної функції). Нехай в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0, визначені функції $\varphi(x)$, $f(x)$ і $\psi(x)$ і виконуються нерівності $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$. Тоді, якщо функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ мають в точці x_0 одну й ту саму границю $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = A$, то таку саму границю має функція $f(x)$: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.



§3. ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ ФУНКЦІЙ
3.1. Важливі границі.

3.1.1. Перша важлива границя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Наслідки:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$

Приклади. Знайти границю функції:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 9x}{x}$.

При $x \to 0$ чисельник та знаменник є нескінченно малими. Тому маємо невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$. Обчислимо цю границю:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 9x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{9 \sin 9x}{9x} = 9 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin 9x}{9x} = 9 \cdot 1 = 9.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{tg3x}$.

При $x \to 0$ чисельник та знаменник є нескінченно малими. Тому маємо невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$. Обчислимо цю границю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{tg3x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{x}\cdot\frac{x}{tg3x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{tg3x} =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{4x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{3tg3x} = \frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{tg3x} = \frac{4}{3}\cdot 1\cdot 1 =$$

$$= \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

При $x \to 0$ чисельник та знаменник є нескінченно малими. Тому маємо невизначеність$\left(\frac{0}{0}\right)$. Обчислимо цю границю.

Для цього використаємо формулу: $1 - cos\alpha = 2sin^2\frac{\alpha}{2}$.

Тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = 2\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2 =$$

$$=2\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{\frac{2x}{2}}\right)^2 = 2\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{1}{2}.$$

3.1.2. Друга важлива границя:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \text{ або } \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Приклад. Знайти границю функції: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+5}\right)^{2-7x}$.

- Розв’язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+5}\right)^{2-7x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5-5-4}{3x+5}\right)^{2-7x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{9}{3x+5}\right)^{2-7x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{(3x+5)/_{-9}}\right)^{2-7x}=$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{(3x+5)/_{-9}}\right)^{\frac{3x+5}{-9}\cdot\frac{-9}{3x+5}(2-7x)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{(3x+5)/_{-9}}\right)^{\frac{3x+5}{-9}}\right]^{\frac{-9}{3x+5}(2-7x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-9}{3x+5}(2-7x)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{63x-18}{3x+5}} = e^{21}$$

Окремо знайдемо $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{63x-18}{3x+5} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{63-\frac{18}{x}}{3+\frac{5}{x}} = \frac{63-0}{3+0} = 21$

3.1.3. Розкриття деяких невизначеностей

Як уже вказувалось, у найпростіших випадках знаходження границі $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ зводиться до підстановки у функцію $f(x)$ граничного значення аргументу x_0. Але часто така підстановка приводить до невизначених виразів. Це такі вирази:

1) відношення двох нескінченно великих величин — невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$;

2) різниця двох нескінченно великих величин — невизначеність виду $\infty - \infty$;

3) добуток нескінченно малої функції на нескінченно велику — невизначеність виду $0 \cdot \infty$;

4) відношення двох нескінченно малих величин — невизначеність виду $\frac{0}{0}$;

5) якщо $\alpha_1(x) \to 0$ та $\alpha_2(x) \to 0$ при $x \to x_0$, то вираз $\alpha_1^{\alpha_2}$ — невизначеність виду 0^0;

6) якщо $\alpha(x) \to 0$, $\beta(x) \to \infty$ при $x \to x_0$, то вираз β^{α} — невизначеність виду ∞^0;

7) якщо $f(x) \to 1$, $\beta(x) \to \infty$ при $x \to x_0$, то вираз f^{β} — невизначеність виду 1^{∞} (це не одиниця в якомусь конкретному степені, а символ для скороченого позначення границі виразу f^{β}, де $f \to 1$, $\beta \to \infty$).

Операцію знаходження границі у цих випадках називають *розкриттям невизначеності*.

1. *Невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$ задана відношенням двох многочленів.*

Приклад

Знайти $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4+2x-1}{3x^4-x^2+10x+5}$.

○ Маємо невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$. Поділимо чисельник і значенник дробу на x^4:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+2x-1}{3x^4-x^2+10x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}}{3-\frac{1}{x^2}+\frac{10}{x^3}+\frac{5}{x^4}} = \frac{1}{3}.$$ ●

Застосований прийом є загальним: щоб розкрити невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$, задану відношенням двох многочленів, треба чисельник і знаменник розділити на найвищий степінь x у цих многочленах.

2. Невизначеність виду $\mathbf{\frac{0}{0}}$ задана відношенням двох многочленів.

Приклад. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x-6}$

Підстановкою значення $x = 1$ переконуємось, що маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Спочатку розкладемо чисельник та знаменник дробу на множники.

Розглянемо рівняння $2x^2 + x - 3 = 0$. Його коренями є числа $x_1 = 1$ та $x_2 = -\frac{3}{2}$.

Тому за формулою $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$:

$2x^2 + x - 3 = 2(x - 1)\left(x + \frac{3}{2}\right) = (x - 1)(2x + 3).$

Аналогічно, розв’язавши рівняння $x^2 + 5x - 6 = 0$, одержимо $x_1 = 1$, $x_2 = -6$ та представимо $x^2 + 5x - 6 =$ $=(x-1)(x+6)$.

Тому

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + 5x - 6} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x+3)}{(x-1)(x+6)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{2x+3}{x+6} = \frac{2\cdot 1+3}{1+6} = \frac{5}{7}\,.$$

3. *Невизначеність виду $\frac{0}{0}$ задана ірраціональними виразами.*

Приклади

1. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$.

○ Тут невизначеність $\frac{0}{0}$, $x-2$ — критичний множник. Позбудемось від ірраціональності в чисельнику. Маємо

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\frac{2}{3}. \quad ●$$

4. *Невизначеності виду $\infty - \infty$ задані ірраціональними виразами.*

Приклад

Знайти $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$.

○ $$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=1.$$ ●

3.2. Порівняння нескінченно малих функцій. Еквівалентні нескінченно малі функції.

.Дві нескінченно малі функції порівнюються між собою за допомогою дослідження їхнього відношення. Нехай $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$ — нескінченно малі функції при $x \to x_0$, тобто

$$\lim_{x\to x_0}\alpha_1(x) = 0, \quad \lim_{x\to x_0}\alpha_2(x) = 0.$$

Введемо такі означення:

1) функції $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ називаються *нескінченно малими одного порядку при* $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = A \neq 0, \quad A \in R;$$

2) функція $\alpha_1(x)$ називається *нескінченно малою вищого порядку, ніж* $\alpha_2(x)$ *при* $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 0;$$

3) функція $\alpha_1(x)$ називається *нескінченно малою нижчого порядку, ніж* $\alpha_2(x)$ *при* $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \infty;$$

4) функція $\alpha_1(x)$ називається *нескінченно малою k-го порядку відносно* $\alpha_2(x)$ *при* $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2^k(x)} = A \neq 0, \ A \in R;$$

5) нескінченно малі функції $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$ називаються *непорівнянними при* $x \to x_0$, якщо в точці x_0 не існує границі їхнього відношення.

Введені означення охоплюють усі випадки, які можуть трапитись при порівнянні двох нескінченно малих функцій в околі точки x_0. Такі самі правила порівняння нескінченно малих при $x \to \infty$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$ та при $x \to x_0 \pm 0$.

Аналогічно порівнюються нескінченно великі величини.

Приклади

1. Функції $\alpha_1(x) = x$, $\alpha_2(x) = \sin 5x$ нескінченно малі одного порядку при $x \to 0$, тому що

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin 5x} = \frac{1}{5}.$$

2. Функція $\alpha_1(x) = x^2$ при $x \to 0$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж функція $\alpha_2(x) = \operatorname{tg} x$, тому що

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \to 0} x \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} \lim_{x \to 0} \cos x = 0.$$

Очевидно, функція $\alpha_2(x) = \operatorname{tg} x$ при $x \to 0$ є нескінченно малою нижчого порядку, ніж $\alpha_1(x) = x^2$.

Серед нескінченно малих функцій одного порядку особливу роль відіграють так звані еквівалентні нескінченно малі.

Функції $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$, нескінченно малі при $x \to x_0$, називаються *еквівалентними нескінченно малими*, якщо

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1.$$

Еквівалентність позначається так: $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$.

Розглянемо деякі властивості еквівалентних нескінченно малих функцій.

Теорема 1. *Нескінченно малі $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ еквівалентні при $x \to x_0$ тоді і тільки тоді, коли різниця $\alpha_1(x) - \alpha_2(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж кожна з функцій $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$.*

Теорема 2. *Нехай* $\alpha_1(x) \sim \alpha_1^*(x)$, $\alpha_2(x) \sim \alpha_2^*(x)$ *при* $x \to x_0$. *Якщо існує* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}$, *то існує і* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1^*(x)}{\alpha_2^*(x)}$ *і ці границі рівні між собою.*

Ця теорема дає змогу при знаходженні границі відношення двох заданих нескінченно малих функцій кожну з них (або тільки одну) заміняти іншою нескінченною малою, яка еквівалентна заданій. Часто зустрічаються, наприклад, такі еквівалентні нескінченно малі величини:

$$\sin\alpha \sim \alpha,\ \alpha \to 0; \qquad e^{\alpha} - 1 \sim \alpha,\ \alpha \to 0;$$

$$\operatorname{tg}\alpha \sim \alpha,\ \alpha \to 0; \qquad a^{\alpha} - 1 \sim \alpha \ln a,\ \alpha \to 0;$$

$$\arcsin\alpha \sim \alpha,\ \alpha \to 0; \qquad \log_a(1+\alpha) \sim \alpha \log_a e,\ \alpha \to 0;$$

$$\operatorname{arctg}\alpha \sim \alpha,\ \alpha \to 0; \qquad \ln(1+\alpha) \sim \alpha,\ \alpha \to 0;$$

$$1 - \cos\alpha \sim \frac{\alpha^2}{2},\ \alpha \to 0; \qquad (1+\alpha)^k - 1 \sim k\alpha,\ \alpha \to 0,\ k > 0.$$

Приклади

1. Знайти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 8x}{\operatorname{tg} 2x}$.

○ Оскільки $\sin 8x \sim 8x$, $\operatorname{tg} 2x \sim 2x$ при $x \to 0$, то за теоремою 2 дістанемо

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 8x}{\operatorname{tg} 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{8x}{2x} = 4. \quad ●$$

2. Знайти $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\arcsin (x-3)}{x^2-4x+3}$.

○ $\arcsin (x-3) \sim x-3$ при $x \to 3$, тому

$$\lim_{x\to 3} \frac{\arcsin (x-3)}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}. \quad ●$$

§4. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

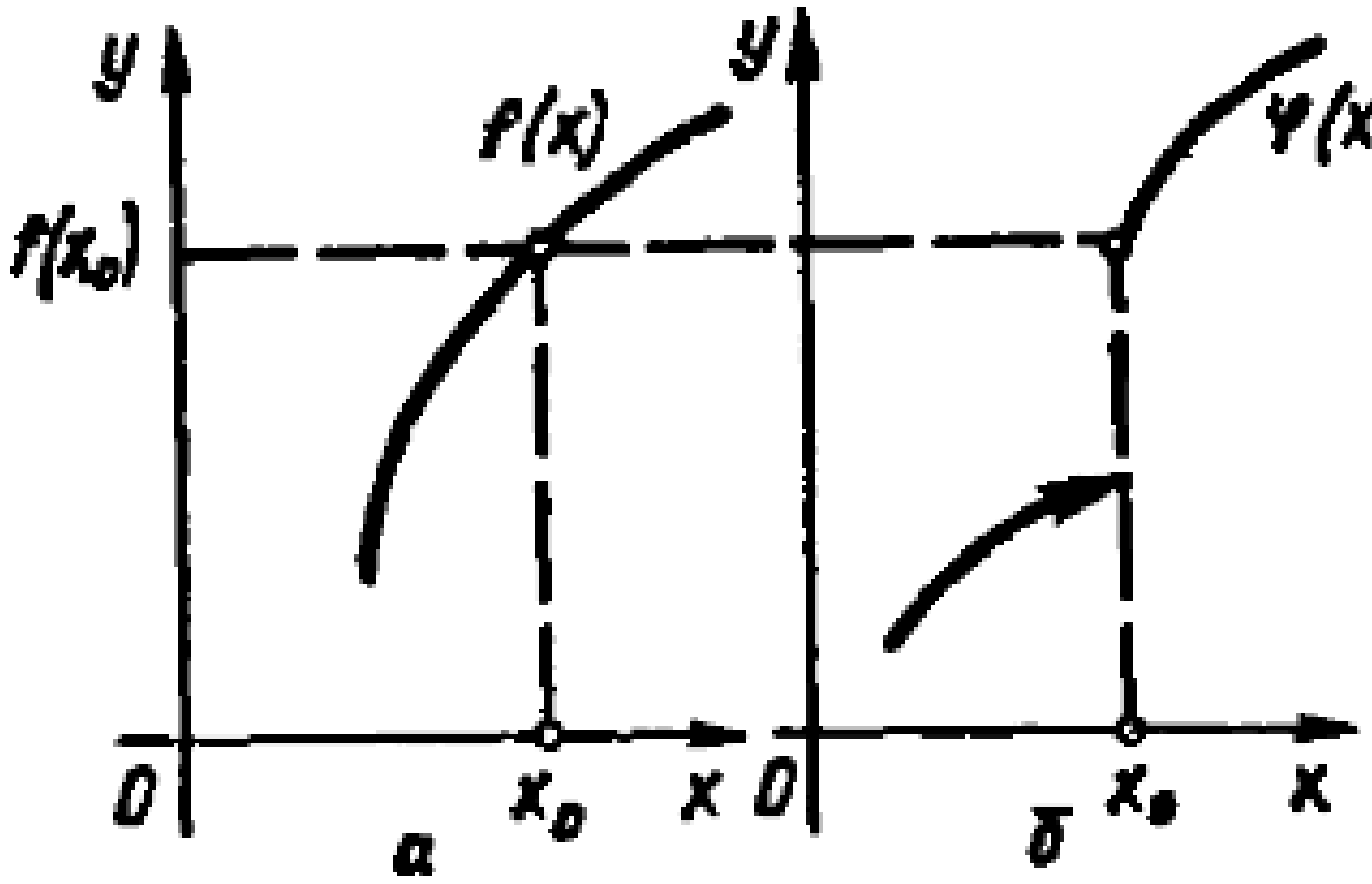
З поняттям границі функції тісно пов'язане інше важливе поняття математичного аналізу – поняття неперервності функції.

4.1. Неперервність функції в точці. Точки розриву.

Нехай функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки.

Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0, якщо границя функції і її значення в цій точці рівні, тобто

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$


y
f(x)
f(x₀)
0
x₀
x
a
y
φ(x)
0
x₀
x
б

Можна дати ще одне означення неперервності функції, опираючись на поняття приростів аргументу і функції.

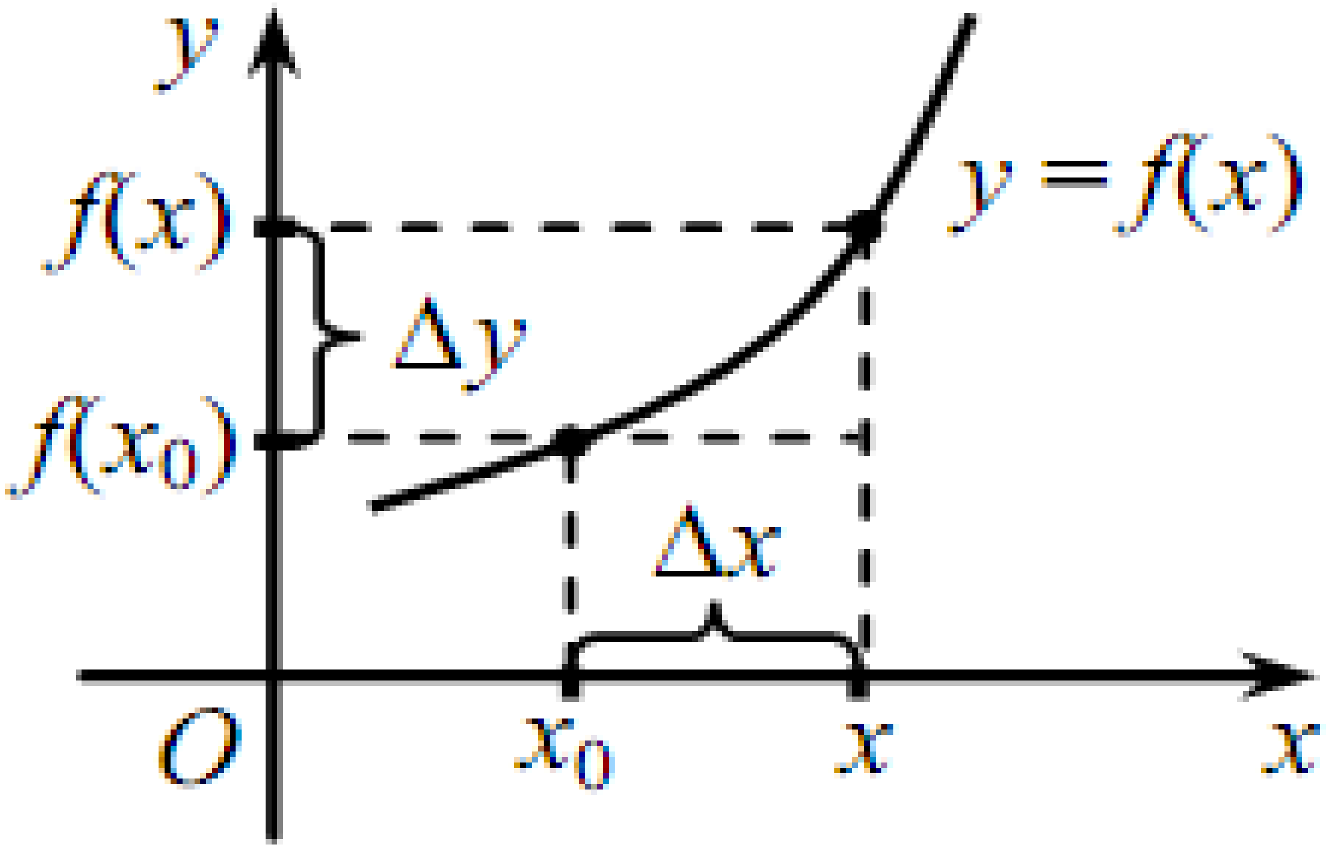
Нехай числа x_0 та x належать області визначення функції $y = f(x)$. Різниця $x - x_0$ називається *приростом аргументу* в точці x_0 і позначається через Δx («дельта x»):

$$\Delta x = x - x_0.$$

Різниця відповідних значень функції $f(x) - f(x_0)$ називається *приростом функції* в точці x_0 і позначається через Δy:

$$\Delta y = \Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Функція $f(x)$, визначена в околі точки x_0, називається неперервною в точці x_0, якщо її приріст в цій точці є нескінченно малою функцією при $\Delta x \to 0$.



y
f(x)
y = f(x)
Δy
f(x0)
Δx
O
x0
x
x

Часто зустрічається поняття *односторонньої неперервності*. Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0 *зліва*, якщо вона визначена на півінтервалі $(x_0 - \varepsilon;\ x_0]$, де $\varepsilon > 0$ і $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$; якщо функція $f(x)$ визначена на півінтервалі $[x_0;\ x_0 + \varepsilon)$ і $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$, то функція називається *неперервною в точці* x_0 *справа*.

Отже:

функція $f(x)$ буде неперервною в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли вона визначена в деякому околі точки x_0 і

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, то функція називається *розривною в точці* x_0, а сама точка x_0 називається *точкою розриву функції*.

Розрізняють такі види розривів. Якщо для функції $f(x)$ існують скінченні границі

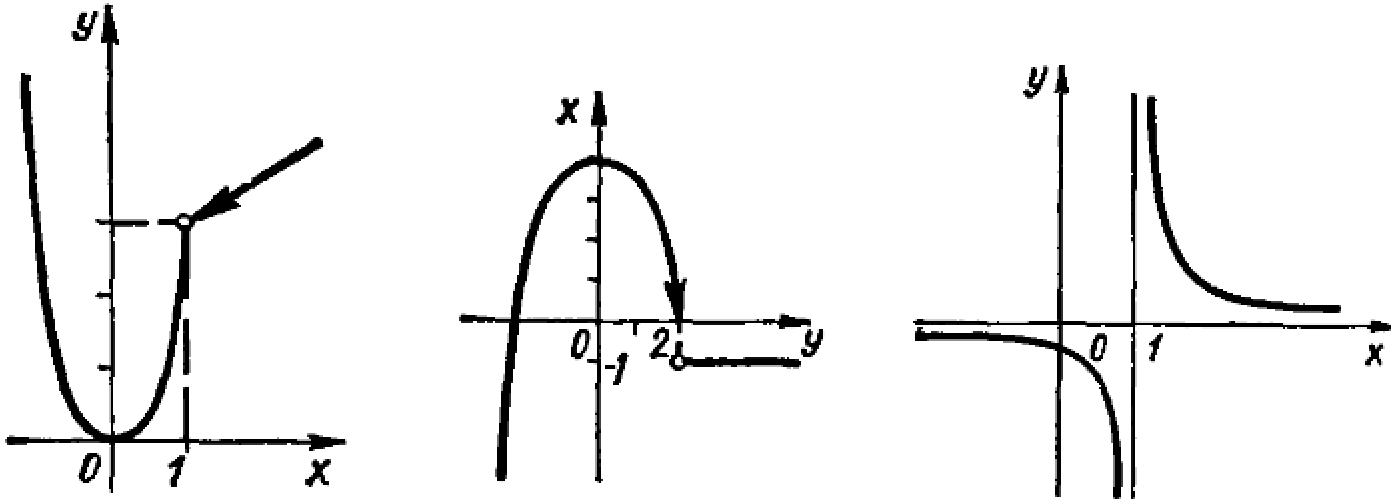
$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0), \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0),$$

причому не всі числа $f(x_0)$, $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ рівні між собою, то розрив в точці x_0 називають *розривом першого роду*, точку x_0 — *точкою розриву першого роду*. Зокрема , якщо

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0),$$

то розрив в точці x_0 називають *усувним*, а точку x_0 — *точкою усувного розриву*. У цьому випадку досить довизначити функцію лише в одній точці x_0, поклавши $f(x_0) = f(x_0 \pm 0)$, щоб дістати функцію, неперервну в точці x_0. Величину $\delta = |\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)|$ називають *стрибком функції*.

Якщо хоча б одна з односторонніх границь у формулі (26) не існує або дорівнює нескінченності, то розрив в точці x_0 називається *розривом другого роду*, а сама точка x_0 — *точкою розриву другого роду*.



4.2. Основні властивості неперервних у точці функцій.

1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці x_0, то в цій точці неперервними є функції $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (остання за умови $g(x_0) \neq 0$).

2. Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $y = f(u)$ неперервна в точці $u_0 = f(x_0)$, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ неперервна в точці x_0.

3. Будь-яка елементарна функція неперервна в кожній точці, в якій вона визначена.

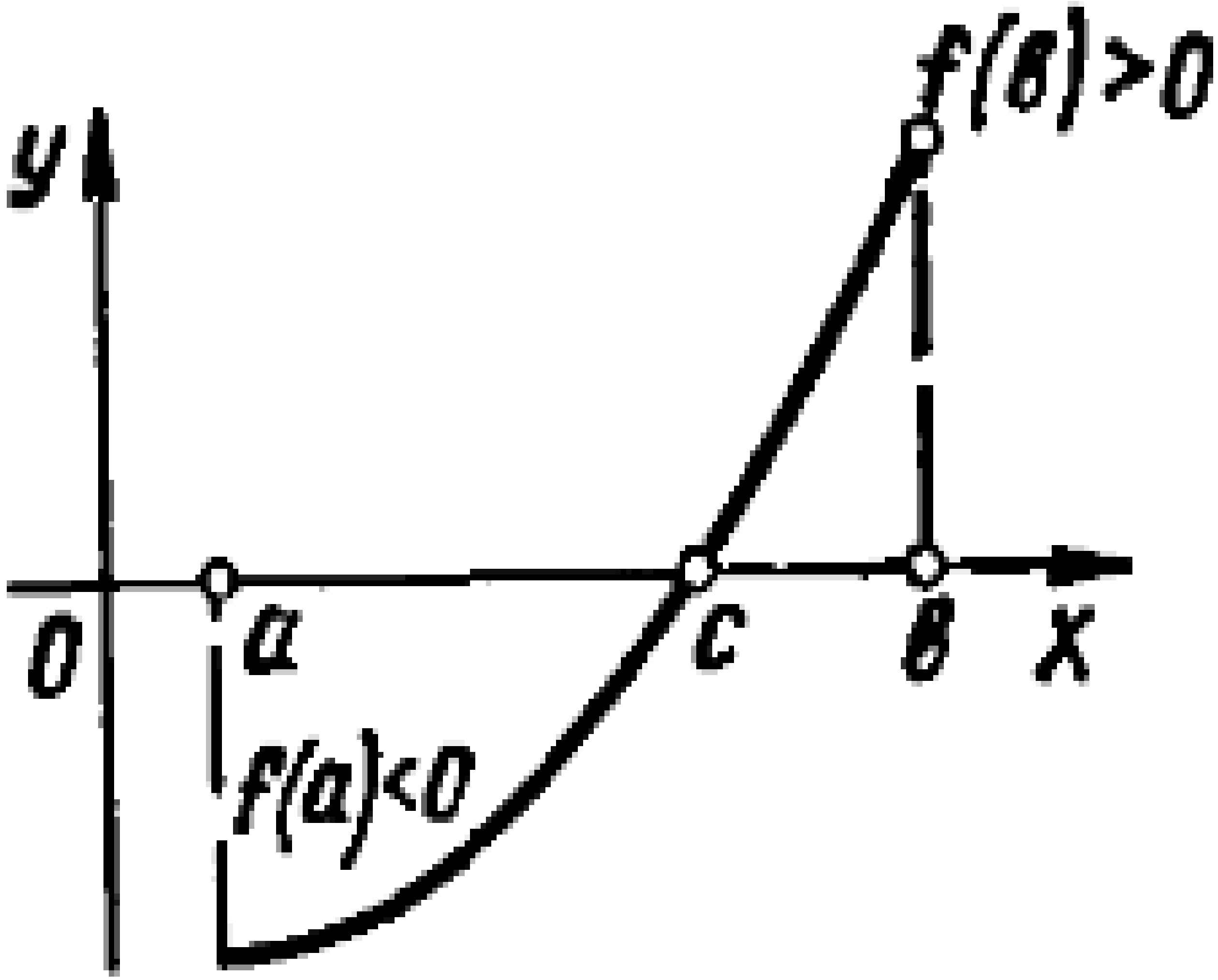
4.3. Властивості функцій неперервних на відрізку.

Якщо функція неперервна в кожній точці інтервалу $(a;\ b)$, то вона називається неперервною на цьому інтервалі.

Функція неперервна на відрізку $[a;\ b]$, якщо вона неперервна на $(a;\ b)$ і, крім того, неперервна справа в точці a і зліва в точці b.

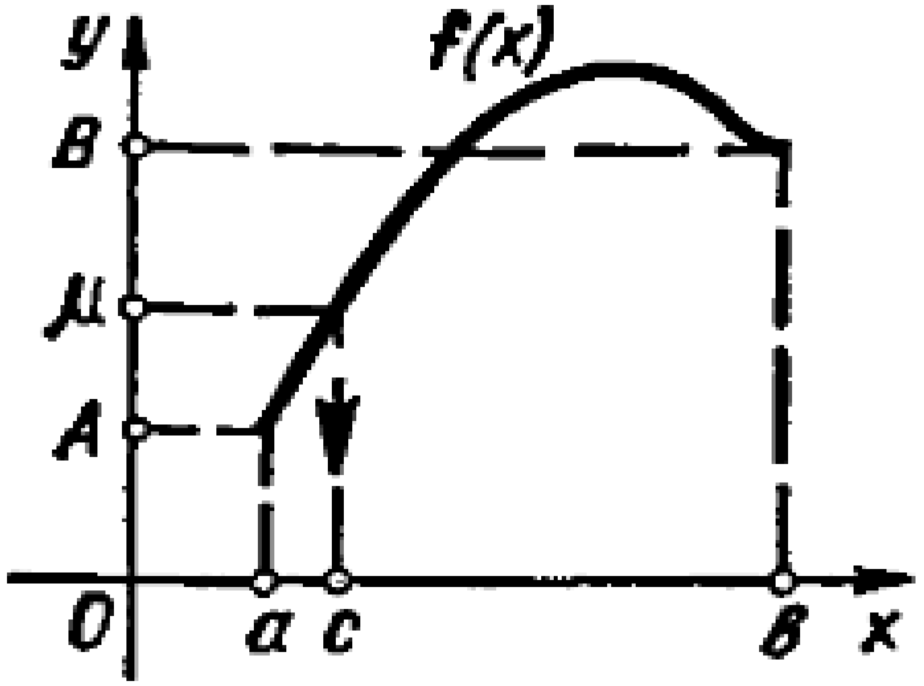
Сформулюємо теореми про функції, неперервні на відрізку.

Теорема 1. *(перша теорема Больцано-Коші). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$ і на його кінцях набирає значень різних знаків, то всередині відрізка $[a,\ b]$ знайдеться хоча б одна точка $x = c$, в якій функція дорівнює нулю: $f(c) = 0$, $a < c < b$.*



y
f(в)>0
0
a
c
в
x
f(a)<0

Теорема 2 *(друга теорема Больцано — Коші). Нехай функція неперервна на відрізку* $[a; b]$ *і набуває на його кінцях різних значень:* $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A \neq B$. *Тоді для довільного числа* $\mu \in (A; B)$ *знайдеться таке число* $c \in (a; b)$, *що* $f(c) = \mu$.



Теорема 3 *(Вейєрштрасса). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то серед її значень на цьому відрізку існує найменше і найбільше.*