Математичний аналіз

Лекція 1

Тема: Функція. Границя функції.

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Математичний аналіз — це сукупність розділів математики, присвячених дослідженню функцій методами нескінченно малих. Основи дано у працях І. Ньютона, Г. Лейбніца, Л. Ейлера та інших математиків 17—18 ст. Обґрунтування математичного аналізу за допомогою поняття границі належить О. Л. Коші.

Курс математичного аналізу містить такі розділи: вступ до аналізу, диференціальне числення, інтегральне числення і теорія рядів.

§1. Функції.

1.1. Множини.

Поняття множини є одним з фундаментальних у математиці.

Означення. Множиною називають сукупність (сімейство, набір, зібрання) деяких об'єктів, об'єднаних за певною ознакою, характеристикою чи властивістю.

Прикладами множин може бути множина деталей, з яких складається даний механізм, множина шкіл даного міста, множина зірок певного сузір'я, множина розв'язків даного рівняння, множина всіх цілих чисел тощо.

Об'єкти, з яких складається множина, називаються її елементами. Множини позначають великими буквами латинського алфавіту, а їх елементи — малими. Якщо елемент x належить множині X, то пишуть $x \in X$.

Запис $x \notin X$ означає, що елемент x не належить множині X.

Множина вважається заданою, якщо відома характеристика її елементів, коли про кожний елемент можна сказати, належить він цій множині чи ні. Так, множині цілих чисел належить число 9, але не належить число 0,9.

Множина, яка містить скінченну кількість елементів, називається скінченною. Запис $A = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ означає, що множина A скінченна і містить s елементів. Множина $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, яка містить нескінченну кількість елементів, називається нескінченною. Так, множина слухачів в даній аудиторії — скінченна, а множина трикутників, які можна вписати в дане коло,— нескінченна.

Множина, яка не містить жодного елемента, називається порожньою і позначається символом $\emptyset$. Прикладом порожньої множини є множина дійсних коренів рівняння $x^2 + 1 = 0$.

Нехай задано дві множини A і B. Якщо кожен елемент множини A є елементом множини B, то множину A називають підмножиною множини B і пишуть $A \subset B$ або $B \supset A$ («A міститься в B» або «B містить A»). Наприклад, множина натуральних чисел є підмножиною цілих чисел.

Очевидно, що кожна множина є своєю підмножиною і порожня множина є підмножиною будь-якої множини.

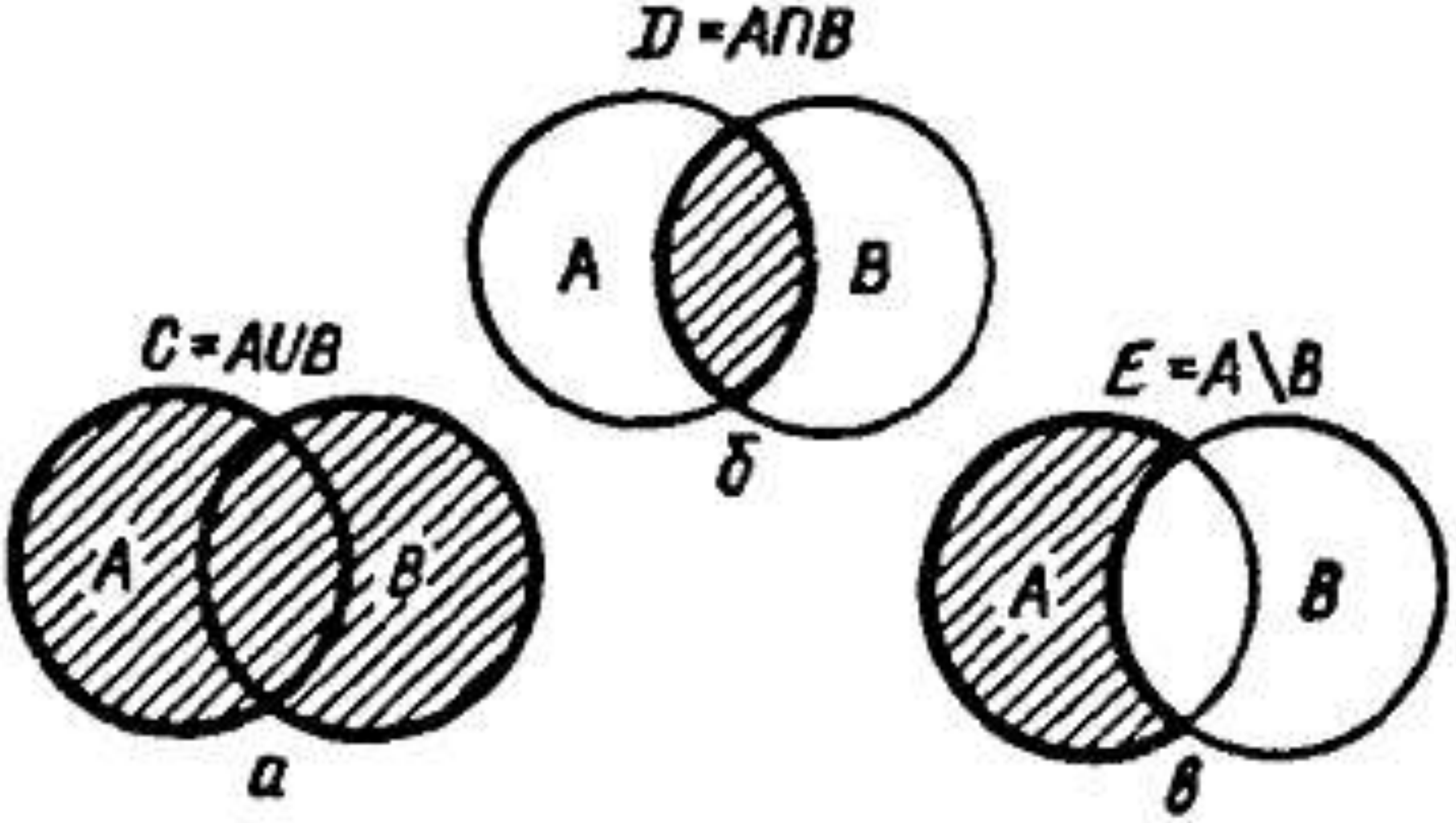
Якщо множини A і B містять одні і ті самі елементи, тобто $A \subset B$ і $B \subset A$ то їх називають рівними і пишуть $A = B$.

Визначимо деякі операції, які можна виконувати над множинами.

Множину C, яка містить елементи, кожен з яких належить множині A або множині B, називають об'єднанням (сумою) множин A та B і позначають $C = A \cup B$ (рис. 1, а).

Множину D, що складається з елементів, кожен з яких одночасно належить множинам A і B, називають перерізом (добутком) множин AiBi позначають $D = A \cap B$ (рис. 1, б).

Множину E, що складається з елементів, кожен з яких належить множині A і не належить множині B, називають різницею множин A і B і Позначають $E = A \backslash B$ (рис. 1, в).



D = A∩B
A
B
б
C = A∪B
A
B
а
E = A\B
A
B
в

Квантори

Загальноприйняті в математиці символи і позначення називають кванторами:

$\Leftrightarrow$ – рівносильно,

$\Rightarrow$ – слідує,

$\exists$ – існує,

$\exists!$ – існує єдиний, єдина, єдине (в залежності від контексту),

$\forall$ – будь-який, довільний, всякий.

1.2. Сталі і змінні величини

Величина — одне з основних математичних понять, зміст якого з розвитком математики змінювався і узагальнювався. Це поняття настільки широке і всеохоплююче, що його важко визначити. Маса, сила, тиск, напруга, довжина, об’єм, дійсне число, вектор — все це приклади величин.

На першій стадії під величиною розуміли те, що, виражаючись в певних одиницях (наприклад, довжина в метрах, маса — в грамах і т. д.), характеризується своїм числовим значенням.

Згодом величинами стали і такі поняття, як число, вектор та інші. Величини в деякому процесі можуть набувати різних або однакових числових значень. У першому випадку величина називається змінною, у другому — сталою.

Приклади.

1. Відношення довжини кола до його діаметра є величина стала для всіх кіл і дорівнює числу π.

2. Величина *x,* яка задовольняє умову *x* є [0: 1], є змінною величиною.

3. Якщо в різних місцях і на різних глибинах озера вимірювати одночасно тиск води і її густину, то виявиться, що тиск — змінна величина, а густину можна вважати величиною сталою.

У перших двох прикладах стала і змінна величини визначаються точно. У третьому випадку густина води, хоч і незначно, але змінюється, тому вона є сталою тільки з певною точністю. В багатьох реальних явищах можна вказати величини, які лише умовно будуть сталими.

Предметом вищої математики є вивчення змінних величин.

Стала величина вважається окремим випадком змінної: стала — це така змінна, всі значення якої рівні між собою.

Якщо величина набуває своїх значень дискретно (перервно), то її називають *послідовністю*. Якщо ж змінна величина набуває неперервних значень, то її просто називають змінною.

1.3. Означення функції.

Якщо кожному числу *x* з деякої числової множини *X* за певним правилом поставлене у відповідність єдине число *y*, то кажуть, що *y* є функція від *x* і пишуть $y = f(x)$, x є *X*.

Змінна x називається *незалежною змінною,* або *аргументом,* а змінна *y* — *залежною змінною,* або *функцією;* під символом *f* розуміють те правило, за яким кожному x відповідає *y,* або ті операції, які треба виконати над аргументом, щоб дістати відповідне значення функції.

Множина *X* називається *областю визначення функції.* Множина У усіх чисел *y,* таких, що *y* = *f*(x) для кожного *x* є *X* називається *множиною значень функції.*

1.4. Способи задання функцій

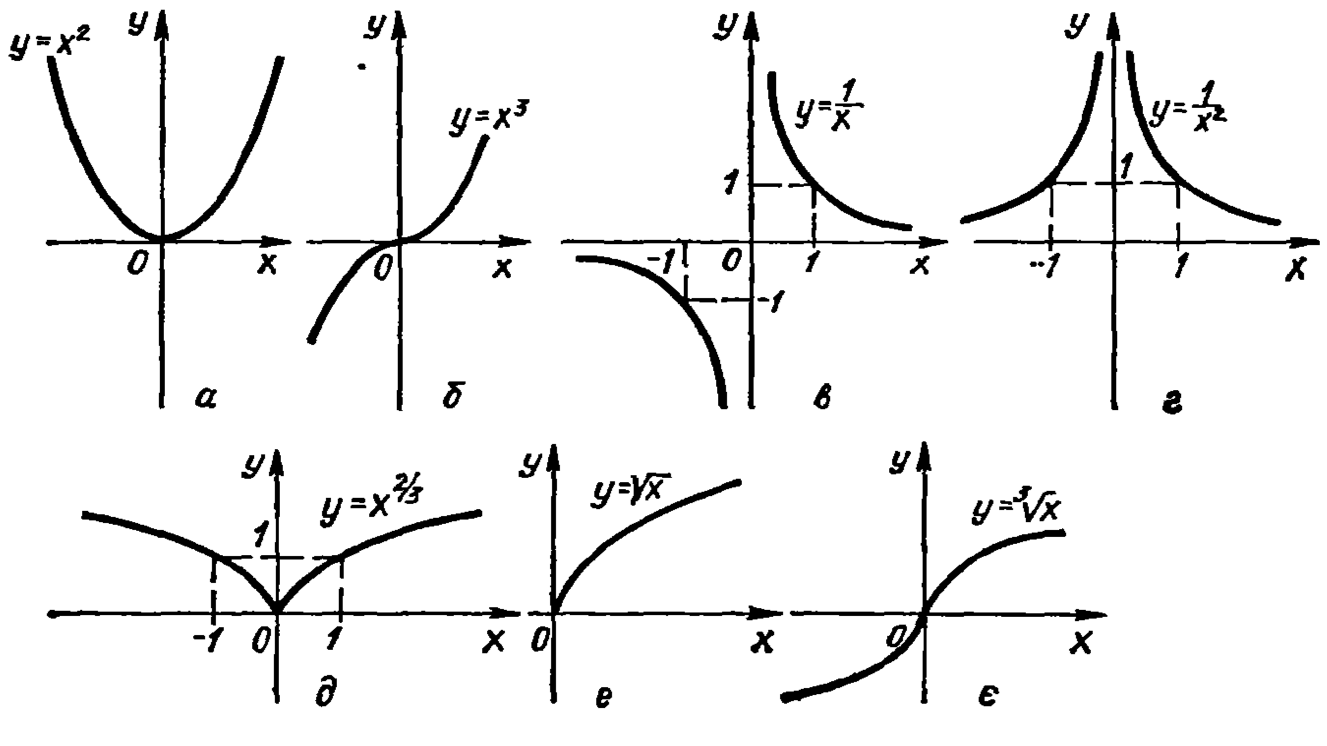
Основні способи задання функції:

1. Аналітичний;
2. Графічний;
3. Табличний

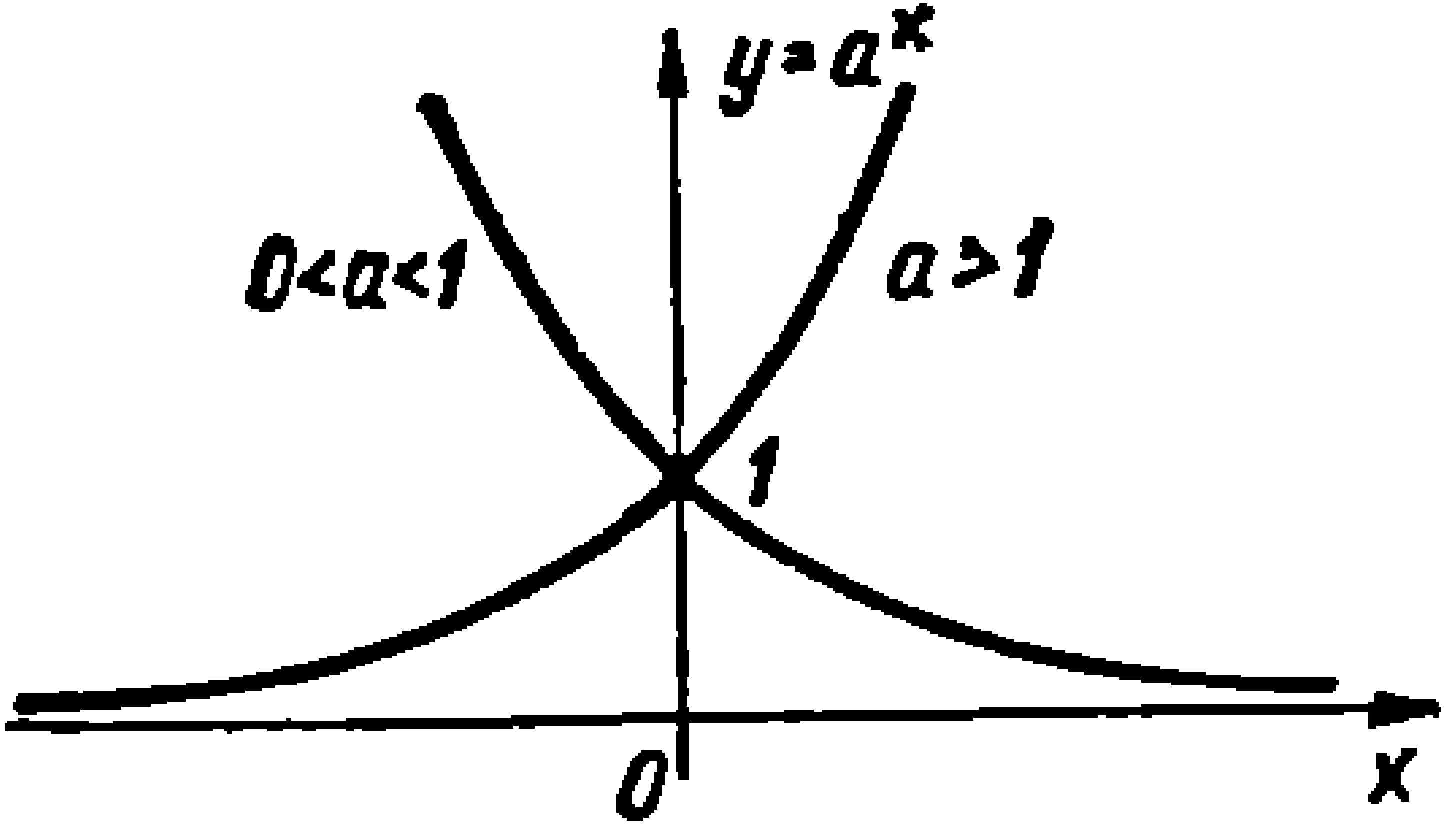
1.5. Класифікація елементарних функцій

Основними елементарними функціями називаються такі:

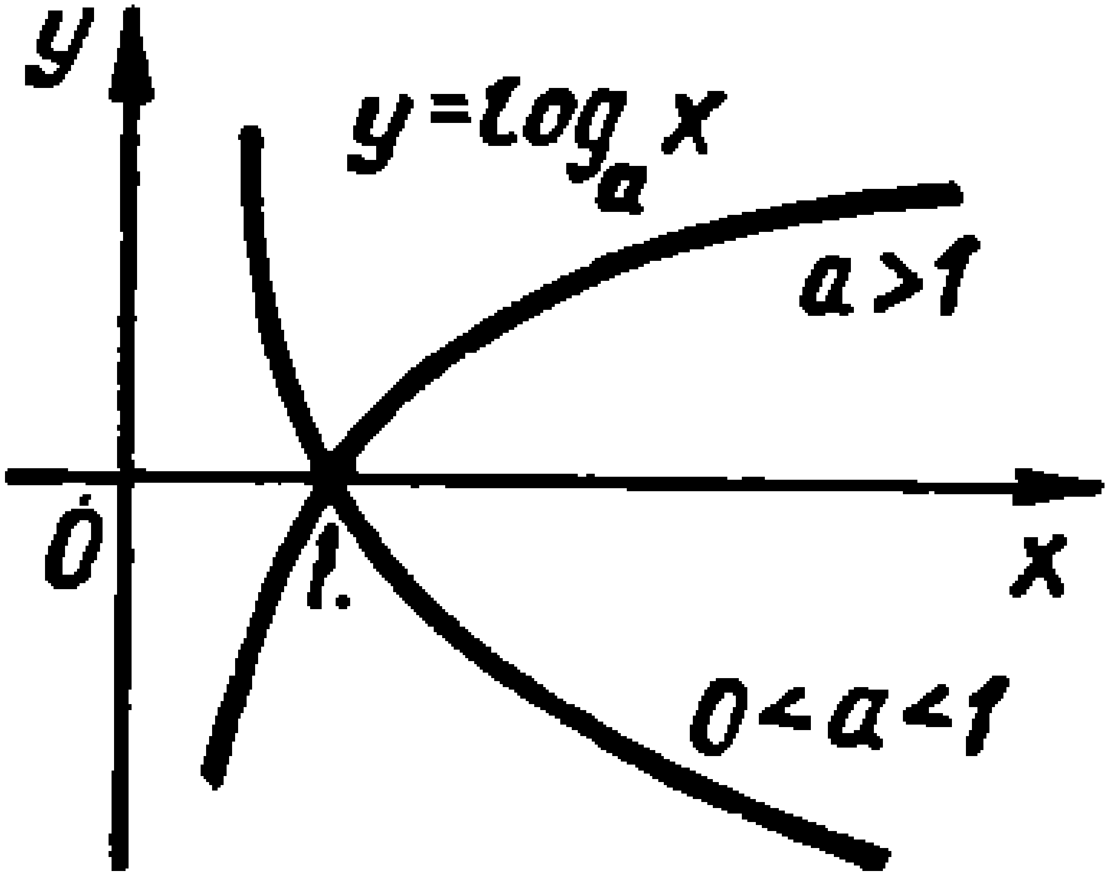
1. Степенева функція $y=x^a$*, a є R.* Область визначення і графіки цієї функції залежать від значення *a*.



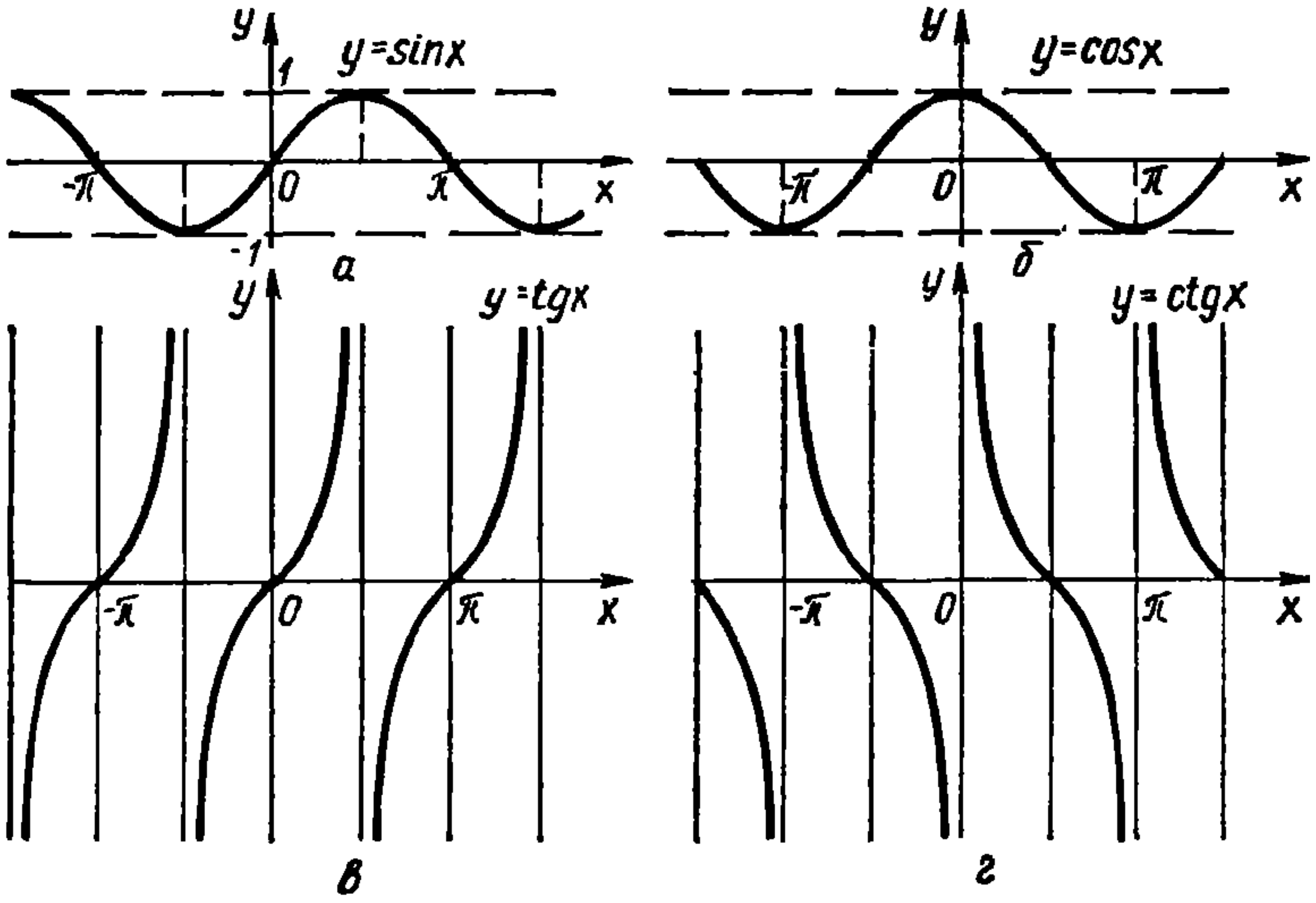
2. Показникова функція у = a^x, $a > 0$, $a \neq 1$.



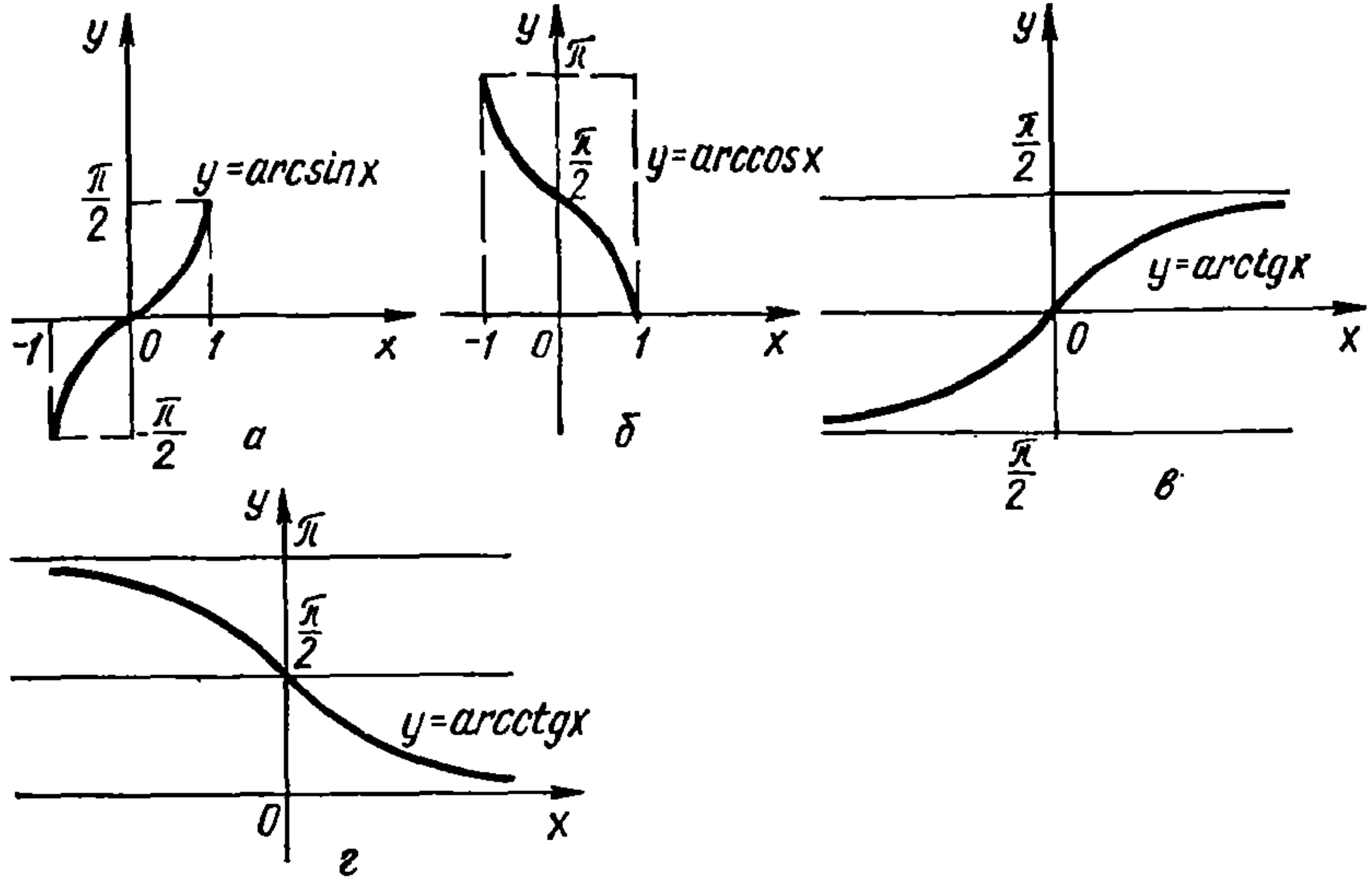
3. Логарифмічна функція $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1.$



4. Тригонометричні функції: $y = sin\,x$, $y = cos\,x$, $y = tg\,x$, $y = \mathrm{ctg}\,x$



5. Обернені тригонометричні функції: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.



1.6. Складена функція (суперпозиція функцій)

Над функціями виконують і так звану операцію *суперпозиції,* або *накладання.* Нехай функція $y = f\ (u)$ визначена на множині *A,* а функція *u =* φ (x) — на множині *B,* причому для кожного значення x ∈ B відповідне значення $u = \varphi(\mathrm{x}) \in A$*.* Тоді на множині *B* визначена функція f (φ (x)), яку називають *складеною функцією* від *x,* або *суперпозицією* заданих функцій, або *функцією від функції.*

Змінну *u =* φ (x) *функції* $y = f\ (u)$ *називають* проміжним аргументом, *або* внутрішньою функцією, *а змінну* $y = f\ (u)$ зовнішньою функцією.

Приклади.

1. Функція $y = \sqrt[5]{\cos x}$ є суперпозицією двох основних елементарних функцій—степеневої $y = \sqrt[5]{u}, u \in [-1;\ 1]$ та тригонометричної $u = \cos x, x \in (-\infty;\ +\infty)$.

Складені функції можна утворювати за допомогою суперпозиції не тільки двох, а й більшої кількості функцій.

- 2. Функцію $y = 3^{sinx^7}$ можна розглядати як суперпозицію трьох функцій:
- $\mathrm{y} = 3^u, u \in [-1;\ 1], u = \sin v, v \in (-\infty;\ +\infty), v = x^7, x \in (-\infty;\ +\infty)$.

Основні елементарні функції, а також функції, утворені за допомогою формул, в яких над основними елементарними функціями виконується лише скінченне число арифметичних операцій (додавання, віднімання, множення, ділення) і суперпозицій, називаються *елементарними.*

Приклад.

$$y=\sqrt[9]{\frac{2^{arctg2x}-7\sin\log_4\left(3x^2-5x+4\right)}{6+\left(tg\left(9x+\ln x\right)-8\cos x\right)^3}}$$

§ 2. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ.
2.1. Числова послідовність.

Означення. Якщо кожному натуральному числу $n \in N$ за певним правилом ставиться у відповідність число x_n, то множину чисел $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ називають *числовою послідовністю* (або коротко *послідовністю)* і позначають символом $\{x_n\}$.

Окремі числа $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ називають членами або елементами послідовності: x_1— перший член послідовності, x_2 — другий і т. д., x_n —n-й, або загальний член послідовності.

Послідовність вважається заданою, якщо вказано спосіб знаходження її загального члена. Найчастіше послідовність задається формулою її загального члена.

Очевидно, що всяка функція $y = f(n)$, задана на множині натуральних чисел *N*, визначає деяку числову послідовність $\{y_n\}$ з загальним членом $y_n = f(n)$.

Іншими словами послідовність – це функція натурального аргументу.

Приклади:

1. $\left\{\frac{1}{n},\ n \geq 1\right\}$ або $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \frac{1}{n}, \dots\right\}$.

2. $\{(-1)^n,\ n \geq 1\}$ або $\{-1, 1,\ -1, \dots, (-1)^n, \dots\}$

2.2. Границя послідовності.

Означення. Число a називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$,

або $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

Запис: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$

Теорема. Якщо границя послідовності існує, то вона єдина.

2.3. Границя змінної величини.

Означення. Число a називається границею змінної величини x, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке значення x', починаючи з якого для всіх наступних значень x виконується нерівність $|x - a| < \varepsilon$.

Запис: $lim x = a$ або $x \to a$.

2.4. Нескінченно великі змінні величини.

Якщо для довільного числа $M > 0$ існує таке значення x', починаючи з якого всі наступні значення x задовольняють нерівність $|x| > M$, то кажуть, що змінна x прямує до нескінченності.

Запис: $lim x = \infty$ або $x \to \infty$.

Якщо змінна $x \to \infty$, то її називають нескінченно великою змінною величиною.

2.5. Властивості нескінченно великих величинин.

1. Сума нескінченно великої величини і величини обмеженої є величина нескінченно велика.

2. Сума двох нескінченно великих величин одного знака є нескінченно велика величина.

На відміну від цього сума двох нескінченно великих величин різних знаків не завжди буде нескінченно великою величиною, тому ця сума називається невизначеністю виду $\infty - \infty$.

3. Добуток двох нескінченно великих величин є величиною нескінченно великою.

4. Добуток нескінченно великої величини на величину, що більша за абсолютним значенням деякого додатного числа, також є нескінченно велика величина.

Частка двох нескінченно великих величин не завжди є нескінченно великою величиною, тому дробовий вираз, чисельник і знаменник якого нескінченно великі змінні величини, називають невизначеністю виду $\frac{\infty}{\infty}$.

2.6. Границя функції у точці.

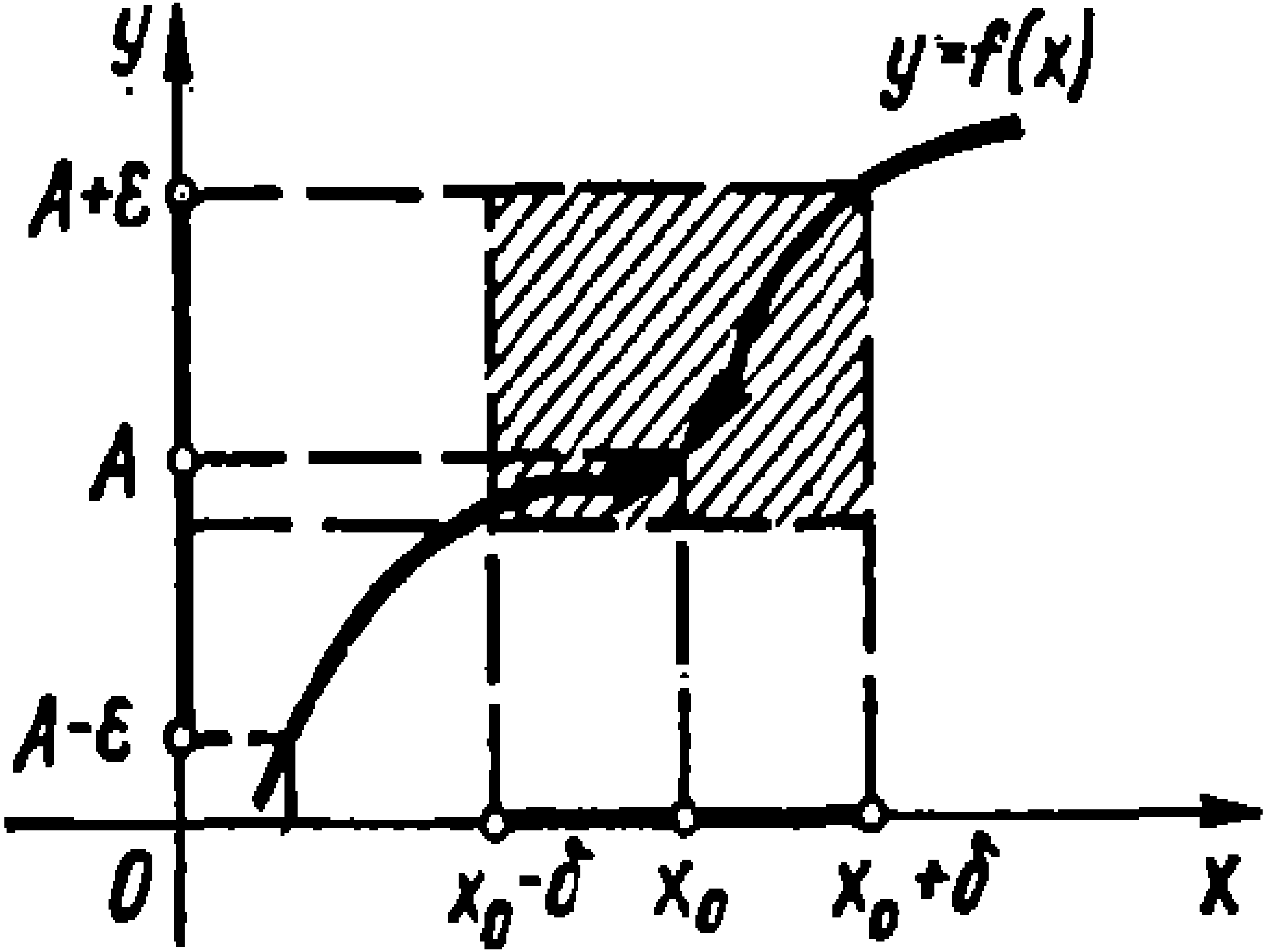
Припустимо, що незалежна змінна x має границю x_0. Розглянемо зміну функції $y = f(x)$, при $x \to x_0$.

Нехай функція $y = f(x)$, визначена в деякому околі X точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0.

Означення. Число A називають границею функції $y = f(x)$ в точці x_0 (або при $x \to x_0$), якщо для довільної збіжної до x_0 послідовності $\{x_n\}$, де $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$, послідовність $\{f(x_n)\}$, має границю, яка дорівнює числу A.

Запис: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Функція $f(x)$ може мати в точці x_0 тільки одну границю. Це випливає з того, що кожна змінна може мати лише одну границю.



y
y=f(x)
A+ε
A
A-ε
0
$x_0-\delta$
x_0
$x_0+\delta$
x

2.7. Нескінченно малі величини.

Нескінченно малою величиною називається змінна величина, границя якої дорівнює нулю. Зокрема, функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою величиною (або нескінченно малою функцією) при $x \to x_0$ або $x \to \infty$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \quad \text{або} \quad \lim_{x \to \infty} \alpha(x) = 0.$$

2.8. Властивості нескінченно малих величин.

1. Для того щоб число A було границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$, необхідно і достатньо, щоб різниця $f(x) - A$ була нескінченно малою величиною, тобто

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \text{де } \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

2. Якщо функція $\alpha(x)$ — нескінченно мала величина при $x \to x_0$ $(\alpha \neq 0)$, то функція $\frac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великою величиною при $x \to x_0$, і навпаки, якщо функція $\beta(x)$ — нескінченно велика величина при $x \to x_0$, то $\frac{1}{\beta(x)}$ є нескінченно малою величиною при $x \to x_0$.

3. Сума скінченного числа нескінченно малих величин в величина нескінченно мала.

4. Добуток обмеженої функції на нескінченно малу є величина нескінченно мала.

5. Частка від ділення нескінченно малої величини на функцію, яка має відмінну від нуля границю, є величина нескінченно мала.