С.П. Онуфрійчук, Н.М. Консевич

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Курс лекцій

1998

Міністерство освіти України
Житомирський інженерно-технологічний інститут

С.П. Онуфрійчук, Н.М. Консевич

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Курс лекцій

для студентів 1 курсу ФЕМ

(у 2-х частинах)

Частина II

Житомир – 1998

УДК 51
О58

Онуфрійчук С. П., Консевич Н.М.
О58 Вища математика. Навчальний посібник. Курс лекцій для студентів I курсу ФЕМ. У 2-частинах. – Ч. II.
Житомир: ЖІТІ, 1998. – 144 с.

Курс лекцій з вищої математики – це розширений конспект лекцій, які читаються в 2 семестрі 1 курсу для студентів факультету економіки та менеджменту в рамках однорічного курсу "Вища математика". Зміст лекцій визначається навчальною програмою.

Курс лекцій містить 4 розділи "Невизначений інтеграл", "Визначений інтеграл та його застосування", "Функції кількох змінних" і "Диференціальні рівняння".

Курс лекцій може бути корисним для студентів економічного профілю навчання, а також для студентів інженерного профілю як денної, так і заочної форми навчання.

Іл. 40. Табл. 3.

Затверджено
на засіданні кафедри
вищої математики
Протокол № 1 від 02. 09. 97р.

УДК 51

Тема I. **Невизначений інтеграл**

§ 1. Первісна функції і невизначений інтеграл

Властивості невизначеного інтегралу

Основною задачею диференціального числення є визначення для заданої функції F(x) її похідної $F'(x) = f(x)$ чи її диференціала $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$.

Обернена задача, що полягає в відшуканні такої функції F(x) для якої відома її похідна f(x) чи диференціал f(x)dx, є основною задачею інтегрального числення.

Операції диференціювання та інтегрування взаємно обернені.

<u>Означення.</u> Функція F(x) називаються первісною функції f(x) на відрізку [a; b], якщо на цьому відрізку виконується рівність $F'(x) = f(x),\ \forall x \in [a;\ b]$.

Приклад 1. Знайти первісну функції $f(x) = x^2$.

$$F(x) = \frac{x^3}{3} \text{ тому, що } \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2.$$

Приклад 2. Знайти первісну функції f(x) = sin x.

$$F(x) = -\cos x \quad \text{тому, що} \quad (-\cos x)' = \sin x.$$

<u>Теорема 1.</u> Якщо F(x) – первісна функції f(x), то функція F(x) + C, де C – довільна стала (число), також первісна функції f(x).

⇨ $(F(x)+C)' = F'(x) + C' = F'(x) + 0 = f(x)$ ■

<u>Теорема 2.</u> Якщо $F_1(x)$ та $F_2(x)$ – дві первісні функції f(x) на відрізку [a; b], то різниця між ними дорівнює сталому числу, тобто $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x) = C$.

⇨ За означенням первісної $F_1'(x) = f(x)$

$F_2'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a;\ b]$.

Позначимо: $F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x)$.

Тоді $\varphi'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$

$\varphi'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \varphi(x) = C \;\Rightarrow\; F_1(x) - F_2(x) = C$ ■

<u>Наслідок з теорем 1, 2.</u> Якщо функція F(x) є одна з первісних для функції f(x), то множина всіх первісних для f(x) виражається сумою F(x) + C, де C – довільна стала.

У прикладі 1 знайдено одну з первісних $F(x) = \frac{x^3}{3}$ для $f(x) = x^2$, а їх безліч:

$$F_1(x) = \frac{x^3}{3} + 5, \qquad F_2(x) = \frac{x^3}{3} - \sqrt{2}, \qquad F_3(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{7}, \ldots$$

Запишемо всі первісні у вигляді множини $\frac{x^3}{3} + C$.

Функція f(x), для якої існує первісна, називається інтегрованою, а операція знаходження первісної для даної функції називається інтегруванням.

<u>Означення</u>. Сукупність усіх первісних функції f(x) називається невизначеним інтегралом функції f(x) і позначається $\int f(x)dx = F(x) + C,$ де F(x) – деяка первісна функції f(x), а C – довільна стала.

Символ $\int$ називається знаком інтеграла,
f(x) – підінтегральна функція,
f(x)dx – підінтегральний вираз,
x – змінна інтегрування.

<u>Теорема 3</u>. (без доведення). Якщо функція f(x) неперервна на відрізку [a; b], то вона на цьому відрізку інтегрована.

<u>Зауваження.</u> Якщо похідна від елементарної функції завжди є елементарною функцією, то обернене твердження неправильне. Інтеграл від елементарної функції не завжди виражається через елементарні функції.

Наприклад,

$$\int \frac{\sin x}{x} dx \text{ – інтегральний синус;}$$

$$\int \frac{\cos x}{x} dx \text{ – інтегральний косинус;}$$

$$\int e^{-x^2}dx \ \text{– інтеграл Пуассона;}$$

$$\int \cos x^2 dx, \quad \int \sin x^2 dx \ \text{– інтеграли Френеля;}$$

$$\int \frac{dx}{\ln x} \ \text{– інтегральний логарифм.}$$

Вказані інтеграли існують, але не зводяться до елементарних функцій.

Властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, тобто

$$(\int f(x)dx)' = f(x).$$

⇨ Використовуємо означення невизначеного інтеграла $\int f(x)dx = F(x) + C$,

$$(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x) \quad ■$$

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу, тобто $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.

⇨ $d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$. ■

3. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої, тобто $\int dF(x) = F(x) + C$.

⇨ Оскільки $dF(x) = F'(x)dx$, то

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C. \quad ■$$

4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох чи декількох функцій дорівнює сумі їх інтегралів, тобто

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx. \qquad (1)$$

⇨ Знайдемо похідні від лівої та правої частин цієї рівності:

$(\int (f_1(x) + f_2(x))dx)' = f_1(x) + f_2(x)$ – за 1 властивістю,

$(\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx)' = (\int f_1(x)dx)' + (\int f_2(x)dx)' = f_1(x) + f_2(x)$.

Таким чином, похідні від лівої та правої частин рівності (1) рівні між собою. Згідно з теоремою 2 різниця між правою та лівою частинами рівності (1) дорівнює сталому числу. ■

5. Постійний множник можна винести за знак інтеграла, тобто якщо a = const $\neq 0$, то

$$\int a \cdot f(x)dx = a\int f(x)dx \qquad (2)$$

⇨ Знайдемо похідні від лівої та правої частин рівності (2):

$$(\int a \cdot f(x)dx)' = a \cdot f(x) \text{ – за 1 властивістю,}$$

$$(a\int f(x)dx)' = a(\int f(x)dx)' = a \cdot f(x),$$

$a \cdot f(x) = a \cdot f(x) \Rightarrow$ різниця між правою та лівою частинами рівності (2) дорівнює сталому числу ■

6. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C,$

то
$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C. \qquad (3)$$

⇨ Знайдемо похідні від лівої та правої частин рівності (3):

$$(\int f(ax)dx)' = f(ax),$$

$$\left(\frac{1}{a}F(ax) + C\right)' = \left(\frac{1}{a}F(ax)\right)' + C' = \frac{1}{a}(F(ax))' + 0 = \frac{1}{a}F'(ax)\cdot(ax)' =$$

$$= \frac{1}{a}F'(ax)\cdot a = F'(ax) = f(ax), \qquad f(ax) = f(ax) \quad ■$$

7. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C,$

то
$$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C. \qquad (4)$$

8. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C,$

то
$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C. \qquad (5)$$

Спробуйте довести 7 та 8 властивості самостійно диференціюванням правої та лівої частин рівностей (4), (5).

Таблиця основних інтегралів.

1. $\int 0 \cdot dx = C$.

2. $\int dx = x + C$.

3. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$.

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

6. $\int e^x dx = e^x + C$.

7. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$.

8. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

11. $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C$.

12. $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C$.

13. $\int \dfrac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$.

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

15. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C$.

16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$.

17. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$.

18. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

§ 2. Основні методи інтегрування

1) <u>Метод розкладу.</u> Базується на застосуванні властивостей 1 – 8 і табличних інтегралів.

Приклади.

1.

$$\int (5x^4 + \frac{1}{2x} + \sqrt[3]{x} - 1)dx = (\text{за 4 властивістю}) = \int 5x^4 dx + \int \frac{1}{2x} dx +$$

$$+ \int \sqrt[3]{x} dx - \int dx = (\text{за 5 властивістю}) = 5\int x^4 dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + \int x^{\frac{1}{3}} dx -$$

$-\int dx =$ (за табл. інтегралами 3, 4, 3, 2) $= 5 \cdot \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{1}{2}\ln|x| + \dfrac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} -$

$- x + C = x^5 + \dfrac{1}{2}\ln|x| + \dfrac{3x\sqrt[3]{x}}{4} - x + C.$

2. $\int 2^x e^x dx = \int (2e)^x dx =$(за 5 табл. інтегралом) $= \dfrac{(2e)^x}{\ln 2e} + C =$

$= \dfrac{2^x e^x}{\ln 2 + \ln e} + C = \dfrac{2^x e^x}{\ln 2 + 1} + C.$

3. $\int \dfrac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx = \int \dfrac{1+2x+x^2}{x(1+x^2)} dx = \int \dfrac{(1+x^2)+2x}{x(1+x^2)} dx =$

Почленно поділимо чисельник на знаменник

$= \int \dfrac{1+x^2}{x(1+x^2)} dx + \int \dfrac{2x}{x(1+x^2)} dx = \int \dfrac{dx}{x} + \int \dfrac{2}{1+x^2} dx =$ (за 5 властивістю і табл. інтегралами 4, 13) $= \ln|x| + 2\operatorname{arctg} x + C.$

4. $\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx$.

Оскільки $\operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x} - 1$, то $\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx =$

$= \int (\dfrac{1}{\sin^2 x} - 1) dx =$ (за 4 вл.) $= \int \dfrac{dx}{\sin^2 x} - \int dx =$ (за табл. інтегралами 10, 2) $= -\operatorname{ctg} x - x + C.$

5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{3-x^2}} =$ (за 16 табл. інтегралом, де $a = \sqrt{3}$) $= \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{3}} + C.$

6. $\int \cos 5x\, dx$.

$\int \cos x\, dx = \sin x + C$ (8 табл. інт.)

Тоді за 6 властивістю $\int \cos 5x\, dx = \dfrac{1}{5}\sin 5x + C.$

7. $\int \dfrac{dx}{(2x-10)^{10}}$.

Оскільки $\int \frac{dx}{x^{10}} = \int x^{-10}dx =$ (за 3 табл. інт., де α = -10) $= \frac{x^{-9}}{-9} + C =$

$-\frac{1}{9x^9} + C$, то за 8 властивістю (a = 2, b = – 10) $\int \frac{dx}{(2x-10)^{10}} =$

$$= \int (2x-10)^{-10}dx = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{9(2x-10)^9}) + C = -\frac{1}{18(2x-10)^9} + C.$$

Перевіряються результати інтегрування диференціюванням. Виконаємо перевірку в першому прикладі.

Перевірка.

За властивістю 1, похідна від довільної первісної дорівнює підінтегральній функції $f(x) = 5x^4 + \frac{1}{2x} + \sqrt[3]{x} - 1$.

$$\left(x^5 + \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} - x + C \right)' = 5x^4 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{4}\left(x^{\frac{4}{3}} \right)' - 1 + 0 =$$

$= 5x^4 + \frac{1}{2x} + \sqrt[3]{x} - 1 = f(x).$ Інтеграл знайдено правильно.

2) <u>Метод заміни змінної або метод підстановки.</u>

У багатьох випадках введення нової змінної інтегрування дозволяє звести знаходження заданого інтеграла до табличного.

Нехай необхідно обчислити інтеграл

$$\int f(x)dx$$

від неперервної функції f(x).

Замінимо змінну x через нову змінну t, виконуючи під знаком невизначеного інтеграла підстановку:

$$x = \varphi(t),$$
$$dx = \varphi'(t)dt,$$

де $\varphi(t)$ – неперервна функція, що має неперервну похідну $\varphi'(t)$ і для якої існує обернена функція $t = \psi(x)$.

Тоді $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ – формула заміни змінної або підстановки.

Підбирають $\varphi(t)$ таким чином, щоб нова підінтегральна функція $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ була простішою для інтегрування. В результаті обчислення нового інтегралу отримується функція незалежної змінної t. Для повернення до змінної x необхідно замінити t значенням $t = \psi(x)$, яке знаходиться з рівняння $x = \varphi(x)$, виражаючи t через x.

Приклади.

1. $$\int \sqrt{\cos x}\sin x\,dx = \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ d(\cos x) = dt \\ -\sin x\,dx = dt \\ \sin x\,dx = \text{-}dt \end{array} \right| = -\int \sqrt{t}dt = -\int t^{\frac{1}{2}}dt =$$

$$= -\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = -\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C = -\frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x} + C.$$

На практиці функцію t здебільшого не виписують, а під знаком диференціала записують її вираз через x. Зокрема, при обчисленні даного інтеграла, вираз sinx dx можна записати як – d(cos x), внісши функцію cosx під знак диференціала.

Отже, $\int \sqrt{\cos x}\sin x\,dx = \text{-}\int \sqrt{\cos x}\,d(\cos x) = -\int (\cos x)^{\frac{1}{2}}d(\cos x) =$

= (cos x – змінна інтегрування, за 3 табл. інтегралом) =

$$= -\frac{(\cos x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = -\frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x} + C.$$

2. $$\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2 - (3x)^2}} = \left| \begin{array}{c} 3x = t \\ d(3x) = dt \\ 3dx = dt \\ dx = \frac{dt}{3} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{3}}{\sqrt{2^2 - t^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{2^2 - t^2}} =$$

= (за 16 табл. інтегралом, a = 2) $= \frac{1}{3}\arcsin\frac{t}{2} + C = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2} + C.$

Аналогічно попередньому прикладу, дістаємо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2 - (3x)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x)}{\sqrt{2^2 - (3x)^2}} =$$

$$= (3x - \text{змінна інтегрування}) \quad = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2} + C.$$

3. $$\int \frac{x\,dx}{5 + x^2} = \left| \begin{array}{c} 5 + x^2 = t \\ d(5 + x^2) = dt \\ 2x\,dx = dt \\ x\,dx = \dfrac{dt}{2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{2}}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = (\text{за 4 табл. інтегралом}) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln\left|5 + x^2\right| + C = \frac{1}{2}\ln(5 + x^2) + C,$$

$5 + x^2 > 0,$ тому $\left|5 + x^2\right| = 5 + x^2$.

Або $$\int \frac{x\,dx}{5 + x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(5 + x^2)}{5 + x^2} = (5 + x^2 - \text{змінна інтегрування}) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|5 + x^2\right| + C = \frac{1}{2}\ln(5 + x^2) + C.$$

Корисно запам'ятати, якщо чисельник підінтегральної функції f(x) дорівнює похідній знаменника, то справедлива формула:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C.$$

Дійсно, $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \left| \begin{array}{c} t = f(x) \\ dt = df(x) \\ dt = f'(x)dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C.$$

4. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln x}} = \left| \begin{array}{c} 1-4\ln x = t \\ d(1-4\ln x) = dt \\ -4\cdot\frac{1}{x}dx = dt \\ \frac{dx}{x} = -\frac{1}{4}dt \end{array} \right| = -\frac{1}{4}\int\frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{4}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = (\text{за 3 табл. інт.},$$

$$\text{де } \alpha = -\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = -\frac{1}{4}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -\frac{1}{2}\sqrt{t} + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{1-4\ln x} + C.$$

Або

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln x}} = -\frac{1}{4}\int\frac{d(1-4\ln x)}{\sqrt{1-4\ln x}} = -\frac{1}{4}\int(1-4\ln x)^{-\frac{1}{2}}d(1-4\ln x) =$$

= (1 – 4 ln x – змінна інтегрування) =

$$= -\frac{1}{4}\frac{(1-4\ln x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = -\frac{1}{2}\sqrt{1-4\ln x} + C.$$

Корисно запам’ятати формулу:

$$\int\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + C.$$

Дійсно, $\int\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = \left| \begin{array}{c} t = f(x) \\ dt = df(x) \\ dt = f'(x)dx \end{array} \right| = \int\frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{1}{2}}dt = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{f(x)} + C.$

5. $$\int\frac{2^{tgx-1}}{\cos^2 x}dx = \left| \begin{array}{c} tg\,x - 1 = t \\ d(tg\,x-1) = dt \\ \frac{1}{\cos^2 x}dx = dt \end{array} \right| = \int 2^t dt = (\text{за 5 табл. інтегр.}) =$$

$$= \frac{2^t}{\ln 2} + C = \frac{2^{tgx-1}}{\ln 2} + C.$$

Або $\int \frac{2^{tgx-1}}{\cos^2 x}dx = \int 2^{tgx-1}d(tgx-1) = \frac{2^{tgx-1}}{\ln 2} + C.$

3) Метод інтегрування частинами.

Нехай u(x), v(x) – диференційовні функції. Відомо, що диференціал від добутку u·v обчислюється за формулою:
d(u·v) = udv + vdu.

Проінтегруємо ліву та праву частини рівності:

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

$$uv = \int udv + \int vdu$$

або $\int udv = uv - \int vdu$ – формула інтегрування частинами.

Для застосування цієї формули підінтегральний вираз розбивають на дві частини u та dv таким чином, щоб обчислення $\int vdu$ було простішим, ніж $\int udv$. За відомою функцією u диференціюванням знаходять du, а за відомим dv інтегруванням – v. Слід пам'ятати, що до складу dv обов'язково входить диференціал незалежної змінної.

Приклади.

$$1.\ \int x\sin x\,dx = \left| \begin{array}{c} u = x \\ dv = \sin x\,dx \\ du = dx \\ v = \int \sin x\,dx = -\cos x \end{array} \right| = uv - \int vdu = -x\cos x + \int \cos x dx =$$

$$= -x\cos x + \sin x + C.$$

Зауваження. При визначенні $v = \int \sin x\,dx = -\cos x + C$ вважаємо C = 0, тому що в кінцевий результат дана довільна стала C не входить.

У деяких випадках формула інтегрування частинами застосовується кілька разів.

$$2.\ \int x^2 e^{3x}dx = \left| \begin{array}{c} u = x^2 \\ dv = e^{3x}dx \\ du = (x^2)'dx = 2xdx \\ v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}d(3x) = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right| = uv - \int vdu =$$

$$=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{3}\int xe^{3x}dx=$$

Для обчислення інтеграла $\int xe^{3x}dx$ застосуємо ще раз формулу інтегрування частинами:

$$=\left|\begin{array}{c} u=x \\ dv=e^{3x}\,dx \\ du=dx \\ v=\frac{1}{3}e^{3x} \end{array}\right|=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{3}(uv-\int vdu)=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}xe^{3x}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right)=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{9}xe^{3x}+\frac{2}{9}\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-$$

$$-\frac{2}{9}xe^{3x}+\frac{2}{27}e^{3x}+C.$$

$$3.\int \mathrm{arctg}x\,dx=\left|\begin{array}{c} u=\mathrm{arctg}x \\ dv=dx \\ du=\frac{1}{1+x^2}dx \\ v=x \end{array}\right|=uv-\int vdu=x\,\mathrm{arctg}x-\int\frac{x}{1+x^2}dx=$$

$$=x\,\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=x\,\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

Трапляються випадки, коли двічі застосована формула інтегрування частинами приводить до початкового інтеграла.

$$4.\ I=\int e^x\cos 3x\,dx=\left|\begin{array}{c} u=e^x \\ dv=\cos 3xdx \\ du=e^xdx \\ v=\int\cos 3xdx= \\ =\frac{1}{3}\sin 3x \end{array}\right|=uv-\int vdu=\frac{1}{3}e^x\sin 3x-$$

$$-\frac{1}{3}\int e^x \sin 3x\, dx = \left| \begin{array}{c} u = e^x \\ dv = \sin 3x dx \\ du = e^x dx \\ v = \int \sin 3x\, dx = \\ = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{array} \right| = \frac{1}{3}e^x \sin 3x - \frac{1}{3}(uv - \int vdu) =$$

$$= \frac{1}{3}e^x \sin 3x - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}e^x \cos 3x + \frac{1}{3}\int e^x \cos 3x\, dx\right) = \frac{1}{3}e^x \sin 3x +$$

$$+\frac{1}{9}e^x \cos 3x - \frac{1}{9}I.$$

Отримали рівняння з невідомим інтегралом I, тобто

$I = \frac{1}{3}e^x \sin 3x + \frac{1}{9}e^x \cos 3x - \frac{1}{9}I$, звідки

$$\frac{10}{9}I = \frac{1}{3}e^x \sin 3x + \frac{1}{9}e^x \cos 3x,$$

$$I = \frac{9}{10}\left(\frac{1}{3}e^x \sin 3x + \frac{1}{9}e^x \cos 3x\right) = \frac{e^x}{10}(3\sin 3x + \cos 3x) + C.$$

Розглянувши приклади застосування методу інтегрування частинами, зауважимо, що через u позначають функцію, яка спрощується при диференціюванні (наприклад, x, x^2, arctg x, arcsin x, lnx).

Правило інтегрування частинами застосовується в багатьох випадках, більшу частину яких можна поділити на три групи.

До I групи відносяться інтеграли виду:

$$\int P(x)\mathrm{arctg} x\, dx,\ \int P(x)\arcsin x\, dx,\ \int P(x)\arccos x\, dx,$$

$$\int P(x)\ln x\, dx,\ \text{де } P(x) - \text{многочлен.}$$

Для їх обчислення за u приймають відповідно функції:

arctg x, arcsin x, arccos x, ln x, а за dv – вираз P(x)dx.

До II групи відносяться інтеграли виду:

$\int P(x)e^{kx}dx,\ \int P(x)\sin kx dx,\ \int P(x)\cos kx dx,$ де $P(x)$ – многочлен, $k \in R$.

Для їх обчислення за u приймають P(x), а за dv – відповідно вирази $e^{kx}dx,\ \sin kxdx,\ \cos kxdx.$

До III групи відносяться інтеграли виду:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx,\ \int e^{ax}\sin bxdx,\text{ де } a,\ b \in R.$$

Для їх обчислення двічі застосовують формулу інтегрування частинами (див. приклад 4).

4) <u>Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен.</u>

Розглянемо інтеграл $I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$.

Виділимо повний квадрат у тричлені

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2\right.$$

$$\left. - \frac{D}{4a^2}\right) = = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right),$$

де позначимо $\frac{4ac - b^2}{4a^2} = -\frac{D}{4a^2} = \pm k^2$,

$D = b^2 - 4ac$ – дискримінант квадратного тричлена.

Якщо $D < 0$, то $\frac{4ac - b^2}{4a^2} = -\frac{D}{4a^2} = k^2$,

якщо $D > 0$, то $\frac{4ac - b^2}{4a^2} = -\frac{D}{4a^2} = -k^2$.

Таким чином, маємо:

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2} = \left|\begin{array}{c} x + \frac{b}{2a} = t \\ d(x + \frac{b}{2a}) = dt \\ dx = dt \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 \pm k^2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 + k^2} = (\text{за 15 табл. інт.}) = \frac{1}{ak}\operatorname{arctg}\frac{t}{k} + C, \quad D < 0; \\ \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 - k^2} = (\text{за 17 табл. інт.}) = \frac{1}{2ak}\ln\left|\frac{t-k}{t+k}\right| + C, \quad D > 0 \end{cases}$$

Приклад 1. $\int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20}$.

В знаменнику виділяємо повний квадрат:

$$2x^2 + 8x + 20 = 2(x^2 + 4x + 10) = 2(x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 4 + 10 - 4) =$$
$$= 2((x+2)^2 + 6) = 2((x+2)^2 + (\sqrt{6})^2).$$

Тоді $\int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+2)^2 + (\sqrt{6})^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2 + (\sqrt{6})^2} =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{6}} + C.$$

Розглянемо інтеграл

$$I_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}dx.$$

У чисельнику дробу утворимо похідну квадратного тричлена $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$ і розіб’ємо заданий інтеграл на суму двох інтегралів:

$$I_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}dx = \int \frac{(2ax+b) \cdot \frac{A}{2a} - \frac{Ab}{2a} + B}{ax^2 + bx + c}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)dx}{ax^2 + bx + c} +$$
$$+ \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \cdot \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} =$$
$$\frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)dx}{ax^2 + bx + c} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \cdot I_1,$$

$$\int \frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c} = \left| \begin{array}{c} ax^2+bx+c=t \\ d(ax^2+bx+c)=dt \\ (2ax+b)dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$$

$$= \ln\left|ax^2+bx+c\right| + C.$$

А інтеграл I_1 вже було розглянуто. Остаточно отримуємо:

$$I_2 = \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\cdot I_1 .$$

Приклад 2. $\int \frac{x+5}{x^2-2x-4}dx.$

$(x^2-2x-4)' = 2x-2$.

Виділимо в чисельнику дробу похідну знаменника 2x – 2 так, щоб величина чисельника при цьому не змінилась:

$$x+5 = (2x-2)\cdot\frac{1}{2} + 1 + 5 = (2x-2)\cdot\frac{1}{2} + 6 .$$

$$\int \frac{x+5}{x^2-2x-4}dx = \int \frac{(2x-2)\cdot\frac{1}{2}+6}{x^2-2x-4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)}{x^2-2x-4}dx +$$

$$+6\int \frac{dx}{x^2-2x-4} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-2x-4)}{x^2-2x-4} + 6\int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2-(\sqrt{5})^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-4\right| + \frac{3}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-1-\sqrt{5}}{x-1+\sqrt{5}}\right| + C,$$

$$x^2-2x-4 = x^2-2x+1-1-4 = (x-1)^2-5 = (x-1)^2-(\sqrt{5})^2 .$$

Розглянемо інтеграл:

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

За допомогою виділення повного квадрата у тричлені ax^2+bx+c зводиться до 18, 16 табличних інтегралів.

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}} \displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}, & \text{якщо } a > 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{|a|}} \displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}}, & \text{якщо } a < 0 \end{cases}$$

Приклад 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

Виділяємо повний квадрат у квадратному тричлені, що міститься під знаком кореня:

$3-2x-x^2 = -(x^2+2x-3) = -(x^2+2x+1-1-3) = -((x+1)^2-4) =$
$= 4-(x+1)^2$.

Тоді $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{4-(x+1)^2}} =$(за 16 табл. інт., де a = 2) $= \arcsin\frac{x+1}{2} + C$.

Розглянемо інтеграл:

$$I_4 = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

Інтеграл I_4 обчислюється за допомогою перетворень, анологічних до тих, які були розглянуті при обчисленні інтеграла I_2.

$$I_4 = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{(2ax+b)\frac{A}{2a} - \frac{Ab}{2a} + B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = = \frac{A}{2a}\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} +$$
$$\left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$
$$= \frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\cdot I_3.$$

До першого інтеграла застосували формулу:

$\int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)} + C$, а I_3 вже було розглянуто.

Приклад 4. $\int \frac{(4x+1)dx}{\sqrt{x^2+4x+9}}$.

Виділимо в чисельнику дробу похідну квадратного тричлена, що міститься під знаком кореня так, щоб величина чисельника не змінилась:

$(x^2+4x+9)' = 2x+4,\quad 4x+1 = (2x+4)\cdot 2 - 8 + 1 = (2x+4)\cdot 2 - 7$.

Розіб'ємо заданий інтеграл на суму двох інтегралів:

$$\int \frac{(4x+1)dx}{\sqrt{x^2+4x+9}} = 2\int \frac{(2x+4)dx}{\sqrt{x^2+4x+9}} - 7\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+9}}.$$

Перший інтеграл обчислюємо за формулою $\int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)} + C$, а другий I_3 зводимо до табличного, виділяючи повний квадрат у квадратному тричлені:

$$\int \frac{(2x+4)dx}{\sqrt{x^2+4x+9}} = 2\sqrt{x^2+4x+9} + C,$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+9}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2\cdot 2x+4-4+9}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+5}} =$$

$$= \int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+(\sqrt{5})^2}} = \text{ (за 18 табл. інтегралом, де a = } \sqrt{\mathbf{5}}\text{) } =$$

$$= \ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+(\sqrt{5})^2}\right| + C = \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+9}\right| + C.$$

Остаточно отримуємо:

$$\int \frac{(4x+1)dx}{\sqrt{x^2+4x+9}} = 4\sqrt{x^2+4x+9} - 7\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+9}\right| + C.$$

§ 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій

Інтеграли класу раціональних функцій завжди виражаються через елементарні функції.

Функція вигляду $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, де $P_m(x)$, $Q_n(x)$ –

многочлени степеня m та n ($n \neq 0$), називається дробово-раціональною, або раціональним дробом.

Надалі будемо припускати, що многочлени $P_m(x)$, $Q_n(x)$ не мають спільних коренів.

Якщо $m < n$, то раціональний дріб називається правильним, а якщо $m \geq n$, то неправильним.

У неправильному дробі завжди можна виділити цілу частину і зобразити його у вигляді суми многочлена та правильного раціонального дробу, тобто

$$\underbrace{\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}}_{\substack{\text{Неправильний} \\ \text{дріб}}} = \underbrace{R_{m-n}(x)}_{\substack{\text{ціла} \\ \text{частина} \\ \text{(многочлен)}}} + \underbrace{\frac{P_r(x)}{Q_n(x)}}_{\substack{\text{правильний} \\ \text{дріб}}},$$

де $m \geq n$, $r < n$.

Виділення цілої частини виконується діленням чисельника на знаменник, наприклад:

$\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \dfrac{1+2x^5-x^3}{(x-1)^2}$ – дріб неправильний, $m = 5 > n = 2$; записуємо чисельник і знаменник у канонічному вигляді:

$1 + 2x^5 - x^3 = 2x^5 - x^3 + 1$

$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

$$\begin{array}{l|l}
-\;2x^5 - x^3 + 1 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^5 - 4x^4 + 2x^3} & 2x^3 + 4x^2 + 5x + 6 \\
\qquad -\;4x^4 - 3x^3 + 1 & \\
\qquad \underline{4x^4 - 8x^3 + 4x^2} & \\
\qquad\qquad -\;5x^3 - 4x^2 + 1 & \\
\qquad\qquad \underline{5x^3 - 10x^2 + 5x} & \\
\qquad\qquad\qquad -\;6x^2 - 5x + 1 & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{6x^2 - 12x + 6} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 7x - 5 &
\end{array}$$

$$\frac{1+2x^5-x^3}{(x-1)^2}=2x^3+4x^2+5x+6+\frac{7x-5}{x^2-2x+1}.$$

<u>Означення.</u> Правильні раціональні дроби типу:

I. $\frac{A}{x-a}$, II. $\frac{A}{(x-a)^k}$, III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$,

де k ≥ 2 – натуральне число; корені знаменника x^2+px+q комплексні, т.б. $D = p^2 - 4q < 0$, $A, B, a, p, q \in R$ називаються найпростішими (елементарними) дробами I, II, III і IV типів.

Кожен правильний раціональний дріб розкладається на суму найпростіших дробів. Тому, розглянемо інтеграли від найпростіших дробів.

I. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$

II. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = A\cdot\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C =$

$= \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$

III. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ (див. I_2).

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx +$$

$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{A}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\times$$

$$\times\int\frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q} = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\times$$

$$\times\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\times$$

$$\times\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\right)^2}=$$

$$\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}}\times$$

$$\times\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}}+C=$$

$$\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

IV. $\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx.$

Утворимо у чисельнику дробу похідну квадратного тричлена $(x^2+px+q)'=2x+p$ і розіб'ємо дріб на суму двох дробів.

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^k}dx=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^k}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}.$$

Інтеграл від першого дробу обчислюємо методом підстановки:

$$\int\frac{(2x+p)}{(x^2+px+q)^k}dx=\left|\begin{array}{c}x^2+px+q=t\\ d(x^2+px+q)=dt\\ (2x+p)dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{dt}{t^k}=\int t^{-k}dt=\frac{t^{-k+1}}{1-k}+C=$$

$$=\frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}}+C.$$

Інтеграл від другого дробу позначимо I_k і запишемо у вигляді

$$I_k=\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}=\int\frac{dx}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^k}=\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k},\text{ де}$$

$$x+\frac{p}{2}=t,\ dx=dt,\ q-\frac{p^2}{4}=m^2\ \Big(D=p^2-4q<0\Rightarrow 4q-$$

$$-p^2>0\Rightarrow q-\frac{p^2}{4}>0\Big).$$

$$I_k=\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k}=\frac{1}{m^2}\int\frac{(t^2+m^2)-t^2}{(t^2+m^2)^k}dt=\frac{1}{m^2}\int\frac{t^2+m^2}{(t^2+m^2)^k}dt-$$

$$-\frac{1}{m^2}\int\frac{t^2}{(t^2+m^2)^k}dt=\frac{1}{m^2}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}-\frac{1}{m^2}\int\frac{t^2dt}{(t^2+m^2)^k}=$$

$$=\frac{1}{m^2}\cdot I_{k-1}-\frac{1}{m^2}\int\frac{t^2dt}{(t^2+m^2)^k}.$$

До обчислення останнього інтеграла застосовуємо метод інтегрування частинами

$$\int\frac{t^2dt}{(t^2+m^2)^k}=\int\frac{t\cdot tdt}{(t^2+m^2)^k}=\left|\begin{array}{c} u=t;\qquad\qquad du=dt \\ dv=\dfrac{tdt}{(t^2+m^2)^k} \\ v=\displaystyle\int\frac{tdt}{(t^2+m^2)^k}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+m^2)}{(t^2+m^2)^k}= \\ =\displaystyle\frac{1}{2}\int(t^2+m^2)^{-k}d(t^2+m^2)= \\ =\dfrac{1}{2(1-k)(t^2+m^2)^{k-1}}\end{array}\right|=$$

$$=uv-\int vdu=\frac{t}{2(1-k)(t^2+m^2)^{k-1}}-\frac{1}{2(1-k)}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}=$$

$$=\frac{t}{2(1-k)(t^2+m^2)^{k-1}}-\frac{1}{2(1-k)}\cdot I_{k-1}=$$

$$= -\frac{t}{2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(k-1)} \cdot I_{k-1}.$$

Таким чином, інтеграл I_k виражається через інтеграл I_{k-1}:

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{m^2} \cdot I_{k-1} - \frac{1}{m^2}\left(-\frac{t}{2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2(k-1)} \cdot I_{k-1}\right) = \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}} + \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{2m^2(k-1)}\right) I_{k-1} =$$

$$= \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)} \cdot I_{k-1}, \text{ де } I_{k-1} = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}.$$

Якщо $k > 2$, то до інтеграла I_{k-1} можна застосувати той же процес обчислення, що призведе до зниження на одиницю показника степеня в знаменнику підінтегрального дробу, т. б. інтеграл I_{k-1} виразити через I_{k-2}. І так продовжувати до тих пір, доки не дійдемо до відомого інтеграла:

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+m^2} = \frac{1}{m} \operatorname{arctg} \frac{t}{m} + C.$$

Підставляючи замість t і m їх значення, отримаємо вираз інтеграла IV типу через x та задані числа A, B, p, q.

Якщо многочлен $Q_n(x)$ розкладено на найпростіші множники $Q_n(x) = (x-a)^\alpha \ldots (x-b)^\beta (x^2+px+q)^\mu \ldots (x^2+lx+s)^\nu$, то дріб $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ у випадку, коли $m < n$, може бути представлений у вигляді суми елементарних дробів:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}} +$$

$$+ \ldots + \frac{B_1}{x-b} + \frac{M_\mu x + N_\mu}{(x^2+px+q)^\mu} + \frac{M_{\mu-1}x + N_{\mu-1}}{(x^2+px+q)^{\mu-1}} + \ldots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2+px+q} + \ldots +$$

$$+ \frac{L_\nu x + K_\nu}{(x^2+lx+s)^\nu} + \frac{L_{\nu-1}x + K_{\nu-1}}{(x^2+lx+s)^{\nu-1}} + \ldots + \frac{L_1 x + K_1}{x^2+lx+s},$$

де $A_\alpha, A_{\alpha-1}, ..., A_1, B_\beta, B_{\beta-1}, ..., B_1, M_\mu, M_{\mu-1}, ..., M_1, N_\mu, N_{\mu-1}, ...,$
$N_1, L_\nu, L_{\nu-1}, ..., L_1, K_\nu, K_{\nu-1}, ..., K_1$ – деякі сталі, що знаходяться методом невизначених коефіцієнтів. Для цього необхідно скласти систему лінійних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів, таким чином:

1) звести останню рівність до спільного знаменника і прирівняти чисельники в обох частинах рівності;

2) записати кожне рівняння системи, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x. Кількість рівнянь системи можна зменшити, якщо в отриману рівність замість x підставляти дійсні корені знаменника $Q_n(x)$.

Залишається розв'язати систему рівнянь і підставити значення невідомих коефіцієнтів $A_\alpha, ...$ в схему розкладу дробу $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$.

Вигляд найпростіших дробів визначається коренями знаменника $Q_n(x)$. Можливі такі випадки.

Випадок 1. Знаменник має тільки дійсні різні корені. В такому випадку дріб $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ розкладається на найпростіші дроби I типа.

Приклад 1. $\int \frac{4x^4 + 2x^2 - x - 3}{x^3 - x} dx$.

$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{4x^4 + 2x^2 - x - 3}{x^3 - x}$ – неправильний дріб, m = 4 > n = 3.

Виділимо цілу частину:

$$\begin{array}{r|l} -\;4x^4 + 2x^2 - x - 3 & \underline{x^3 - x} \\ \underline{4x^4 - 4x^2} \qquad\qquad & 4x \\ 6x^2 - x - 3 & \end{array}$$

$$\frac{4x^4 + 2x^2 - x - 3}{x^3 - x} = 4x + \frac{6x^2 - x - 3}{x^3 - x}.$$

Розкладемо знаменник на множники: $x^3 - x = x(x - 1)(x + 1)$.

Зобразимо правильний дріб $\frac{6x^2 - x - 3}{x^3 - x}$ у вигляді суми елементарних дробів I типу:

$$\frac{6x^2 - x - 3}{x^3 - x} = \frac{6x^2 - x - 3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Останню рівність зведемо до спільного знаменника

$$\frac{6x^2 - x - 3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$

і прирівняємо чисельники:

$$6x^2 - x - 3 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$$

$$6x^2 - x - 3 = A(x^2 - 1) + B(x^2 + x) + C(x^2 - x)$$

$$6x^2 - x - 3 = (A + B + C)x^2 + (B - C)x + (-A)$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x, (використовується умова рівності двох многочленів: два многочлени рівні тоді і тільки тоді, коли рівні коефіцієнти при відповідних степенях x).

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & 6 = A + B + C, \\ x & -1 = B - C, \\ x^0 & -3 = -A \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} B + C = 3, \\ C - B = 1, \\ A = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B + C = 3, \\ 2C = 4, \\ A = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3, \\ B = 1, \\ C = 2 \end{cases}$$

$$\frac{6x^2 - x - 3}{x^3 - x} = \frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1}.$$

Невідомі коефіцієнти A, B, C можна було визначити іншим чином. Оскільки числа 0, 1, –1 є коренями знаменника, то зручно підставити саме ці значення x в рівність:

$$6x^2 - x - 3 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$$

$$\begin{array}{l|l} x = 0 & -3 = -A \Rightarrow A = 3, \\ x = 1 & 2 = 2B \Rightarrow B = 1, \\ x = -1 & 4 = 2C \Rightarrow C = 2. \end{array}$$

Таким чином,

$$\int \frac{4x^4 + 2x^2 - x - 3}{x^3 - x} dx = \int \left(4x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} \right) dx = 4\int x dx +$$

$$3\int\frac{dx}{x}++\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{x+1}=2x^2+3\ln|x|+\ln|x-1|+2\ln|x+1|+C.$$

Випадок 2. Знаменник має тільки дійсні корені, де деякі з них кратні.

У такому випадку дріб $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ розкладається на найпростіші дроби I, II типів.

Приклад 2. $\displaystyle\int\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx$.

$\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\dfrac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}$ – правильний дріб, $m = 2 < n = 4$.

Знаменник має трикратний корінь –1, тому розклад на найпростіші дроби матиме вигляд:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{A_3}{(x+1)^3}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{A_1}{x+1}+\frac{B}{x-2}$$

Зведемо цю рівність до спільного знаменника

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=$$

$$=\frac{A_3(x-2)+A_2(x+1)(x-2)+A_1(x+1)^2(x-2)+B(x+1)^3}{(x+1)^3(x-2)}$$

і прирівняємо чисельники:

$$x^2+2=A_3(x-2)+A_2(x+1)(x-2)+A_1(x+1)^2(x-2)+B(x+1)^3.$$

Числа –1, 2 – дійсні корені знаменника, тому підставляємо ці значення x в останню рівність:

$$\begin{array}{l|l} x=-1 & 3=-3A_3 \;\Rightarrow\; A_3=-1, \\ x=2 & 6=27B \;\Rightarrow\; B=\dfrac{2}{9}. \end{array}$$

Для обчислення A_1, A_2 прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$x^2+2=A_3x-2A_3+A_2x^2-A_2x-2A_2+A_1x^3-3A_1x-2A_1+Bx^3+$$
$$+3Bx^2+3Bx+B;$$

$$x^2+2=(A_1+B)x^3+(A_2+3B)x^2+(A_3-A_2-3A_1+3B)x+$$
$$+(-2A_3-2A_2-2A_1+B);$$

$$\left.\begin{array}{l} x^3 \\ x^2 \end{array}\right| \begin{array}{l} 0=A_1+B \;\Rightarrow\; A_1=-B=-\dfrac{2}{9}, \\ 1=A_2+3B \;\Rightarrow\; A_2=1-3B=\dfrac{1}{3}. \end{array}$$

Тоді $\displaystyle\int\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx=\int\left(-\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{x+1}+\right.$

$$\left.+\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{x-2}\right)dx=-\int\frac{dx}{(x+1)^3}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x+1}+$$

$$+\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-2}=\frac{1}{2(x+1)^2}-\frac{1}{3(x+1)}-\frac{2}{9}\ln|x+1|+\frac{2}{9}\ln|x-2|+$$

$$+C=\frac{1}{2(x+1)^2}-\frac{1}{3(x+1)}+\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C.$$

Випадок 3. Знаменник має комплексні різні корені. В такому випадку дріб $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ розкладається на найпростіші дроби I, II, III типів.

Приклад 3. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3-8}.$

$\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\dfrac{1}{x^3-8}$ – правильний дріб, $m = 0 < n = 3$.

Розкладемо знаменник на множники: $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + + 4)$, (множник $x^2 + 2x + 4$ на дійсні множники не розкладається).

$x^2 + 2x + 4 = 0$,

$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot4}}{2}=\dfrac{-2\pm2\sqrt{3}i}{2}=-1\pm\sqrt{3}i$ комплексно-спряжені корені.

Знаменник $Q_n(x) = x^3 - 8$ має один дійсний корінь $x = 2$ і два уявних $x=-1\pm\sqrt{3}i$, тому розклад правильного дробу на найпростіші дроби матиме вигляд:

$$\frac{1}{x^3-8}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4}.$$

Зведемо до спільного знаменника і прирівняємо чисельники:

$$1=A(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x-2)$$

$$1=(A+B)x^2+(2A-2B+C)x+(4A-2C)$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x=2 & 1=12A \\ x^2 & 0=A+B \\ x^0 & 1=4A-2C \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases} A=\dfrac{1}{12}, \\ B=-\dfrac{1}{12}, \\ C=-\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Таким чином,

$$\frac{1}{x^3-8}=\frac{1}{12(x-2)}+\frac{-\frac{1}{12}x-\frac{1}{3}}{x^2+2x+4}=\frac{1}{12(x-2)}-\frac{x+4}{12(x^2+2x+4)}.$$

Тоді $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3-8}=\frac{1}{12}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{12}\int\frac{(x+4)dx}{x^2+2x+4}=\frac{1}{12}\ln|x-2|-\frac{1}{12}\cdot I_2,$ де

$$I_2=\int\frac{(x+4)dx}{x^2+2x+4}=\int\frac{(2x+2)\cdot\frac{1}{2}+3}{x^2+2x+4}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+4}+$$

$$+3\int\frac{dx}{(x+1)^2+(\sqrt{3})^2}=$$

$$\left.\begin{array}{l} (x^2+2x+4)'=2x+2 \\ x+4=(2x+2)\cdot\dfrac{1}{2}-1+4= \\ =(2x+2)\cdot\dfrac{1}{2}+3, \end{array}\right| \begin{array}{l} =\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{d(x^2+2x+4)}{x^2+2x+4}+3\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{3})^2}= \\ \quad=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+4)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{\sqrt{3}}+C. \end{array}$$

$$x^2+2x+4=x^2+2x+1-1+4=(x+1)^2+(\sqrt{3})^2.$$

$$\int\frac{dx}{x^3-8}=\frac{1}{12}\ln|x-2|-\frac{1}{24}\ln(x^2+2x+4)-\frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Випадок 4. Знаменник має комплексні кратні корені. В такому випадку дріб $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ розкладається на найпростіші дроби I, II, III, IV типів.

Приклад 4. $\int \frac{2xdx}{(x+1)(x^2+1)^2}$.

$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}$ – правильний дріб, m = 1 < n = 5.

Знаменник $Q_n(x) = (x+1)(x^2+1)^2$ має один дійсний корень x = – 1 і два двократних уявних корені $x = \pm i$.

Розкладемо дріб на найпростіші дроби:

$$\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

Зведемо до спільного знаменника і прирівняємо чисельники:

$$2x = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x+1) + (Dx+E)(x+1)(x^2+1)\,,$$

$$2x = Ax^4 + 2Ax^2 + A + Bx^2 + Bx + Cx + C + Dx^4 + Dx^3 + Dx^2 + Dx +$$
$$+ Ex^3 + Ex^2 + Ex + E\,,$$

$$2x = (A+B)x^4 + (D+E)x^3 + (2A+B+D+E)x^2 + (B+C+D+E)x +$$
$$+ A + C + E\,,$$

$$\begin{array}{c|c}
x=-1 & -2 = 4A \Rightarrow A = -\frac{1}{2}, \\
x^4 & 0 = A + D \Rightarrow D = -A = \frac{1}{2}, \\
x^3 & 0 = D + E \Rightarrow E = -D = -\frac{1}{2}, \\
x^2 & 0 = 2A + B + D + E \Rightarrow B = -2A - D - E = 1, \\
x & 2 = B + C + D + E \Rightarrow C = 2 - B - D - E = 1.
\end{array}$$

Таким чином, $\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{x+1}{(x^2+1)^2} + \frac{x-1}{2(x^2+1)}$.

Тоді $\int \frac{2xdx}{(x+1)(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{(x+1)dx}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{(x-1)dx}{x^2+1} =$

$$=-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\int\frac{2x\cdot\frac{1}{2}+1}{(x^2+1)^2}dx+\frac{1}{2}\int\frac{2x\cdot\frac{1}{2}-1}{x^2+1}dx=$$

(тут ми виділили в чисельниках підінтегральних дробів похідну $(x^2+1)'=2x$).

$$=-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{(x^2+1)^2}+\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{2xdx}{x^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\int(x^2+1)^{-2}d(x^2+1)+\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}+\;+\frac{1}{4}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2(x^2+1)}+$$

$$+\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

До обчислення останнього інтеграла застосовуємо метод інтегрування частинами:

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\int\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{dx}{x^2+1}-\int\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\left|\begin{array}{c}u=x,\\ dv=\dfrac{xdx}{(x^2+1)^2},\\ du=dx,\\ v=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{2xdx}{(x^2+1)^2}=-\dfrac{1}{2(x^2+1)}\end{array}\right|=\operatorname{arctg}x-\left(uv-\int vdu\right)=$$

$$=\operatorname{arctg}x+\frac{x}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{x}{2(x^2+1)}+C.$$

Остаточно отримуємо:

$$\int\frac{2xdx}{(x+1)(x^2+1)^2}=-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2(x^2+1)}+\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{x}{2(x^2+1)}+C=\frac{x-1}{2(x^2+1)}-$$

$$-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+C.$$

§ 4. Інтегрування деяких класів тригонометричних функцій

1. Інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx,$ де R – раціональна функція своїх аргументів sin x, cos x.

Запис $R(\sin x, \cos x)$ означає, що над sin x, cos x виконуються тільки раціональні операції: додавання, віднімання, множення на число, ділення, піднесення до цілого степеня.

Інтеграли такого вигляду зводяться до інтегралів від раціональної функції за допомогою підстановки

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \ \ (-\pi < x < \pi),$$

яку називають універсальною тригонометричною підстановкою. Тригонометричні функції sin x, cos x виражаються через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ таким чином:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

З отриманих формул видно, що sin x, cos x та dx виражаються раціонально через t.

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Приклад 1.

$$\int \frac{dx}{2+\sin x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(2 + \frac{2t}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{t^2+t+1} = I_1.$$

Універсальна тригонометрична підстановка: $tg\frac{x}{2} = t$,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Інтеграл I_1 зводиться до 15 табличного виділенням повного квадрата у тричлені:

$$t^2 + t + 1 = t^2 + 2\cdot\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4} = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2;$$

$$I_1 = \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Тоді $\int \frac{dx}{2+\sin x} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + C.$

Застосування універсальної тригонометричної підстановки $tg\frac{x}{2} = t$ часто приводить до складних обчислень. Існує три випадки, де при знаходженні інтегралів вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx$, уникають універсальну підстановку, а саме:

а) якщо $R(\sin x, \cos x)$ – непарна функція відносно sinx, т.б. якщо $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то використовують підстановку cos x = t;

б) якщо $R(\sin x, \cos x)$ – непарна функція відносно cosx, т.б. якщо $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то використовують підстановку sin x = t;

в) якщо $R(\sin x, \cos x)$ – парна функція відносно sinx, cosx, т.б. якщо $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то використовують підстановку tg x = t.

Приклад 2. $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\sin^2 x + \sin x}$.

Підінтегральна функція непарна віднсно cos x,

$$R(\text{-}\cos x, \sin x) = \frac{(\text{-}\cos x)^3}{\sin^2 x + \sin x} = -\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x + \sin x} = -R(\cos x, \sin x),\ \text{тому}$$

підстановка: sinx = t, cosx dx = dt, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$.

$$\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\sin^2 x + \sin x} = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x\, dx}{\sin^2 x + \sin x} = \int \frac{(1-t^2)dt}{t^2 + t} = \int \frac{(1-t)(1+t)}{t(t+1)}dt =$$

$$= \int \frac{1-t}{t}dt = \int \frac{dt}{t} - \int dt = \ln|t| - t + C = \ln|\sin x| - \sin x + C.$$

Приклад 3. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int R(\sin x)dx$.

Підінтегральна функція парна відносно sin x.
Підстановка: $\mathrm{tg}\, x = t \;\Rightarrow\; x = \mathrm{arctg}\, t$,

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Відомо, що $\mathrm{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \;\Rightarrow\; \cos^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$;

$$\sin^2 x = \mathrm{tg}^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{(1+t^2)\left(1+\frac{t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{1+2t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\, \frac{t}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}(\sqrt{2}t) + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}x) + C.$$

2. $\int R(\mathrm{tg}x)dx$. Якщо підінтегральна функція залежить тільки від tg x, то використовують заміну: tg x = t $\Rightarrow$ x = arctg x, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, що приводить до інтеграла від раціональної функції:

$$\int R(\mathrm{tg}x)dx = \int R(t)\frac{dt}{1+t^2}.$$

3. Інтеграли вигляду $\int \sin^m x \cos^n x\, dx, \quad m, n \in Z.$

Розглянемо три випадки.

а) принаймні один з показників m чи n – непарне додатне число. Якщо n – непарне додатне число, то використовується підстановка sin x = t, а якщо m – непарне додатне число, – підстановка cos x = t.

Нехай n – непарне число, n = 2p + 1.

Тоді $\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int \sin^m x \cos^{2p+1} x\, dx = \int \sin^m x \cos^{2p} x \cdot \cos x\, dx =$

$= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^p \cos x\, dx.$

Виконаємо заміну: sin x = t, cos x dx = dt.

Отримаємо: $\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int t^m (1 - t^2)^p dt$ – інтеграл від раціональної функції нової змінної t;

б) обидва показники m і n – парні додатні числа

Покладемо m = 2p, n = 2q.

Використаємо відомі тригонометричні формули пониження степеня $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

Тоді

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int \sin^{2p} x \cos^{2q} x\, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^p \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^q dx.$$

Виконуючи піднесення до степеня і розкриваючи дужки, отримаємо члени, що утримують cos2x в непарних та парних степенях. Члени з непарними степенями інтегруються так, як вказано у випадку а). До парних степенів знову застосовуємо формули пониження степеня;

в) обидва показники m і n – парні, але хоча б один з них від'ємний.

Нехай m = 2p, n = – 2q (q > 0). Використовується підстановка tg x = t (або ctg x = t, якщо m < 0).

Приклад 4. $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx$.

$m = 2$, $n = 3$, маємо випадок а), виконуємо підстановку $\sin x = t$, $\cos x\, dx = dt$.

$$\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x\, dx = \int t^2 (1 - t^2) dt = \int t^2 dt -$$

$$- \int t^4 dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C.$$

Приклад 5. $\int \cos^4 x\, dx$.

$n = 4$ – парне число, використовуємо формулу пониження степеня

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

$$\int \cos^4 x\, dx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x +$$

$$+ \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{4} x +$$

$$+ \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{8} \int \cos 4x dx = \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin 4x +$$

$$+ C = \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.$$

Приклад 6. $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$.

$m = 2$, $n = 2$, маємо випадок б), використаємо тригонометричну формулу $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$,

$$\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \int (\sin x \cos x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C.$$

Приклад 7. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$, $m = 2$, $n = -6$ (випадок в),

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \cos^4 x} dx = ($$ використаємо тригонометричні

формули $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x,\ \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x) = \int \operatorname{tg}^2 x(1+\operatorname{tg}^2 x)^2\, dx$.

Підстановка: $\operatorname{tg} x = t \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Отже, $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int t^2 (1+t^2)\frac{dt}{1+t^2} = \int t^2(1+t^2)dt = \int t^2 dt + \int t^4 dt =$

$= \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + C.$

4. Інтеграли виду $\int \cos mx \cos nx\, dx, \int \sin mx \cos nx\, dx,$

$\int \sin mx \sin nx\, dx$ обчислюють, використовуючи формули:

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x),$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x),$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x).$$

Приклад 8. $\int \sin 3x \cos 7x\, dx = \frac{1}{2}\int (\sin 10x + \sin(-4x))dx =$

$= \frac{1}{2}\int \sin 10x dx - \frac{1}{2}\int \sin 4x dx = -\frac{1}{20}\cos 10x + \frac{1}{8}\cos 4x + C.$

§ 5. Інтегрування деяких ірраціональних функцій

Розглянемо деякі інтеграли від ірраціональних функцій, які за допомогою підстановок зводяться до раціональних функцій, що завжди інтегруються.

1. Інтеграли вигляду $\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, ..., x^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx,$

де R – раціональна функція своїх аргументів, зводяться до інтегралів від дробово-раціональних функцій підстановкою: $x = t^p$, $dx = pt^{p-1}dt$, де p – найменше спільне кратне чисел $n_1, ..., n_k$, т.б.
$p = НСК\{n_1, ..., n_k\}$.

Приклад 1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}dx$.

Під знаком інтеграла стоїть раціональна функція $R(x, x^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{2}{3}}, x^{\frac{1}{2}})$. Зробимо підстановку $x = t^p$,
де p = НСК{3, 3, 2} = НСК{3, 2} = 6. $x = t^6$, $dx = 6t^5dt$.

Маємо: $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}dx = \int \frac{6t^2 \cdot t^5dt}{t^4 - t^3} = 6\int \frac{t^7dt}{t^3(t-1)} = 6\int \frac{t^4dt}{t-1}$.

Виділимо цілу частину неправильного дробу $\dfrac{t^4}{t-1}$:

$$
\begin{array}{l|l}
-\,t^4 & t-1 \\
\underline{\;t^4 - t^3\;} & t^3 + t^2 + t + 1 \\
\qquad -\,t^3 & \\
\qquad \underline{\;t^3 - t^2\;} & \\
\qquad\qquad -\,t^2 & \\
\qquad\qquad \underline{\;t^2 - t\;} & \\
\qquad\qquad\qquad -\,t & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\;t-1\;} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 1 &
\end{array}
$$

$$\frac{t^4}{t-1} = t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1}.$$

Отримаємо:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}dx = 6\int (t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1})dt = 6\int t^3dt + 6\int t^2dt +$$

$$+ 6\int tdt + 6\int dt + 6\int \frac{dt}{t+Б1} = \frac{3}{2}t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 6t + 6\ln|t+1| + C =$$

$$= (x = t^6 \Rightarrow t = \sqrt[6]{x}) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x} + 1\right| + C.$$

2. Інтеграли вигляду $\displaystyle\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}} \right)dx$, де

R – раціональна функція своїх аргументів, зводяться до інтегралів від дробово-раціональних функцій підстановкою:

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^p, \text{ де } p = \text{НСК}\{n_1,..., n_k\}.$$

Знайдемо dx – ? $\frac{ax+b}{cx+d}=t^p$,

$$ax+b-t^p(cx+d)=0,$$

$$x(a-ct^p)=dt^p-b \Rightarrow x=\frac{dt^p-b}{a-ct^p},$$

$$dx=\left(\frac{dt^p-b}{a-ct^p}\right)'\cdot dt.$$

Приклад 2. $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}$.

Під знаком інтеграла стоїть раціональна функція $R\left(x,\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$

Виконаємо підстановку $\frac{1-x}{1+x}=t^2 \Rightarrow 1-x=t^2+t^2x$, $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$,

$$dx=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)'dt=\frac{(1-t^2)'(1+t^2)-(1+t^2)'(1-t^2)}{(1+t^2)^2}dt=$$

$$=\frac{-2t(1+t^2)-2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}dt=-\frac{4tdt}{(1+t^2)^2}.$$

Маємо: $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}=\int t\cdot\frac{1+t^2}{1-t^2}\left(-\frac{4t}{(1+t^2)^2}\right)dt=-4\int\frac{t^2dt}{(1-t^2)(1+t^2)}.$

Щоб обчислити останній інтеграл, необхідно правильний дріб $\frac{t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}$ розкласти на суму елементарних дробів (спробуйте виконати це самостійно). А можна виконати перетворення, що набагато спрощують обчислення, а саме:

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}=-4\int\frac{t^2dt}{(1-t^2)(1+t^2)}=-2\int\frac{(t^2-1)+(1+t^2)}{(1-t^2)(1+t^2)}dt=2\int\frac{dt}{1+t^2}+$$

$$+2\int\frac{dt}{t^2-1}=2\text{arctg}\,t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=2\text{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1}\right|+C=$$

$$=2\text{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right|+C.$$

3. Інтеграли вигляду $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$, $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$, $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$ зводять до інтегралів від раціональних функцій відносно sin x, cos x за допомогою певних тригонометричних підставок.

Тип інтеграла:	Підстановка:
а) $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$	$x=a\sin t\ (\text{ааб } x=a\cos t)$, $dx=a\cos t\,dt$, $a^2-x^2=a^2-a^2\sin^2t=a^2(1-\sin^2t)=a^2\cos^2t.$
б) $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$	$x=a\,\text{tg}t\ (\text{ааб } x=a\,\text{ctg}\,t)$, $dx=\frac{a}{\cos^2t}dt$, $a^2+x^2=a^2+a^2\text{tg}^2t=a^2(1+\text{tg}^2t)=\frac{a^2}{\cos^2t}.$
в) $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$	$x=\frac{a}{\cos t}\ (\text{ааб } x=\frac{a}{\sin t})$, $dx=\frac{a\sin t}{\cos^2t}dt=\frac{a\,\text{tg}t}{\cos t}dt$, $x^2-a^2=\frac{a^2}{\cos^2t}-a^2=a^2(\frac{1}{\cos^2t}-1)=a^2\text{tg}^2t.$

Приклад 3. $\int\sqrt{4-x^2}dx$.

Маємо інтеграл типу $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$, де a = 2, тому виконуємо підстановку: x = 2 sin t, dx = 2 cos t dt, 4 $-x^2$= 4$\cos^2$t.

$$\int \sqrt{4-x^2}dx = \int 2\cos t \cdot 2\cos t\,dt = 4\int \cos^2 t\,dt = 4\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$= 2\int dt + 2\int \cos 2t dt = 2t + \sin 2t + C = \Bigg(x = 2\sin t \Rightarrow t = \arcsin\frac{x}{2},$$

виразимо sin 2t через sin t, $\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}$,

$$\sin 2t = 2\cdot\frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}\Bigg) = 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C.$$

Приклад 4. $\int \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}$.

Маємо інтеграл типу $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx$, де a = 5, тому виконуємо підстановку: $x = 5\operatorname{tg} t$, $dx = \frac{5}{\cos^2 t}dt$, $25 + x^2 = \frac{25}{\cos^2 t}$

$$\int \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}} = \int \frac{5dt}{\cos^2 t\cdot\frac{25}{\cos^2 t}\cdot\frac{5}{\cos t}} = \frac{1}{25}\int \cos t dt = \frac{1}{25}\sin t + C.$$

Для того, щоб повернутись до початкової змінної x, знайдемо sint через x. $x = 5\operatorname{tg} t \Rightarrow \operatorname{tg} t = \frac{x}{5}$,

$$\sin t = \operatorname{tg} t\cdot\cos t = \operatorname{tg} t\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} = \frac{x}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{25}}} = \frac{x}{\sqrt{25+x^2}}.$$

Отримаємо: $\int \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}} = \frac{1}{25}\cdot\frac{x}{\sqrt{25+x^2}} + C.$

Приклад 5. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$

Маємо інтеграл типу $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$, де a = 1, тому виконуємо підстановку: $x=\frac{1}{\cos t}$, $dx=\frac{\mathrm{tg}\,t}{\cos t}dt$, $x^2-1=\mathrm{tg}^2 t$

$$\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx=\int\frac{\mathrm{tg}\,t\cdot\mathrm{tg}\,t\,dt}{\frac{1}{\cos^4 t}\cdot\cos t}=\int\sin^2 t\cos t\,dx=\int\sin^2 t d(\sin t)==\frac{\sin^3 t}{3}+C;$$

$$\sin^2 t=1-\cos^2 t=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2},\quad \sin t=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x},$$

$$x=\frac{1}{\cos t}\Rightarrow\cos t=\frac{1}{x},$$

$$\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx=\frac{\sin^3 t}{3}+C=\frac{x^2-1}{3x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C=\frac{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}{3x^3}+C.$$

4. Інтеграли вигляду $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$,

де R – раціональна функція двох аргументів зводяться до інтегралів вище розглянутих типів а), б), в) шляхом виділення повного квадрату у квадратному тричлені і виконанням заміни:

$$U=x+\frac{b}{2a}.$$

Приклад 6. $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+9)^3}}$.

Маємо інтеграл $\int R(x,\sqrt{x^2+4x+9})dx$, виділимо повний квадрат у квадратному тричлені:

$$x^2+4x+9=x^2+2\cdot 2x+4+9-4=(x+2)^2+(\sqrt{5})^2.$$

Отримали:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+9)^3}}=\int\frac{dx}{\sqrt{((x+2)^2+(\sqrt{5})^2)^3}}=\begin{vmatrix}x+2=u\\ dx=du\end{vmatrix}=$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{(u^2+5)^3}} = \int R(u, \sqrt{(\sqrt{5})^2 + u^2})du = \left| \begin{array}{c} u = \sqrt{5}\,\mathrm{tg}t \\ du = \dfrac{\sqrt{5}}{\cos^2 t}dt \\ 5 + u^2 = \dfrac{5}{\cos^2 t} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\sqrt{5}dt}{\cos^2 t\sqrt{\left(\dfrac{5}{\cos^2 t}\right)^3}} = \frac{1}{5}\int \cos t dt = \frac{1}{5}\sin t + C =$$

$$= \left(\begin{array}{c} u = \sqrt{5}\,\mathrm{tg}t \Rightarrow \mathrm{tg}t = \dfrac{u}{\sqrt{5}} \\ \sin t = \dfrac{\mathrm{tg}t}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}} = \dfrac{u}{\sqrt{5+u^2}} \end{array} \right) = \frac{1}{5}\cdot\frac{u}{\sqrt{5+u^2}} + C =$$

$$= \frac{x+2}{5\sqrt{5+(x+2)^2}} + C = \frac{x+2}{5\sqrt{x^2+4x+9}} + C.$$

Тема II. **Визначений інтеграл та його застосування**

§ 1. Визначений інтеграл як границя суми та його властивості.

Розглянемо на відрізку [a, b] деяку неперервну функцію $y = f(x)$. Розіб'ємо відрізок [a, b] довільним чином на n частин точками: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$, де $x_0, x_1, \ldots, x_n$ – точки розбиття. Довжину кожного часткового відрізка будемо позначати через Δx_i: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. У кожному частковому відрізку виберемо довільну точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ та обчислимо $f(\xi_i)$ – значення функції f(x) в цій точці. Для даного розбиття складемо суму:

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_i)\Delta x_i + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad (1)$$

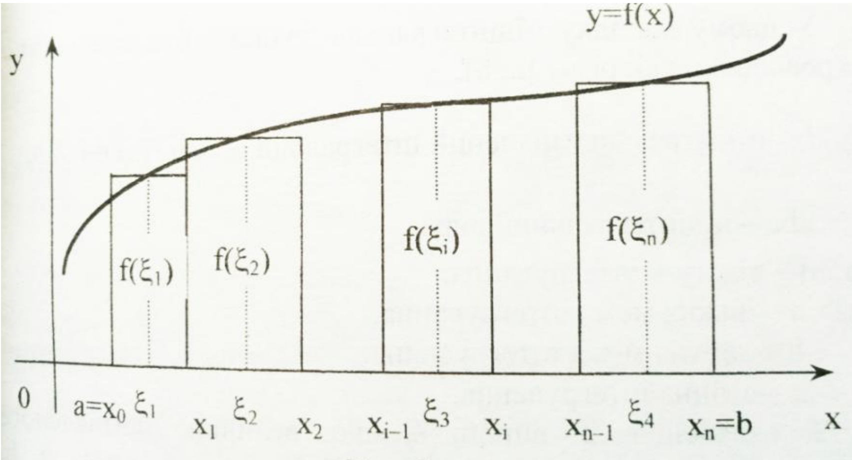


Рис. 1

<u>Означення 1.</u> Сума $S_n(1)$ називається інтегральною сумою функцій f(x) на [a, b].

Геометрично сума $S_n(1)$ являє собою алгебраїчну суму площ прямокутників з основами $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ та висотами $f(\xi_1), f(\xi_2), ..., f(\xi_n),$ якщо $f(x) \geq 0$ (рис. 1).

Сума (1) залежить від способу розбиття відрізка [a, b] на відрізки $[x_{i-1}, x_i]$ і від вибору точок ξ_i. Якщо змінювати розбиття [a, b] і спосіб вибору точок ξ_i, то будемо отримувати нове значення суми S_n, т.б. отримаємо числову послідовність інтегральних сум: $\{S_n\}$.

Позначимо через λ довжину найбільшого часткового відрізка розбиття: $\lambda = \max\limits_{1\leq i\leq n} \Delta x_i$. Будемо розглядати такі розбиття, де $\lambda \to 0$ (при цьому число відрізків n необмежено зростає $(n \to \infty)$).

<u>Означення 2.</u> Визначеним інтегралом функції f(x) на відрізку [a, b] називається скінченна границя інтегральної суми S_n за умови, що довжина найбільшого часткового відрізка прямує до нуля ($\lambda = \max \Delta x_i \to 0$), яка не залежить від способу розбиття та вибору точок ξ_i і позначається

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} S_n = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (2)$$

В цьому випадку підінтегральна функція f(x) називається інтегрованою на відрізку [a, b].

$\int_a^b f(x)dx$ читається: «визначений інтеграл від a до b f(x) на dx»,

де $f(x)dx$ – підінтегральний вираз,

[a, b] – відрізок інтегрування,

число a – нижня межа інтегрування,

b – верхня межа інтегрування,

x – змінна інтегрування.

З означення 2 випливає, що величина визначеного інтеграла залежить тільки від функції f(x) та від чисел a, b. Введення поняття визначеного інтеграла і дослідження області його застосування належить видатному німецькому математику Б. Ріману, тому границю (2) ще називають визначеним інтегралом Рімана, а функцію f(x), для якої ця границя існує, – інтегровною за Ріманом.

Теорема 1. (про існування визначеного інтеграла). Якщо функція y = f(x) неперервна на відрізку [a, b], то вона інтегровна на [a, b], тобто границя інтегрально суми (2) існує і не залежить від способу розбиття [a, b] на часткові відрізки Δx_i і вибору точок ξ_i.

Зауваження. Якщо y = f(x) – функція, що має скінченне число точок розриву, то така функція може бути інтегровною на [a, b], а може і не бути. Т.б. умова неперервності f(x) є достатньою, але не необхідною.

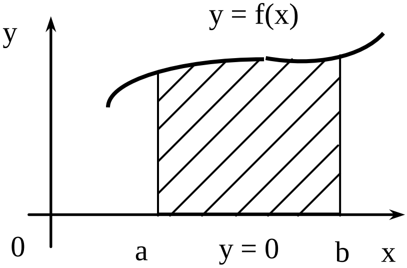


Рис. 2

З’ясуємо геометричний зміст визначеного інтеграла. Якщо f(x) ≥ 0, $x \in [a, b]$, то визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ чисельно дорівнює площі криво-лінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, віссю $0x$ та прямими $x = a$, $x = b$:

$$S = \int_a^b f(x)dx \text{ (рис. 2)}$$

Зауваження. Визначений інтеграл не залежить від змінної інтегрування. Тому, не змінюючи величини інтеграла, можна змінити позначення змінної інтегрування, т.б. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz = \ldots$ Дійсно, з геометричної точки зору записані визначені інтеграли дорівнюють одній площі.

Інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ був введений для випадку, коли $a < b$. Узагальнимо поняття визначеного інтеграла на випадки, коли $a>b$ та $a = b$. За означенням 2 маємо

якщо $a > b$, то $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$ (3)

якщо $a = b$, то $\int_a^a f(x)dx = 0.$ (4)

Основні властивості визначеного інтеграла.

1. Постійний множник можна винести за знак визначеного інтеграла: якщо $A = const$, то

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx \, . \tag{5}$$

$\int_a^b Af(x)dx =$ (за означенням 2) $= \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} Af(\xi_i)\Delta x_i =$

$$= \lim_{\lambda \to 0} A\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = A\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = A\int_a^b f(x)dx \quad \blacksquare$$

2. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми декількох функцій дорівнює алгебраїчній сумі їх інтегралів. Так, у випадку двох доданків.

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \qquad (6)$$

$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx =$ (за означенням 2) $=$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} [f_1(\xi_i) \pm f_2(\xi_i)]\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} [\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i \pm \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i] = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \quad \blacksquare$$

3. Якщо всюди на відрізку [a, b], де a < b функція f(x) ≥ 0, то $\int_a^b f(x)dx \ge 0$. Доведення очевидно.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda = 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Якщо для $\forall x \in [a, b]$ $f(x) \ge 0$, то $f(\xi_i) \ge 0$.

З умови $a < b \Rightarrow \Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0 \quad (i = 1,\ 2 \ldots,\ n)$.

Отже, $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ge 0$. Переходячи до границі (при $\lambda \to 0$) інтегральної суми, дістаємо $\int_a^b f(x)dx \ge 0$ $\blacksquare$

4. Якщо всюди на відрізку [a, b], де a < b функції f(x) та $\varphi(x)$ задовільняють умові $f(x) \le \varphi(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx \qquad (7)$$

За умовою

$$f(x) \le \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) - f(x) \ge 0 \Rightarrow \int_a^b [\varphi(x) - f(x)]dx \ge 0$$

(за властивістю 3), $\int_a^b [\varphi(x) - f(x)]dx \geq 0 =$ (за властивістю 2) =

$$= \int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b f(x)dx.$$

Отже, $\int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx.$ ■

Проілюструємо властивість 4 геометрично для випадку, коли f(x) > 0 та $\varphi(x) > 0$. Якщо $f(x) \leq \varphi(x)$, $\forall x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$, тобто площа криволінійної трапеції aA_1B_1b не перевищує площі криволінійної трапеції aA_2B_2b (рис. 3)

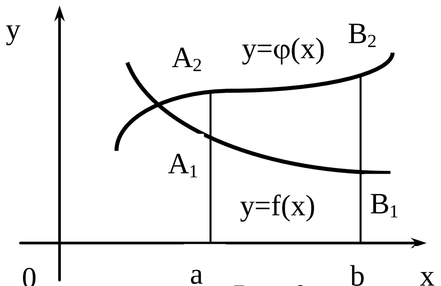


Рис. 3

$$(S_1 = \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx = S_2).$$

5. Оцінка визначеного інтеграла: якщо m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції y = f(x) на відрізку [a,b], де a < b, то

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a). \qquad (8)$$

За умовою, для $\forall x \in [a, b]$ маємо $m \leq f(x) \leq M.$

Тоді, за властивістю 4 $\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx,$

застосуємо властивість 1 $m\int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\int_a^b dx.$

Розглянемо $\int_a^b dx$ = (за означенням 2) =

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = b - a,$$

$f(\xi_i) = 1$ тому, що підінтегральна функція f(x) = 1. Враховуючи те, що $\int_a^b dx = b - a,$ отримуємо нерівності

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \quad ■$$

6. Теорема про середнє: якщо функція y = f(x) неперервна на відрізку [a, b], то
на цьому відрізку існує точка $\xi \in [a, b]$ така, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \qquad (9)$$

Функція f(x) неперервна на відрізку [a, b] – це означає, що вона досягає на цьому відрізку найменшого і найбільшого значень, т.б. $\exists$ числа m, M такі, що

$$m \le f(x) \le M, \qquad (\forall x \in [a, b])$$

За властивістю 5 маємо:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a), \quad \text{де} \quad b - a > 0$$

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

Позначимо $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu, \quad m \le \mu \le M$.

Функція f(x) неперервна на [a, b], тому вона приймає всі значення інтервалу [m, M], т.б. існує така точка $\xi \in [a, b]$, що $f(\xi) = \mu$.

Тоді $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\xi) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ ■

Значення $f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$ називається середнім значенням функції y = f(x) на відрізку [a, b].

Проілюструємо властивості 5, 6 геометрично для випадку, коли $f(x) \geq 0$ (рис. 4).

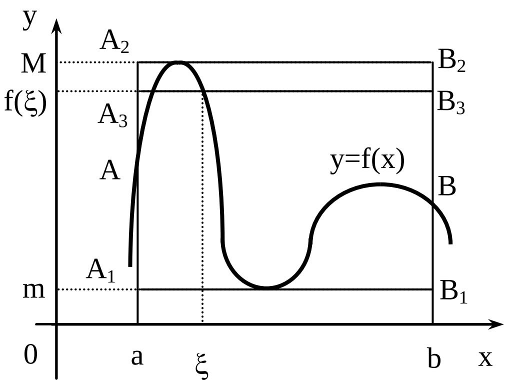


Рис. 4

Геометричний зміст власти-вості 5: $\int\limits_a^b f(x)dx$ є площа криволінійної трапеції aABb, обмеженої графіком функції y=f(x), віссю Ox, прямими x=a, x = b, яка заключена між площами прямокутників з основою b – a та висотами відповідно m і M:

$$S_{aA_1B_1b} \leq S_{aABb} \leq S_{aA_2B_2b}.$$

Геометричний зміст властивості 6: $\int\limits_a^b f(x)dx$ є площа криволінійної трапеції S_{aABb}, а $f(\xi)(b-a)$ є площа прямокутника з основою b – a і висотою $f(\xi)$, т.б. $S_{aA_3B_3b}$.

Рівність $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ означає, що $S_{aABb} = S_{aA_3B_3b}$.

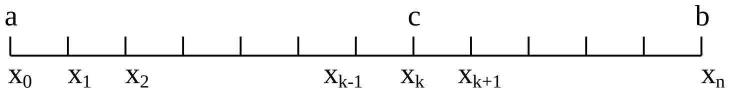
7. Якщо для функції y = f(x) існують інтеграли $\int\limits_a^b f(x)dx$, $\int\limits_a^c f(x)dx$, $\int\limits_c^b f(x)dx$, де a, b, c – довільні числа, то має місце рівність

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx, \qquad (10)$$

Розглянемо випадок, коли c міститься між a та b: a < c < b. За умовою, для функції f(x) існує інтеграл

$$\int_a^b f(x) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i .$$

Враховуючи той факт, що границя інтегральної суми існує і не залежить від способу розбиття відрізку [a, b] та вибору точок ξ_i, розіб’ємо [a, b] на частини таким чином, щоб точка c була точкою розбиття (рис. 5)



$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k = c < x_{k+1} < \ldots < x_n = b$$

Тоді сума $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$, що відповідає відрізку [a, b], складається з двох сум:

суми $\sum\limits_{i=1}^{k} f(\xi_i) \Delta x_i$, що відповідає відрізку [a, c] і

суми $\sum\limits_{i=k+1}^{k} f(\xi_i) \Delta x_i$, що відповідає відрізку [c, b]

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} f\left(\xi_i\right) \Delta x_i + \sum_{i=k+1}^{n} f\left(\xi_i\right) \Delta x_i \qquad (11)$$

За умовою, функція f(x) на відрізках [a, c] і [c, b] інтегровна

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^c f(x) dx, \qquad \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=k+1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_c^b f(x) dx .$$

Тому перейдемо в рівності (11) до границі при $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$.

Отримаємо: $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \lim\limits_{\lambda \to 0} (\sum\limits_{i=1}^{k} f(\xi_i) \Delta x_i + \sum\limits_{i=k+1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i)$,

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i) \Delta x_i + \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=k+1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i ,$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Розглянемо випадок, коли c не міститься між a та b. Нехай a < b < c. Тоді за доведеним маємо:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx .$$

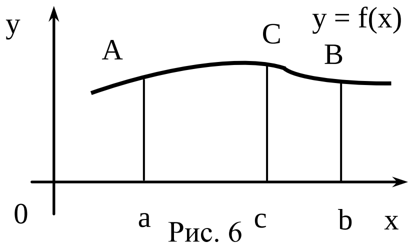


Рис. 6

Використовуючи формулу (3), отримаємо:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Проілюструємо властивість 7 геометрично для випадку, коли f(x) > 0 і a < c < b (рис. 6).

Площа криволінійної трапеції aABb дорівнює сумі площ криволінійних трапецій aACc і cCBb: $S_{aABb} = S_{aACc} + S_{cCBb}$.

Приклад 1. Оцінити інтеграл $\int_0^4 \frac{x-1}{x+1}dx$.

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}, \qquad x \in [0;\ 4]$$

Знайдемо найбільше і найменше значення f(x) на відрізку [0; 4].

$$f'(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{2}{(x+1)^2}, \qquad f'(x) \neq 0 \text{ (стаціонарних точок немає)}$$

f′(x) > 0, отже функція зростаюча і приймає найменьше і найбільше значення на кінцях відрізка [0; 4]

$$m = \min_{[0;\ 4]} f(x) = f(0) = -1, \qquad M = \max_{[0;\ 4]} f(x) = f(4) = \frac{3}{5} .$$

Для функції f(x) виконується нерівність

$$-1 \le f(x) \le \frac{3}{5} \qquad \underset{a=0,\, b=4}{(x \in [0;\, 4])}$$

За формулою (8) маємо

$$-1 \cdot 4 \le \int_0^4 f(x)dx \le \frac{3}{5} \cdot 4$$

$$-4 \le \int_0^4 \frac{x-1}{x+1}dx \le \frac{12}{5} \ .$$

Приклад 2. Не обчислюючи, встановити, який із інтегралів більший $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$ чи $\int_0^1 x\,dx$.

Використаємо властивість 4. На відрізку [0; 1] порівняємо підінтегральні функції f(x) = x та $\varphi(x) = \sqrt{1+x^2}$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = |x|, \\ \text{при } x \in [0;1] \quad |x| = x \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) < \varphi(x), \text{ тоді за формулою (7)}$$

$$\int_0^1 x\,dx < \int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx \,.$$

Обчислення визначеного інтеграла за означенням 2 є здебільшого складним та невкладистим. Існує взаємозв’язок між визначеним та невизначеним інтегралами, про який піде мова в наступному параграфі.

§ 2. Обчислення визначеного інтегарла.
Формула Ньютона-Лейбніца.
Похідна від інтеграла по змінній верхній межі.

Розглянемо визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$. Нижню межу інтегрування – a зафіксуємо, а верхню межу – b будемо вважати змінною і позначимо через x. Тоді буде змінюватися і величина інтеграла, тобто інтеграл зі змінною верхньою межею є функція від своєї верхньої межі x. Позначимо цю функцію Ф(x):

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (a = \text{const})$$

Виходячи з того, що величина визначеного інтеграла не залежить від змінної інтегрування x замінили через t, адже змінною x вже позначено верхню межу інтегрування.

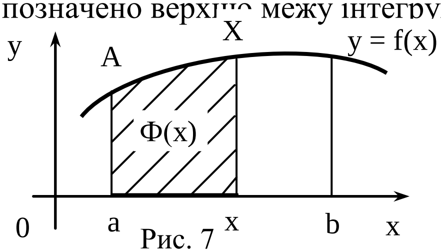


Рис. 7

Якщо f(x) > 0, то геометрично величина Ф(x) дорівнює площі криволінійної трапеції aAXx (рис. 7), яка змінюється в залежність від зміни x. Функція Ф(x) зростаюча (з збільшенням x збільшується S_{aAXx}).

Теорема 1. Якщо функція y = f(x) неперервна на відрізку [a,b], то визначений інтеграл із змінною верхньою межею

$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ є первісною для функції f(x), т.б. $\Phi'(x) = f(x)$.

Доведемо, що похідна функції Ф(x) існує і дорівнює значенню підінтегральної функції в верхній межі інтегрування

$$\Phi'(x) = f(x)$$

$\Phi'(x)$ = (за означенням похідної) = $\lim\limits_{\Delta x \neq 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x}$, тому

1) надамо $\forall x \in [a, b]$ приріст $\Delta x \neq 0$ $(x + \Delta x \in [a, b])$;

2) приріст функції $\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$

= (за властивістю 7) $= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$

$\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$ За умовою функція f(x) неперервна на [a, b], а тому f(x) неперервна на $[x, x + \Delta x] \subset [a, b]$. Застосуємо теорему про середнє (властивість 6):

$$\Delta\Phi = f(\xi)(x + \Delta x - x) = f(\xi)\Delta x, \text{ де } \xi \in [x, x + \Delta x];$$

3) знайдемо відношення приросту функції до приросту аргумента

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = f(\xi);$$

4) $\Phi'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\xi) = (\text{якщо}\, \Delta x \to 0, \text{то}\, \xi \to x) =$

$= \lim\limits_{\xi \to x} f(\xi) =$ (в наслідок неперервності f(x)) = f(x). Отримали

$$\Phi'(x) = f(x)$$

Функція $\Delta\Phi = \int\limits_a^x f(t)dt$ є первісною для функції f(x). ■

Очевидно, що між невизначеним і визначеним інтегралами існує взаємозв'язок:

$$\int f(x)dx = \int\limits_a^x f(t)dt + C, \qquad \text{де} \quad C = \text{const}$$

Проілюструємо геометрично теорему 1 (рис. 8). Якщо аргументу x надати приросту △x, то приріст функції $\Delta\Phi = f(\xi)\Delta x$ дорівнює площі криволінійної трапеції з основою △x, а похідна $\Phi(x) = f(x)$ дорівнює довжині відрізка xX.

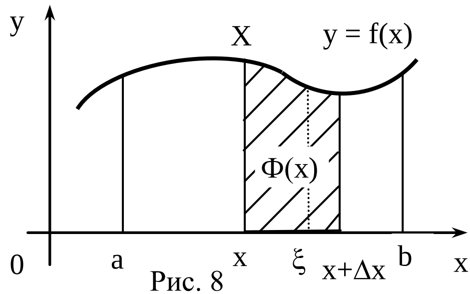


Рис. 8

<u>Зауваження.</u> Теорема 1 поширюється на випадок, коли визначений інтеграл із змінною нижньою межею: $\Phi(x) = \int\limits_x^b f(t)dt =$ (за формулою 3)

$$= -\int\limits_b^x f(x)dt.$$

Очевидно, $\Phi(x) = -f(x)$.

Приклад 1. Знайти похідні функцій:

$$а)\int_x^0 \sqrt{1+t^4}\,dt; \quad б)\int_x^{x^2} \sin t^2 dt.$$

$$а)\ \Phi(x)=\int_x^0 \sqrt{1+t^4}\,dt=-\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt,$$

функція $f(x)=\sqrt{1+x^4}$ неперервна, використаємо теорему 1 про похідну від інтеграла по змінній верхній межі:

$$\Phi'(x)=\left(-\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt\right)'=-\sqrt{1+x^4}\,.$$

$$б)\ \Phi(x)=\int_x^{x^2} \sin t^2 dt=(\text{за формулою}10)=\int_x^c \sin t^2 dt+\int_c^{x^2} \sin t^2 dt=$$

$$=(\text{за формулою}3)=-\int_c^x \sin t^2 dt+\int_c^{x^2} \sin t^2 dt, \quad \text{де}\ \ x\le c\le x^2,$$

функція $f(x)=\sin x^2$ неперервна, скориставшись теоремою 1, отримаємо: $\Phi'(x)=(-\int_c^x \sin t^2 dt)'+(\int_c^{x^2} \sin t^2 dt)'=-\sin x^2+\sin(x^2)^2\times$

$$\times(x^2)'=2x\sin x^4-\sin x^2.$$

<u>Формула Ньютона-Лейбніца.</u>

Теорема 2. Якщо F(x) – деяка первісна неперервної на [a, b] функції f(x), то справедлива рівність

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$$

яка називається формулою Ньютона-Лейбніца, ($\Big|_a^b$ – знак подвійної підстановки).

Нехай F(x) – деяка первісна функції f(x). За теоремою 1 функція $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ також первісна функції f(x). Якщо Ф(x) та F(x) – дві первісні функції f(x) на [a, b], то різниця між ними дорівнює сталому числу, тобто

$$\Phi(x) - F(x) = C, \qquad x \in [a, b]$$

$$\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) + C.$$

Визначимо константу C. Покладемо x = a, тоді $\Phi(x)=\int\limits_a^a f(t)dt$ = = (за формулою 4) = 0, 0 = F(a) + C $\Rightarrow$ C = -F(a).

$$\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) - F(a), \qquad \forall x \in [a, b].$$

Покладемо x = b, отримаємо

$$\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \quad \blacksquare$$

Формула Ньютона-Лейбніца є основною формулою інтегрального числення. Вона зводить обчислення визначеного інтеграла від неперервної функції f(x) до знаходження довільної первісної F(x) для даної функції f(x), тобто до обчислення невизначеного інтеграла $\int f(x)dx$.

Таким чином, формула Ньютона-Лейбніца, по-перше, встановлює зв'язок між визначеним та невизначеним інтегралами, по-друге, вказує простий спосіб обчислення визначених інтегралів.

Приклади.

1. $\int\limits_a^b x^{\alpha}dx = \left.\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_a^b = \dfrac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \qquad (\alpha \neq -1)$

2. $\int\limits_0^1 \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1+x^2) = \left.\sqrt{1+x^2}\right|_0^1 = \sqrt{2}-1$

3. $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos \pi) = -2.$

4. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^{1} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{2}.$

Корисно запам'ятати правило:

якщо функція f(x) – непарна, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0,$

якщо функція f(x) – парна, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx.$

Так, у прикладі 4 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ – парна, та межі інтегрування протилежні тому

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = 2\operatorname{arctg} x \Big|_{0}^{1} = 2(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

§ 3. Заміна змінної у визначеному інтегралі.

Нехай необхідно обчислити визначений інтеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ від неперервної функції f(x). Виконаємо заміну x = φ(t).

Якщо виконуються умови:

1) φ(t) і φ′(t) неперервні на відрізку $\alpha \le t \le \beta$;
2) φ(α) = a, φ(β) = b;
3) f(φ(t)) неперервна на [α, β],

то справедлива формула

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

З умови неперервності функцій f(x), φ(t), φ′(t) випливає неперервність підінтегральних функцій f(x) та f(φ(t)) φ′(t), тому існують не тільки визначені інтеграли, а й відповідні невизначені інтеграли: якщо F(x) – довільна первісна функції f(x)

$$\int f(x) = F(x) + C,$$

то функція $\Phi(x) = F(\varphi(t))$ буде первісною для функції $f(\varphi(t))\ \varphi'(t)$

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(t) = F(\varphi(t)).$$

Легко перевірити останню рівність диференціюванням обох частин за t $(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt)' =$(за 1 властивістю невизначеного інтеграла) = $f(\varphi(t))\varphi'(t)$

$\Phi'(x) = (F(\varphi(t)))' =$ (за правилом диференціюванням складної фун-кції) $= F'(\varphi(t))\ \varphi'(t) = f(\varphi(t))\ \varphi'(t)$,

$f(\varphi(t))\ \varphi'(t) = f(\varphi(t))\ \varphi'(t)$.

За формулою Ньютона-Лейбніца

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \\ \displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ – формула заміни змінної або підстановки в визначеному інтегралі.

<u>Зауваження.</u> При обчисленні визначеного інтеграла методом заміни змінної не повертаються до старої змінної, як у випадку обчислення невизначеного інтеграла. Якщо обчислено визначений інтеграл правої частини отриманої рівності, який дорівнює деякому числу, то обчислено і визначений інтеграл лівої частини.

Приклади.

$$1. \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}dx = \left| \begin{array}{ll} x = R\sin t, & t = \arcsin\dfrac{x}{R} \\ dx = R\cos t dt, & t_1 = \arcsin 0 = 0 \\ & t_2 = \arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2-R^2\sin^2 t}\,R\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^2\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|\cos t\,dt=$$

$$=\left|\begin{array}{l}|\cos t|=\cos t,\\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}\end{array}\right|=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{R^2}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\,dt\right)=$$

$$=\frac{R^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi-0-\frac{1}{2}\sin 0\right)=\frac{\pi R^2}{4}.$$

Геометрично $\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx=$

$=\frac{1}{4}S_{\text{круга}\,x^2+y^2=R^2}$ (рис. 9).

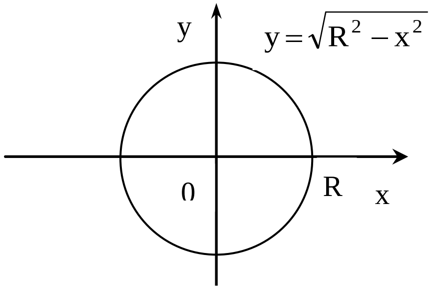


Рис. 9

$$2.\ \int_1^{e^3}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}=\left|\begin{array}{ll}1+\ln x=t, & t_1=1+\ln 1=1,\\ d(1+\ln x)=dt, & t_2=1+\ln e^3=\\ \frac{dx}{x}=dt, & =1+3\ln e=4\end{array}\right|=\int_1^4\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}\Big|_1^4=$$

$$=2(\sqrt{4}-\sqrt{1})=2$$

§ 4. Інтегрування частинами.

Якщо функції $u=u(x)$, $v=v(x)$ і їх похідні $u'(x)$, $v'(x)$ неперервні на відрізку $[a,\ b]$, то $\int_a^b u\,dv=uv\big|_a^b-\int_a^b v\,du$ – формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла.

Приклад.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = \left| \begin{array}{c} u = x \\ dv = \cos x dx \\ du = dx \\ v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| = uv\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} v du = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

§ 5. Наближене обчислення визначених інтегралів.

Нехай необхідно обчислити визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, де f(x) – неперервна функція на відрізку [a, b]. Можна знайти точне значення інтеграла, використовуючи формулу Ньютона-Лейбніца за допомогою первісної F(x) для підінтегральної функції f(x). Однак не для кожної неперервної функції первісна виражається у скінченному вигляді (через елементарні функції). До таких функцій належать, наприклад,

$$\frac{\sin x}{x}, \quad \frac{1}{\ln x}, \quad e^{-x^2}, \quad \sqrt{1+x^3}, \quad \sqrt{\sin x}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}.$$

В таких випадках знаходять наближене значення визначеного інтеграла. За означенням 2

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Тому наближене значення шукають у вигляді інтегральної суми

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Користуються правилом:

1) ділять відрізок [a, b] на n рівних частин точками $a = x_0 <$ $< x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ і знаходять довжину кожного відрізка $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$;

2) обчислюють значення підінтегральної функції $y = f(x)$ в точках поділу $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, ..., $y_n = f(x_n)$;

3) використовують одну з наближених формул.

<u>Формула прямокутників.</u>

Скористаємося правилом 1), 2) і складемо суми:

$$y_0\Delta x + y_1\Delta x + \ldots + y_{n-1}\Delta x = \Delta x(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i),$$

$$y_1\Delta x + y_2\Delta x + \ldots + y_n\Delta x = \Delta x(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Тоді

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) = \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}) \qquad (1)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) \qquad (2)$$

Геометричний зміст:

якщо $f(x)$ – неперервна функція на $[a, b]$ та $f(x) > 0$, то формули (1), (2) виражають площі фігур складених з прямокутників, що зображені відповідно на рис. 10, 11.

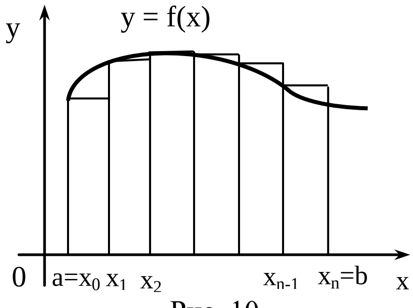


Рис. 10

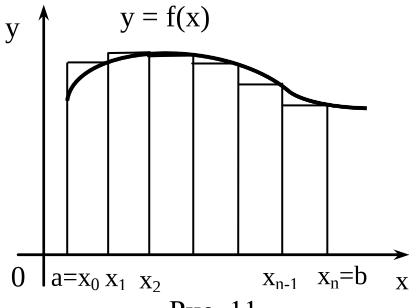


Рис. 11

<u>Формула трапецій.</u>

Скористаємося правилом 1), 2). Криву $y = f(x)$ замінимо ламаною $AA_1A_2 \ldots A_{n-1}B$ (рис. 12). Тоді, площа криволінійної трапеції aABb заміниться сумою площ S трапецій з основами $y_i=f(x_i)$ та висотами $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Площа першої трапеції $S_1 = \frac{y_0 + y_1}{2} \cdot \Delta x,$

$$S_2 = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot \Delta x,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_n = \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \cdot \Delta x$$

$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n = \frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1 + y_2}{2}\Delta x + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\Delta x = \Delta x \times$$

$$\times\left(\frac{y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n}{2}\right) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right)$$

Тоді

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right) \text{ – формула трапецій.}$$

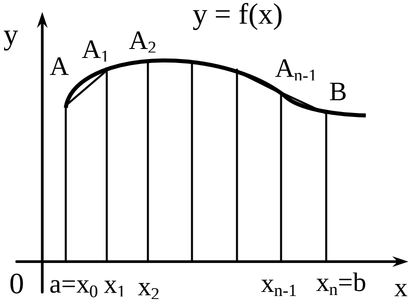


Рис. 12

<u>Формула парабол</u> (формула Сімпсона)

Знайдемо площу криволінійної трапеції, яка обмежена параболою, що проходить через три точки: $M(x_0, y_0)$, $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, і має вісь паралельну осі 0у. Таку криволінійну трапецію називають параболічною трапецією.

Рівняння параболи з віссю паралельною осі 0у має вид

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

<u>Лема.</u> Якщо криволінійна трапеція обмежена параболою

$$y = Ax^2 + Bx + C,$$

віссю 0х і прямими $x = -h$, $x = h$, то її площа дорівнює

$$S=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$$

Площу параболічної трапеції – hM_0M_2h (рис. 13) знайдемо за допомогою визначеного інтеграла

$$S=\int\limits_{-h}^{h}(Ax^2+Bx+C)dx=\left(\frac{Ax^3}{3}+\frac{Bx^2}{2}+Cx\right)\Bigg|_{-h}^{h}=\frac{Ah^3}{3}+\frac{Bh^2}{2}+Ch-$$

$$-\left(-\frac{Ah^3}{3}+\frac{Bh^2}{2}-Ch\right)=\frac{2Ah^3}{3}+2Ch=\frac{h}{3}(2Ah^2+6C).$$

Знайдемо коефіцієнти A, C.

$$\left.\begin{array}{llll} \text{якщо} & x_0=-h, & \text{то} & y_0=Ah^2-Bh+C, \\ \text{якщо} & x_1=0, & \text{то} & y_1=C, \\ \text{якщо} & x_2=h, & \text{то} & y_2=Ah^2+Bh+C \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} C=y_1, \\ y_0+y_2=2Ah^2+2C, \\ y_2=Ah^2+Bh+C. \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} C=y_1, \\ A=\dfrac{y_0+y_2-2y_1}{2h^2}, \\ y_2=Ah^2+Bh+C. \end{cases}$$

Тоді $\quad S=\dfrac{h}{3}(2Ah^2+6C)=$

$$=\frac{h}{3}\left(\frac{y_0+y_2-2y_1}{2h^2}\cdot 2h^2+6y_1\right)=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)\quad\blacksquare$$

Нехай необхідно обчислити інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, де f(x) – неперервна функція на [a, b]. Розіб’ємо відрізок [a, b] на парне число n = 2m рівних частин точками $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<\ <x_{n-1}=x_{2m-1}<$ $<x_n=x_{2m}=b_i$ знаходимо довжину кожного часткового відрізка $\Delta x=\dfrac{b-a}{2m}$. На кожному з відрізків $[x_0,\ x_2]$, $[x_2,\ x_4]$, ..., $[x_{n-2},\ x_n]$ будуємо параболи, що проходять через точки (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_{0n}), і мають вісь паралельну осі 0у (рис. 14). Тоді замінимо площу криволінійної фігури сумою площ

параболічних трапецій.

$$\int_{a=x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2), \qquad (\Delta x = h)$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

....

$$\int_{x_{2m-2}}^{x_{2m=b}} f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}).$$

Наближене значення шуканого інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ буде дорівнювати сумі площ параболічних трапецій

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{2m-2}}^{b} f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + \ldots + y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}) =$$

$$= \frac{b-a}{6m}(y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1}))$$ –

формула Сімпсона.

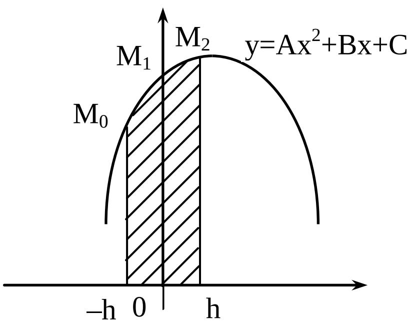


Рис. 13

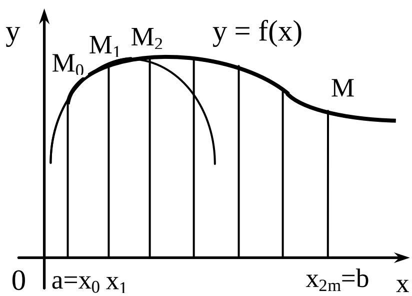


Рис. 14

Приклад.

Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ за формулою Ньютона-Лейбніца і за наближеними формулами прямокутників, трапецій, Сімпсона, розбиваючи відрізок інтегрування на 10 рівних частин і обчислюючи значення з заокругленням до п'ятого десяткового знаку. Оцінити похибку результатів, одержаних за наближеними формулами.

1) За формулою Ньютона-Лейбніца дістаємо

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}78540$$

2) Формула прямокутників (1) має вигляд

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}).$$

У даному випадку $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad n = 10$.

Ділимо відрізок [0, 1] на 10 рівних частин точками:

$a = x_0 = 0 < 0{,}1 < 0{,}2 < \ldots < 0{,}9 < 1 = x_{10} = b$

Значення функції $y = \frac{1}{1+x^2}$ в точках поділу занесемо до таблиці:

x	$y = \frac{1}{1+x^2}$	x	$y = \frac{1}{1+x^2}$
$x_0 = 0$	$y_0 = 1{,}00000$	$x_6 = 0{,}6$	$y_6 = 0{,}73529$
$x_1 = 0{,}1$	$y_1 = 0{,}99010$	$x_7 = 0{,}7$	$y_7 = 0{,}67114$
$x_2 = 0.2$	$y_2 = 0{,}96154$	$x_8 = 0{,}8$	$y_8 = 0{,}60976$
$x_3 = 0{,}3$	$y_3 = 0{,}91743$	$x_9 = 0{,}9$	$y_9 = 0{,}55249$
$x_4 = 0{,}4$	$y_4 = 0{,}86207$	$x_{10} = 1{,}0$	$y_{10} = 0{,}50000$
$x_5 = 0{,}5$	$y_5 = 0{,}80000$		

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{10}(y_0 + y_1 + \ldots + y_9) = 0{,}1 \cdot 8{,}09982 = 0{,}80998$$

За цією формулою абсолютна похибка результату дорівнює

$\Delta = |0{,}80998 - 0{,}78540| = 0{,}02458$, а відносна

$$\delta = \frac{0{,}02458}{0{,}80998} \cdot 100\% = 3{,}03\%$$

3) Формула трапецій має вигляд

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{10}\left(\frac{y_0 + y_{10}}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_9\right) = 0{,}1 \cdot (0{,}75 + 7{,}09982) =$$

$$= 0{,}78498.$$

Абсолютна похибка $\Delta = |0{,}78498 - 0{,}78540| = 0{,}00042$,

відносна похибка $\delta = \dfrac{0{,}00042}{0{,}78498} \cdot 100\% = 0{,}05\%$.

4) Формула Сімпсона має вигляд

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}(y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + + y_{2m-1})),$$

$$n = 2m \Rightarrow m = \frac{n}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{30}(y_0 + y_{10} + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + + y_9))$$

$$= \frac{1}{30}(1{,}5 + 6{,}33732 + 15{,}72464) = 0{,}78540\ ,$$

$\Delta = 0, \quad \delta = 0.$

Як бачимо, кожна наступна формула точніша за попередню ($\delta = 3{,}03\%, \quad \delta = 0{,}05\%, \quad \delta = 0$).

З збільшенням n буде зменшуватись похибка результата.

§ 6. Невласні інтеграли.

1. Невласні інтеграли з нескінченними межами (I роду).

Нехай функція f(x) визначена і неперервна при всіх $x \in [a, +\infty)$.

Означення. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$, тоді вона називається невласним інтегралом функції f(x) на проміжку [a, +∞) і

позначається $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Отже, за означенням:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^{b} f(x)dx.$$

У цьому випадку говорять, що невласний інтеграл збіжний. Якщо границя $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^{b} f(x)dx$ не існує або вона нескінченна, то говорять, що невласний інтеграл розбіжний.

Аналогічно визначається невласний інтеграл із нескінченною нижньою межею

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^{b} f(x)dx$$

і невласний інтеграл з обома нескінченними межами $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx =$

$= \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$, де c – деяке число. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ існує (збіжний), якщо кожен з невласних інтегралів $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx$, $\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$ існує (збіжний).

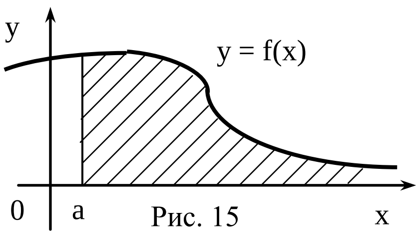


Рис. 15

Геометричний зміст невласного інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ у випадку, коли $f(x) \geq 0$: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ виражає площу необмеженої області, що заключена між лініями y = f(x), віссю 0x і прямою x = a (рис. 15).

Приклад 1. Обчислити невласний інтеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_a^0+\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^b=\lim_{a\to-\infty}(\operatorname{arctg}0-\operatorname{arctg}a)+\lim_{b\to+\infty}(\operatorname{arctg}b-$$

$$-\operatorname{arctg}0)=-\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}a+\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}b=(\text{див. рис.16})=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Границі $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2}$, $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2}$ існують (збіжні) $\Rightarrow$ $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ – збіжний.

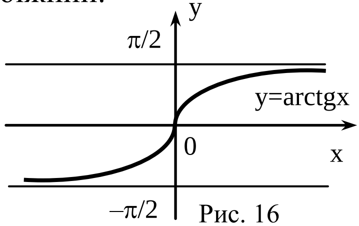


Рис. 16

Приклад 2. $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ $(\alpha>0)$. Встановити при яких значеннях α даний інтеграл збіжний і при яких розбіжний.

1) $\alpha\neq1$.

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to+\infty}\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\Bigg|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\right)=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha}-1)$$

якщо $\alpha>1$, то

$$\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha}-1)=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}}-1\right)\cdot\frac{1}{1-\alpha}=\frac{1}{\alpha-1},$$

тобто інтеграл $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ збіжний;

якщо $0<\alpha<1$, то $\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha}-1)=+\infty$, тобто інтеграл розбіжний.

2) $\alpha=1$.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}(\ln b-\ln 1)=\lim_{b\to+\infty}\ln b=+\infty,\text{ тобто}$$

інтеграл розбіжний.

Відповідь: $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ збіжний при $\alpha > 1$ і розбіжний при $0 < \alpha \le 1$. Питання про збіжність невласних інтегралів вирішують за допомогою ознак порівнянь.

1) Нехай для всіх $x \ge a$ виконується нерівність $0 \le f(x) \le \varphi(x)$. Тоді

а) якщо $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ збіжний, то збіжний і інтеграл $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ і виконується нерівність $\int_a^{+\infty}f(x)dx \le \int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$;

б) якщо інтеграл $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ розбіжний, то розбіжний і інтеграл $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$.

2) Якщо при всіх $x \ge a$ $f(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$ і існує скінченна границя $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} \ne 0$, то інтеграли $\int_a^{+\infty}f(x)dx$, $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ збіжні чи розбіжні одночасно.

3) Якщо інтеграл $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ збіжний, то збіжний і інтеграл $\int_a^{+\infty}f(x)dx$.

У даному випадку $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ називається абсолютно збіжним.

Приклад 3. Дослідити на збіжність $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3(3+e^{2x})}$.

При $x \geq 1$ $f(x)=\frac{1}{x^3(3+e^{2x})}>0$,

$f(x)=\frac{1}{x^3(3+e^{2x})}<\frac{1}{x^3}=\varphi(x)$.

Інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$ збіжний ($\alpha = 3 > 1$), тому за 1 ознакою $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3(3+e^{2x})}$ збіжний.

Приклад 4. Дослідити на збіжність $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}\sin x dx$ $f(x)=e^{-x}\sin x$ знакозмінна при $x \geq 0$.

Відомо, що $|\sin x| \leq 1$, тому

$|f(x)|=|e^{-x}\sin x|=|e^{-x}||\sin x| \leq e^{-x}=\varphi(x)$.

Інтеграл $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}(-e^{-x})\Big|_0^b=\lim\limits_{b\to+\infty}-(e^{-b}-e^0)=\lim\limits_{b\to+\infty}-\left(\frac{1}{e^b}-1\right)=1$

збіжний, тому за 1 ознакою $\int\limits_0^{+\infty}|e^{-x}\sin x|dx$ збіжний $\Rightarrow$ (за 3 ознакою) $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}\sin x dx$ збіжний.

2. Невласні інтеграли від розривних функцій (II роду).

Нехай задано функцію $y = f(x)$ неперервну на півінтервалі $[a; b)$, а в точці b вона терпить розрив. Тоді на відрізку $[a; b]$ визначений інтеграл не існує.

Означення. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{c\to b-0}\int\limits_a^c f(x)dx$, тоді вона називається невласним інтегралом від розривної функції f(x) в верхній межі і позначається $\int_a^b f(x)dx$.

Отже, за означенням:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b-0}\int_a^c f(x)dx.$$

У цьому випадку говорять, що невласний інтеграл збіжний. Якщо границя $\lim_{c\to b-0}\int_a^c f(x)dx$ не існує або вона нескінченна, то говорять, що невласний інтеграл розбіжний.

Аналогічно визначається невласний інтеграл від розривної функції f(x) в нижній межі

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a+0}\int_c^b f(x)dx.$$

Аналогічно, якщо точка c розриву функції f(x) лежить в середині відрізка [a, b], $c \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx =$$

$$= \lim_{c_1\to c-0}\int_a^{c_1} f(x)dx + \lim_{c_2\to c+0}\int_{c_2}^b f(x)dx,$$

причому невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називається збіжним, якщо збігаються обидва невласні інтеграли $\int_a^c f(x)dx$, $\int_c^b f(x)dx$. Якщо ж принаймні один з цих інтегралів розбігається, то невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називається розбіжним.

Приклад 1. Обчислити невласний інтеграл $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ або встановити його розбіжність.

Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{x^2}$ терпить розрив в точці x =0 ∈ [-1; 1]. Маємо невласний інтеграл $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ від розривної функції (II роду).

За означенням $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{c_1\to 0-0}\int_{-1}^{c_1}\frac{dx}{x^2}+\lim_{c_2\to 0+0}\int_{c_2}^{1}\frac{dx}{x^2}$.

Розглянемо окремо обчислення кожної границі:

$$\lim_{c_1\to 0-0}\int_{-1}^{c_1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{c_1\to 0-0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-1}^{c_1}=\lim_{c_1\to 0-0}\left(-\frac{1}{c_1}-1\right)=+\infty,$$

тобто інтеграл $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}$ розбіжний.

$$\lim_{c_2\to 0+0}\int_{c_2}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{c_2\to 0+0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{c_2}^{1}=\lim_{c_2\to 0+0}\left(-1+\frac{1}{c_2}\right)=+\infty,$$

тобто інтеграл $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}$ розбіжний.

Таким чином, невласний інтеграл $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ розбіжний.

Приклад 2. $\int_{0}^{b}\frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}$ $(\alpha>0, b>0)$. Встановити при яких значеннях α даний інтеграл збіжний і при яких розбіжний.

Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{(b-x)^{\alpha}}$ терпить розрив в точці $x=b$. Маємо невласний інтеграл від розривної функції в верхній межі (II роду). Дослідимо його на збіжність.

1) $\alpha \neq 1$.

$$\int_0^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{c\to b-0}\int_0^c \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{c\to b-0}\left(-\int_0^c \frac{d(b-x)}{(b-x)^\alpha}\right) =$$

$$= \lim_{c\to b-0}\left(-\frac{(b-x)^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right)\Bigg|_0^c = \lim_{c\to b-0} -\frac{(b-c)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} =$$

$$= \lim_{c\to b-0} \cdot \frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha} - (b-c)^{1-\alpha}),$$

якщо $\alpha > 1$, то $\lim\limits_{c\to b-0} \cdot \frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha} - (b-c)^{1-\alpha}) = +\infty$, т. б. інтеграл $\int\limits_0^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ розбіжний;

якщо $0 < \alpha < 1$, то $\lim\limits_{c\to b-0} \frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha} - (b-c)^{1-\alpha}) = \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, т. б. інтеграл збіжний.

2) $\alpha = 1$.

$$\int_0^b \frac{dx}{b-x} = \lim_{c\to b-0}\int_0^c \frac{dx}{b-x} = \lim_{c\to b-0}\left(-\int_0^c \frac{d(b-x)}{b-x}\right) = \lim_{c\to b-0}(-\ln|b-x|)\Big|_0^c =$$

$= \lim\limits_{c\to b-0}(-\ln|b-c| + \ln b) = +\infty$, т. б. інтеграл розбіжний.

Відповідь: невласний інтеграл $\int\limits_0^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ $(\alpha > 0, b > 0)$ збіжний при $0 < \alpha < 1$ і розбіжний при $\alpha \geq 1$.

Для невласних інтегралів II роду мають місце ознаки порівнянь, що і для невласних інтегралів I роду.

§ 7. Геометричне застосування визначеного інтеграла.

1. Обчислення площі плоскої фігури в декартових координатах.

За означенням (2) очевидно, площа криволінійної трапеції (рис. 2), обмеженої графіком неперервної функції $y = f(x)$, для якої $f(x) \geq 0$ ($\forall x \in [a, b]$), віссю 0x та прямими $x = a$, $x = b$, визначається за формулою:

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (1)$$

Якщо функція $y = f(x)$ приймає значення різних знаків (рис. 17), то площа дорівнює

$$S = \int_a^b |f(x)|dx, \qquad (2)$$

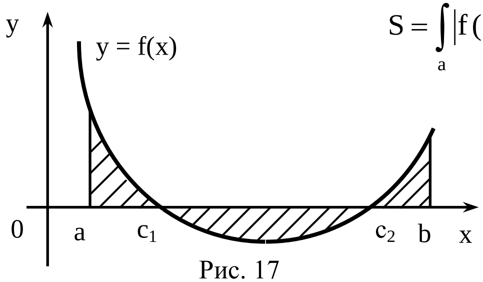


Рис. 17

$$S = \int_a^b |f(x)|dx = \int_a^{c_1} f(x)dx - \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^{b} f(x)dx.$$

Площа криволінійної трапеції (рис. 18), обмеженої двома кривими $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$, які можуть вироджуватись у точки, причому $f_1(x) \le f_2(x)$, $(\forall x \in [a, b])$, визначається за формулою

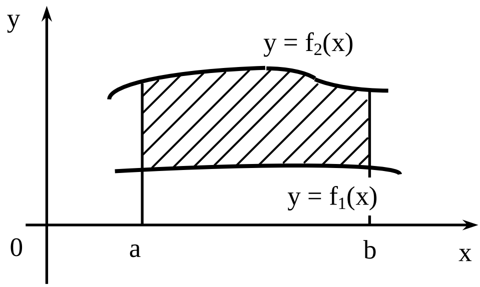


Рис. 18

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \qquad (3)$$

Якщо функція $y = f(x)$ задана параметрично

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta] \end{cases}$$

і $y = f(x) = f(\varphi(t))$ неперервна на $[\alpha, \beta]$, то площа дорівнює

$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt, \qquad (4)$$

де α та β визначаються з рівнянь $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$.

Приклади.

1. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y=x^2+4x$ і прямою $y=x+4$.

Знайдемо точки перетину параболи з прямою і побудуємо шукану фігуру (рис. 19):

$$\begin{cases} y=x^2+4x \\ y=x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4=x^2+4x, \\ y=x+4. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1, \\ y=5, \end{cases} \\ \begin{cases} x=-4, \\ y=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким чином, криві перетинаються в точках A(-4; 0) і B(1; 5). За формулою (3), де $f_1(x)=x^2+4x$, $f_2(x)=x+4$, $a=-4$, $b=1$, маємо

$$S=\int_{-4}^{1}((x+4)-(x^2+4x))dx=$$

$$=\int_{-4}^{1}(-x^2-3x+4)dx=$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+4x\right)\Bigg|_{-4}^{1}=$$

$$=\frac{125}{6}=20\frac{5}{6} \quad \text{(кв. од.)}$$

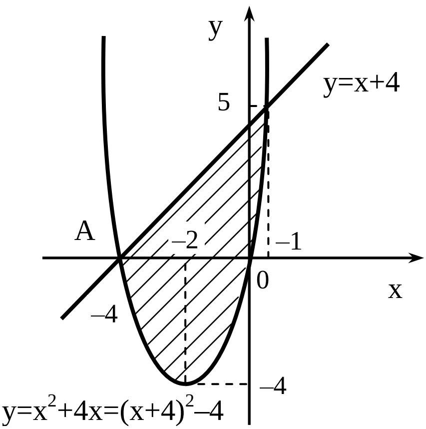


Рис. 19

2. Обчислити площу фігури, обмеженої еліпсом $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t. \end{cases}$

Зведемо рівняння еліпса до канонічного вигляду і побудуємо шукану фігуру (рис. 20):

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 = \cos^2 t, \\ \left(\dfrac{y}{a}\right)^2 = \sin^2 t \end{cases} + \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

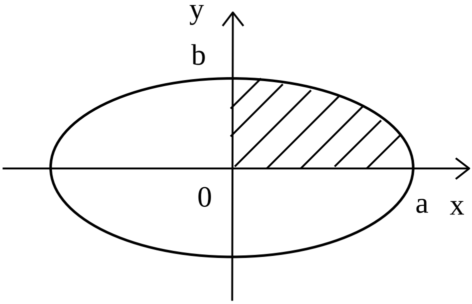


Рис.20

0x, 0y – осі симетрії,

тому $S = 4\int\limits_0^a f(x)dx$.

Знайдемо межі змінення параметра t, розв'язуючи рівняння:

$0 = a\cos t_1, \quad a = a\cos t_2,$

$\cos t_1 = 0 \qquad \cos t_2 = 1$

$t_1 = \dfrac{\pi}{2} \qquad t_2 = 0$

маємо $\dfrac{\pi}{2} \le t \le 0$. Тобто, якщо x змінюється від 0 до a, то t змінюється від $\dfrac{\pi}{2}$ до 0.

Згідно з формулою (4), дістаємо

$$S = 4\int\limits_0^a f(x)dx = 4\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin t(a\cos t)'dt = 4\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin t(-a\sin t)dt =$$

$$= -4ab\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 tdt = -2ab\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 (1-\cos 2t)dt = -2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^0 =$$

$$= -2ab\left(\left(0 - \frac{1}{2}\sin 0\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi\right)\right) = \pi ab \text{ . (кв. од.)}$$

2. Обчислення площі фігури в полярних координатах.

Розглянемо полярну систему координат.

Сукупність точки O і осі p будемо називати полярною системою координат, т. O – полюсом, p – полярною віссю (рис. 21).

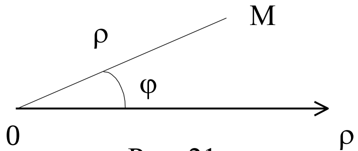


Рис. 21

Нехай M – довільна точка площини. Координата точки M задається двома числами M(ρ, φ): ρ – відстань від полюса O до точки M, ρ ≥ 0; φ – кут між полярною віссю p і радіусом-вектором $\overline{OM}$.

Встановимо зв'язок між декартовими і полярними координатами довільної точки M. Нехай початок декартової прямокутної системи координат 0xy співпадає з полюсом, а додатня піввісь абсцис – з полярною віссю. Точка M має декартові координати x і y та полярні координати ρ і φ (рис. 22). Тоді формули переходу від полярних до декартових координат мають вигляд $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$ і навпаки

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

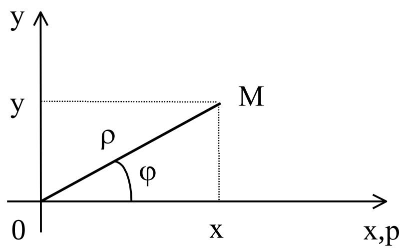


рис. 22

Наприклад, $x^2 + y^2 = R^2$ – рівняння кола в декартовій системі координат, а ρ = R – полярній системі координат.

Нехай крива AB (рис. 23) в полярній системі координат задана рівнянням

$$\rho = \rho(\varphi),$$

де ρ(φ) – неперервна функція при α ≤ φ ≤ β.

Фігура, обмежена кривою AB і двома променями φ = α і φ = β, називається криволінійним сектором (рис. 23). Якщо крива AB є дуга кола радіуса ρ з центром на початку координат, то криволінійний сектор буде круговим сектором.

Площу криволінійного сектора можна обчислити за допомогою формули

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi. \qquad (5)$$

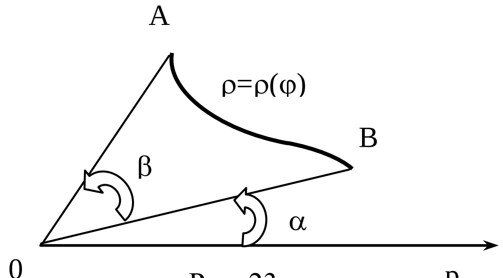


Рис. 23

📖 Розіб'ємо довільним чином відрізок [α, β] на n частин точками $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_{i-1} < \varphi_i < \ldots < \varphi_n = \beta$. На кожному частковому відрізку $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ візьмемо довільну точку $\theta_i \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]$ і побудуємо кругові сектори з радіусами $\rho = \rho(\theta_i)$ (рис. 24). Площа кругового сектора з радіусом $\rho = \rho(\theta_i)$ і центральним кутом $\Delta\varphi_i$ дорівнює

$$\Delta S_i = \frac{1}{2}\rho(\theta_i)\rho(\theta_i)\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\rho^2(\theta_i)\Delta\varphi_i.$$

$S_n = \sum_{i=1}^{n}\Delta S_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho^2(\theta_i)\Delta\varphi_i$ – інтегральна сума для функції $\rho=\rho(\varphi)$ на відрізку[α, β].

Границя цієї суми при $\lambda = \max\Delta\varphi_i \to 0$ і буде, очевидно, площею криволінійного сектора, обмеженого кривою $\rho = \rho(\varphi)$ і променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, якщо ця границя не залежить від способу розбиття і вибору точок θ_i.

Функція $\rho = \rho(\varphi)$ неперервна, тому за теоремою про існування визначеного інтеграла маємо

$$S = \lim_{\lambda\to 0} S_n = \frac{1}{2}\lim_{\lambda\to 0}\rho^2(\theta_i)\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi \quad \blacksquare$$

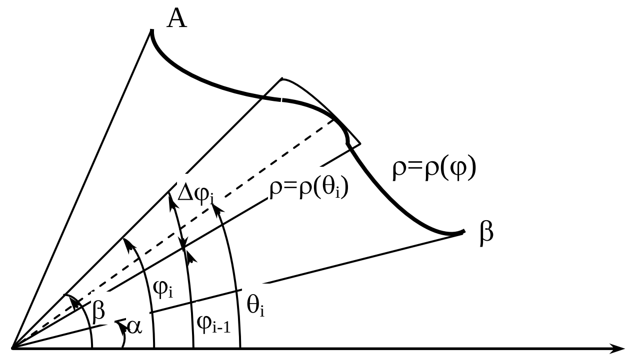


Рис. 24

Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $\rho = a\cos 4\varphi$.

Криві, що визначаються рівняннями $\rho = a\cos k\varphi$, $\rho = a\sin k\varphi$ (a, k – const, a > 0), називаються трояндами. $\rho = a\cos 4\varphi$ – чотирипелюсткова троянда (рис. 25). Для знаходження площі фігури визначимо як змінюється полярний кут φ. Розв'яжемо нерівність:
$\rho \ge 0$,

$$a\cos 4\varphi \ge 0,$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le 4\varphi \le \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in z,$$

$$-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n \le \varphi \le \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n, \quad n \in z,$$

$n = 0:\ -\frac{\pi}{8} \le \varphi \le \frac{\pi}{8}$,

$n = 1:\ \frac{3\pi}{8} \le \varphi \le \frac{5\pi}{8}$,

$n = 2:\ \frac{7\pi}{8} \le \varphi \le \frac{9\pi}{8}$,

$n = 3:\ \frac{11\pi}{8} \le \varphi \le \frac{13\pi}{8}$.

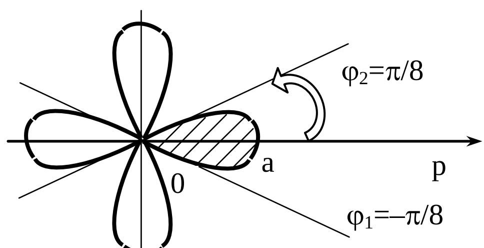


Рис. 25

Таким чином, кут φ змінюється від $\varphi_1 = -\frac{\pi}{8}$ до $\varphi_2 = \frac{\pi}{8}$, коли радіус-вектор ρ описує площу одного пелюстка.

$$S_{\text{фігури}} = 4\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2 d\varphi = 4\int\limits_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} a^2\cos^2 4\varphi d\varphi = 8a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}}\cos^2 4\varphi d\varphi =$$

$$= 8a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}}\frac{1+\cos 8\varphi}{2}d\varphi = 4a^2\left(\varphi + \frac{1}{8}\sin 8\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{8}} = 4a^2\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{8}\sin\pi - 0 -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{8}\sin 0\right) = \frac{\pi a^2}{2} \text{ (кквод.)}$$

3. Довжина дуги кривої.

Розглянемо деяку неперервну однозначну і гладку на відрізку [a; b] функцію $y = f(x)$.

Знайдемо довжину дуги AB кривої $y = f(x)$. Впишемо в неї довільну ламану $M_0M_1M_2...M_n$ (рис. 26).

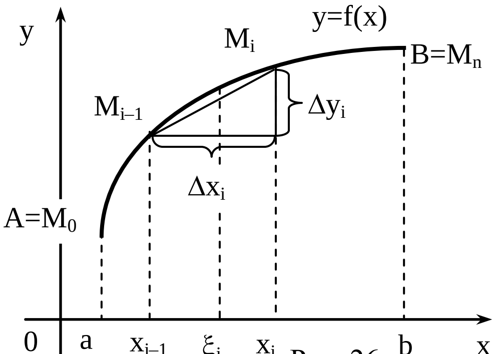


Рис. 26

Позначимо через Δl_i довжину однієї ланки $M_{i-1}\,M_i$ ламаної $\Delta l_i = |\,M_{i-1}\,M_i\,|$.

Довжина ламаної $M_0M_1M_2...M_n$ дорівнює

$$l_n = \sum_{i=1}^{n}\Delta l_i \ .$$

Означення 1. Будемо називати довжиною кривої $y = f(x)$ на відрізку [a; b] границю довжини вписаної ламаної при $\max\ \Delta l_i \to 0$, якщо границя існує і не залежить від способу розбиття

$$l = \lim_{\max\Delta l_i\to 0} l_n = \lim_{\max\Delta l_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i \ .$$

Довжина i-ої ланки $M_{i-1}\ M_i$ вписаної ламаної дорівнює

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\cdot\Delta x_i .$$

За теоремою Лагранжа

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i), \quad \text{де} \quad \xi_i \in [x_{i-1}; x_i].$$

Отже, $\Delta l_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x_i$.

Тоді довжина дуги кривої дорівнює

$$l = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \; (6)$$

(за умовою y = f(x) – неперервна гладка функція $\Rightarrow$ f′(x) – неперервна функція $\Rightarrow \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ – неперервна, тому існує границя інтегральної суми $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i$ і дорівнює визначеному інтегралу (6)).

Приклад 1. Обчислити довжину кола $x^2 + y^2 = R^2$.

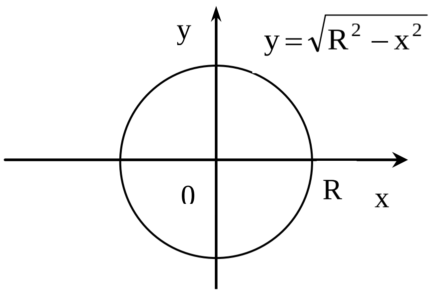


Рис. 27

Задамо функцію y = f(x) явно $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$. Достатньо знайти довжину четвертої частини кола, що знаходиться в першому квадранті $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [0; R]$, (рис. 27).

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

За формулою (6)

$$l = 4\int_0^R \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 4\int_0^R \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} dx = 4\int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx =$$

$$= 4\int_0^R \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}} dx = 4R\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 4R \arcsin \frac{x}{R}\Big|_0^R = 4R(\arcsin 1 -$$

$$- \arcsin 0) = 4R \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi R.$$

Якщо крива y = f(x) задано параметрично

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

де функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ неперервні на $[\alpha, \beta]$, то довжина кривої обчислюється за формулою

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt \qquad (7)$$

В даному випадку параметричні рівняння визначають деяку функцію y = f(x) неперервну разом із своєю похідною $f'(x) = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$. Формулу (7) дістаємо з формули (6) за допомогою заміни змінної:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t), & a = \varphi(\alpha) \\ dx = \varphi'(t)dt, & b = \varphi(\beta) \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\,\varphi'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt.$$

Приклад 2. Обчислити довжину однієї арки циклоїди

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \quad t \in (-\infty; +\infty). \end{cases}$$

Оскільки всі арки циклоїди мають однакову довжину,

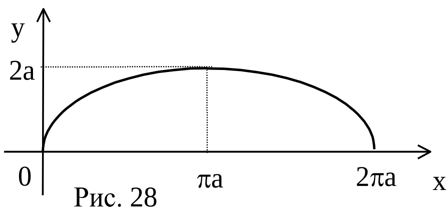


Рис. 28

t	x	y
0	0	0
π	πa	2a
2π	$2\pi a$	0

обчислимо довжину першої її арки при $t \in [0;2\pi]$. (рис. 28).

Знаходимо $\varphi'(t) = a(t - \sin t)' = a(1 - \cos t)$, $\psi'(t) = a(1 - \cos t)' = a\sin t$.

Застосовуючи формулу (7), дістаємо

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{(a(1-\cos t))^2+(a\sin t)^2}dt=\int_0^{2\pi}a\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}dt=$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}dt=2a\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=$$

$$=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=-4a(\cos\pi-\cos 0)=8a.$$

Якщо крива задана параметрично в тривимірному просторі

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \\ z=\chi(t), \qquad t\in[\alpha,\beta], \end{cases}$$

де функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ неперервні на $[\alpha,\beta]$, то довжина кривої обчислюється за формулою

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}dt \qquad (8)$$

Якщо крива задана в полярній системі координат рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то її довжина дорівнює

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi))^2}d\varphi, \qquad (9)$$

де $\rho(\varphi)$, $\rho'(\varphi)$ – неперервні функції на $[\alpha, \beta]$.

Спробуйте вивести формулу (9) самостійно.

Приклад 3. Обчислити довжину кардіоїди $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

Крива симетрична відносно полярної осі (рис. 29), тому при зміні кута φ від 0 до π радіус-вектор ρ опише половину кривої.

Знаходимо $\rho'(\varphi) = (a(1 + \cos\varphi))' = -a\sin\varphi$

Згідно з формули (9), дістаємо

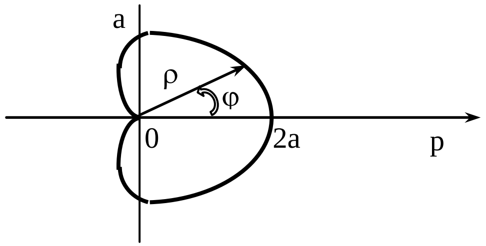


Рис. 29

φ	ρ
0	2a
$\frac{\pi}{2}$	a
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	a

$$l = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = 2\int_0^{\pi} a\sqrt{1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2+\cos\varphi}\,d\varphi = 2a\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi = 4a\int_0^{\pi}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi = 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 8a.$$

4. Об’єм тіла. Об’ єм тіла обертання.

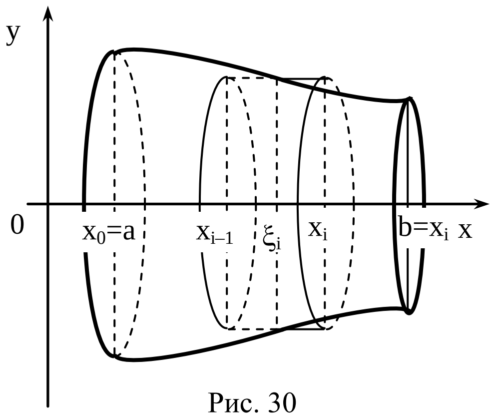


Рис. 30

Нехай задано функцію y = f(x) на відрізку [a; b], причому f(x) = S(x) – площа перетину деякого тіла V площинами перпендикулярними до осі 0x (рис. 30). Будемо вважати функцію S(x) неперервною на [a; b]. Побудуємо суму $V_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, де $\Delta V_i = f(\xi_i)\Delta x_i$ – об’єм циліндричного тіла ($f(\xi_i) = S(\xi_i)$ – площа основи i -го циліндра, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – висота i - го циліндра).

Переходимо до границі інтегральної суми V_n при $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$. Функція S(x) неперервна, тому за теоремою про існування визначеного інтеграла маємо

$$V=\lim_{\lambda\to 0}V_n=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b S(x)dx \text{ – об'єм тіла.} \quad (10)$$

Розглянемо тіло, що утворене обертанням кривої y = f(x) навколо осі 0x. Тоді площа перетину (площа круга радіуса f(x)) дорівнює $S(x)=\pi(f(x))^2$. Отже, об'єм тіла обертання навколо осі 0x обчислюється за формулою

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx \qquad (11)$$

Приклад 1. Обчислити об'єм еліпсоїда обертання $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Тіло утворюється обертанням кривої $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ навколо осі 0x (рис. 31).

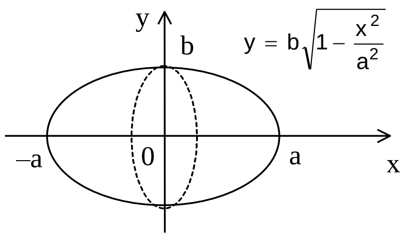


Рис. 31

За формулою (11) маємо

$$V=\pi\int_{-a}^{a}b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=$$

$$=2\pi b^2\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=$$

$$=2\pi b^2\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a=2\pi b^2\left(a-\frac{a^3}{3a^2}\right)=\frac{4}{3}\pi ab^2 \text{ (куб. од.).}$$

5. Площа поверхні тіла обертання.

Площа поверхні, що утворюється при обертанні навколо осі 0x кривої $y = f(x)$, $x\in[a; b]$, $f(x)\ge 0$, обчислюється за формулою

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx, \qquad (12)$$

де функції f(x), f′(x) – неперервні на відрізку [a; b].

Пропонуємо вивести формулу (12) самостійно.

Приклад 1. Обчислити площу поверхні параболоїда обертання $y^2 = 2px$, $x \in [0; 1]$.

Поверхня тіла утворюється обертанням кривої $y = \sqrt{2px}$, де $0 \le x \le 1$, навколо осі 0x (рис. 32).

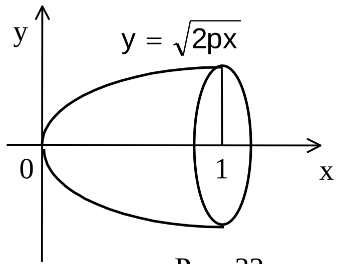


Рис. 32

Знаходимо $y' = f'(x) = \left(\sqrt{2px}\right)' = \sqrt{\dfrac{p}{2x}}$

За формулою (12) маємо

$$S = 2\pi\int_0^1 \sqrt{2px}\cdot\sqrt{1+\frac{p}{2x}}dx =$$

$$= 2\pi\int_0^1 \sqrt{2px+p^2}dx =$$

$$= \frac{\pi}{p}\int_0^1 (2px+p^2)^{\frac{1}{2}} d(2px+p^2) =$$

$$= \frac{2\pi}{3p}\sqrt{(2px+p^2)^3}\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3p}(\sqrt{(2p+p^2)^3} - p^3) \text{ (кв. од.)}$$

Тема III. **ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ.**

§ 1. Функції кількох змінних. Основні поняття.

При вивченні багатьох явищ доводиться мати справу з функціями двох і більше незалежних змінних. Основні поняття і твердження для функції однієї змінної узагальнюються на випадок кількох змінних.

Розглянемо докладно функцію двох змінних.

1. Означення функції кількох змінних.

Означення 1. Змінна z називається функцією незалежних змінних (x, y) з множини D, якщо кожній парі $(x, y) \in D$ по деякому закону ставиться у відповідність одне єдине значення z і позначається

$$z = f(x, y)$$

Означення 2. Множина D називається областю визначення функції z. Сукупність всіх пар $(x; y) \in D$ утворює область визначення функції z. Змінні x, y щодо функції z називаються її аргументами.

Приклад 1. Знайти область визначення функції

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

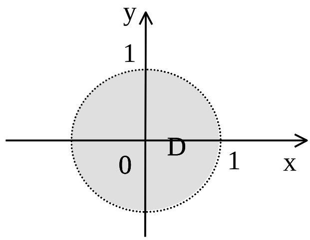


рис. 33

Функція z визначена при $1 - x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 1$. Останню нерівність задовільняють координати точок площини x0y, що містяться всередині круга радіуса $R = 1$ і з центром O(0; 0) (рис. 33).

Приклад 2. Знайти область визначення функції z=arccos(x+2y).

Функція z визначена при $-1 \le x + 2y \le 1$,

$$-x - 1 \le 2y \le -x + 1,$$

$$-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \le y \le -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Область визначення є смуга, обмежена двома паралельними прямими $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ і $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ (рис. 34).

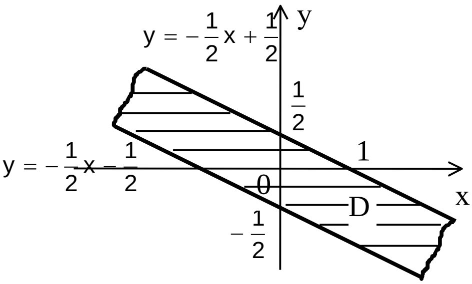


рис. 34

Частинному значенню аргументів $(x_0; y_0) \in D$ відповідає частинне значення фунуції $z_0 = f(x_0, y_0)$.

r – околом точки $M_0(x_0, y_0)$ називається множина точок (x,y), яка задовільняє нерівність:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r.$$

Точка $M_0(x_0, y_0)$ називається внутрішньою точкою множини D, якщо вона міститься в множині D разом з нескінченно малим її околом.

Множина, яка складається лише з внутрішніх точок, називається відкритою областю.

Граничною точкою множини D називається точка $M_0 \not\in D$, але будь-який її окіл містить хоча б одну точку з множини D.

Сукупність всіх граничних точок множини D називається границею множини D. Так, у прикладі 1 коло $x^2 + y^2 = 1$ є границею множини D, а саме множина D – відкрита область.

Відкрита область разом з границею називається замкненою областю.

Множина D називається обмеженою, якщо вона міститься в деякому прямокутнику.

<u>Означення 3.</u> Нехай маємо n – вимірний векторний простір R^n. Якщо $x \in R^n$, то $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ і можна задати функцію z в R^n:

$$z = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

2. <u>Геометричне зображення функції кількох змінних.</u>

Розглянемо у просторі прямокутну декартову систему координат 0xyz і функцію $z = f(x, y)$, визначену на множині D ($(x, y) \in D$, де $D \subset R^2$).

Точці $M_0(x_0, y_0) \in D$ відповідає певне число $z_0 = f(x_0,y_0)$. Проведемо в точці M_0 перпендикуляр до площини 0xy і відкладемо на ньому відрізок довжиною $z_0 = f(x_0, y_0)$. Отримали в просторі точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$ (рис. 35).

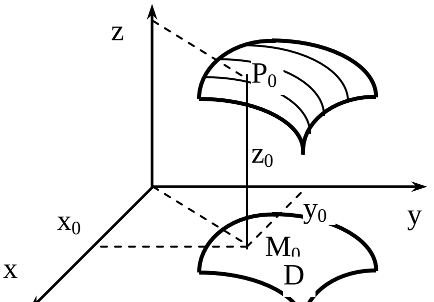


Рис. 35

Графіком функції $z = f(x, y)$ називається множина точок P(x, y, z) простору, координати яких задовільняють рівняння $z = f(x,y)$.

Таким чином, функція двох змінних зображується у просторі R^3 у вигляді поверхні, що визначається рівнянням $z = f(x, y)$, і називається рівнянням поверхні.

Наприклад, графіком функції $z = x^2 + y^2$ є параболоїд обертання (рис. 36)

Як правило, побудова поверхонь викликає труднощі. Тому на практиці обмежуються дослідженням ліній рівня функції $z = f(x, y)$.

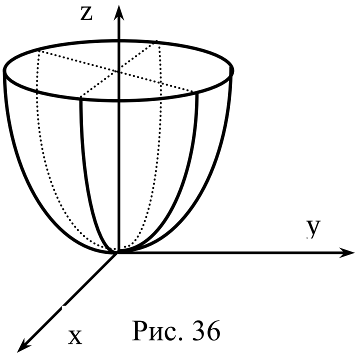


Рис. 36

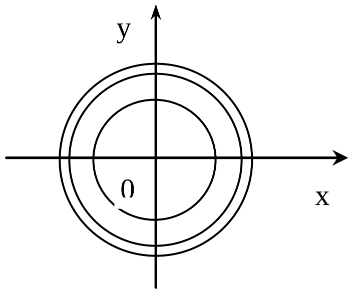


Рис. 37

Лінією рівня функції z = f(x, y) називається лінія f(x,y)=C на площині 0xy, в точках якої функція набуває одного й того ж значення z = C, де C – довільна стала.

Для функції $z = x^2 + y^2$ лінії рівня визначаються рівнянням $x^2 + y^2 = C$ (C > 0) і утворюють сімейство концентричних кіл радіусом $r = \sqrt{C}$ і з центром на початку координат (рис. 37). При C=0 лінія рівня вироджується у точку (початок координат).

Зауваження. Функцію трьох і більше незалежних змінних зобразити за допомогою графіка у просторі неможливо.

Поверхнею рівня функції u = f(x, y, z) називається поверхня f(x, y, z) = C у просторі 0xyz, в точках якої функція набуває одного й того ж значення u = C, де C – довільна стала.

3. Частинний і повний прирости функції.

Маємо функцію z = f(x, y).

Частинним приростом функції z відносно змінної x ($\Delta_x z$) називається різниця $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$.

Частинним приростом функції z відносно змінної y ($\Delta_y z$) називається різниця $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Аналогічно визначається повний приріст функції z (Δz):
$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

4. Неперервність функції кількох змінних.

Визначення 1. Число A називається границею функції z= f(x,y) при $M(x; y) \to M_0(x_0; y_0)$, якщо $\forall \varepsilon > 0\ \exists r > 0$ таке, що для будь-якого переміщення MM_0 довжиною

$|MM_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r$ виконується нерівність

$|f(x,y) - A| < \varepsilon$ і позначається

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = A$$

Приклад 1. Обчислити границю $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

Маємо невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$. Для того, щоб розкрити цю невизначеність, необхідно позбутися ірраціональності взнаменнику. Тому, помножимо чисельник і знаменник дробу на вираз $\sqrt{x^2+y^2+1}+1$, спряжений з знаменником:

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+y^2+1}-1)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{x^2+y^2+1-1} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} (\sqrt{x^2+y^2+1}+1) = 2.$$

Приклад 2. Обчислити границю $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

Перейдемо до полярних координат:

$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, де $\rho \ge 0$, $0 \le \varphi < 2\pi$

Маємо невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$, для розкриття якої виконаємо заміну:

$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$ при $(x;y) \to (0;0)$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos^3\varphi + \rho^3\sin^3\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}{\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} =$$

$= \lim\limits_{\rho\to 0} \rho(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi) = 0$ (як добуток нескінченно малої функції ρ на обмежену функцію $\cos^3\varphi + \sin^3\varphi$).

Приклад 3. Виявити, чи має функція $z = f(x, y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ границю при $x \to 0$, $y \to 0$.

Нехай точка $M(x; y) \to M_0(0; 0)$ уздовж прямої $y = kx$.
Дістаємо (при $k \neq 1$)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x\to 0} \frac{x+kx}{x-kx} = \lim_{x\to 0} \frac{1+k}{1-k} = \frac{1+k}{1-k}$$

Отримаємо різні значення границі функції в залежності від k. Отже, функція $z = f(x, y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ не має границі у точці $M_0(0;0)$.

Визначення 2. Функція $z = f(x, y)$ називається неперервною у точці $M_0(x_0; y_0)$, якщо границя функції в ній існує і дорівнює значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) \text{ при } \forall (x, y) \to (x_0, y_0).$$

Наприклад, функція $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ неперервна в будь-який точці площини, за виключенням точки $M(0; 0)$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \infty$.

Визначення 2. Функція, неперервна в кожній точці деякої області D, називається неперервною в цій області.

Точки, в яких порушується умова неперервності функції, називаються точками розриву функції. Точки розриву можуть утворювати лінії розриву, поверхні розриву.

Властивості неперевної функції.

1. Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D, то вона приймає в цій області хоча б одне найбільше значення M і найменше значення m.
2. Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D і M, m відповідно найбільше і найменьше значення в цій області, то для $\forall \mu$ такого, що $m < \mu < M$ $\exists (x_0; y_0) \in D$, що $f(x_0; y_0) = \mu$.

§ 2. Похідні і диференціали функції кількох змінних.

1. Частинні похідні функції кількох змінних.

Частинною похідною функції z = f(x, y) за однією із змінних називається границя відношення відповідного частинного приросту функції до приросту цієї змінної, якщо приріст змінної прямує до нуля, і позначається;

$$z'_x = f'_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x};$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}.$$

Аналогічно визначаються частинні похідні функції трьох і більше незалежних змінних.

Обчислюють частинні похідні за вже відомими правилами і формулами диференціювання функції однієї змінної, вважаючи при цьому інші змінні сталими.

Приклад 1. Знайти частинні похідні функції $z = x^3y - xy^3$.
При знаходженні частинної похідної за змінною x змінна y вважається сталою.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y - y^3; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 3xy^2 \text{ (x - стала).}$$

Приклад 2. Знайти частинні похідні функції $z = x^y$ і обчислити її значення в точці M(1; 2).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x.$$

$$f'_x(1;2) = 2 \cdot 1 = 2; \qquad f'_y(1;2) = 1^2 \cdot \ln 1 = 0.$$

Приклад 3. Знайти частинні похідні функції $u=\ln(1+x+y^2+z^3)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x+y^2+z^3} \cdot \left(x+y^2+z^3\right)'_x = \frac{1}{x+y^2+z^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\left(x+y^2+z^3\right)'_y}{x+y^2+z^3} = \frac{2y}{x+y^2+z^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\left(x+y^2+z^3\right)'_z}{x+y^2+z^3}=\frac{3z^2}{x+y^2+z^3}$$

2. Геометрична інтерпретація частинних похідних функції двох змінних.

Маємо функцію z = f(x, y).

$\frac{\partial z}{\partial x}$ задає міру крутизни поверхні z = f(x, y) в напрямку осі 0x, а $\frac{\partial z}{\partial y}$ – в напрямку осі 0y.

3. Повний диференціал функції двох змінних.

Розглянемо повний приріст функції z = f(x, y)

$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+{}+\Delta y) + {}+f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$

Припускаємо, що функція z = f(x, y) має неперервні всі частинні похідні.

Вираз $f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)$ можна розглядати як різницю двох значень функції однієї змінної x (значення $y+\Delta y$ залишається сталим). Тоді, за теоремою Лагранжа

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = f'_x(\bar{x}, y+\Delta y)\cdot\Delta x =$$

$$=\frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x}\cdot\Delta x,\ \text{де}\ x<\bar{x}<x+\Delta x.$$

Вираз $f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$ можна розглядати як різницю двох значень функції однієї змінної y (x – стала).

За теоремою Лагранжа

$$f(x, y+\Delta y) - f(x, y) = f'_y(x, \bar{y})\cdot\Delta y = \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}\cdot\Delta y,\ \text{де}\ y<\bar{y}<y+\Delta y.$$

Отримаємо $\Delta z = \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}\cdot\Delta y$

Оскільки, за припущенням функція z = f(x, y) має неперервні частинні похідні, то

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x, y)}{\partial x};\ \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}=\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

(при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0,\ \bar{x} \to x,\ \bar{y} \to y$)

Тоді $\dfrac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \gamma_1;\ \dfrac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \gamma_2,$

$$\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} \cdot \Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y,$$

де γ_1, γ_2 нескінченно малі.

Сума $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \dfrac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} \cdot \Delta y$ лінійна відносно Δx і Δy.

Сума $\gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y$ нескінченно мала вищого порядку відносно

$$\Delta \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad \left(\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\gamma_1 \Delta x}{\Delta \rho} = 0; \quad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\gamma_2 \Delta y}{\Delta \rho} = 0 \right).$$

Означення. Функція $z = f(x, y)$, повний приріст Δz якої у точці (x, y) можна подати у вигляді суми двох доданків: виразу, лінійного відносно Δx і Δy і величини нескінченно малої вищого порядку відносно $\Delta \rho$, називається диференційованою у точці (x,y), а головна лінійна частина приросту називається повним диференціалом функції z і позначається dz.

Якщо функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні в даній точці, то вона в ній диференційована і повний диференціал дорівнює

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} \cdot \Delta y$$

Тоді повний приріст функції

$$\Delta z = dz + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y.$$

Оскільки γ_1, γ_2 – нескінченно малі, то $\Delta z \approx dz$.

Прирости незалежних змінних Δx і Δy будемо називати дифенціалами незалежних змінних x і y і позначають $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Отже, повний диференціал функції $z = f(x, y)$ обчислюється за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Вирази $\frac{\partial z}{\partial x}dx,\ \frac{\partial z}{\partial y}dy$ називають частинним диференціалом фугкції по x і y відповідно тому повний диференціал функції дорівнює сумі частинних диференціалів $dz = d_x z + d_y z$.

Аналогічно, повний диференціал функції n змінних $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ обчислюється за формулою

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n.$$

Приклад 1. Знайти повний диференціал функції $z = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

I спосіб. Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)'_x = y((x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}})'_x = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)'_y = \frac{(y)^{©}_y\sqrt{x^2 + y^2} - \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)'_y \cdot y}{x^2 + y^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 - y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}dx + \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}dy = \frac{x^2dy - xydx}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}.$$

II спосіб. Використовуючи правила диференціювання, маємо:

$$dz = d\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}dy - y \cdot d\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}dy - y \cdot \frac{d(x^2) + d(y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}dy - y \cdot \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} =$$

$$=\frac{(x^2+y^2)dy-xydx-y^2dy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}=\frac{x^2dx-xydx}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

4. Застосування повного диференціала у наближених обчисленнях.

Повний диференціал часто використовується у наближених обчисленнях значень функції, тому що

$\Delta z \approx dz$,

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)\approx \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y$$

Тоді отримаємо наближену формулу:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)\approx f(x, y)+\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y \qquad (1)$$

Приклад 2. Обчислити наближено $1{,}03^{4,02}$

Розглянемо функцію $z = x^y$.

Для обчислення шуканого значення покладемо у формулі (1) $x=1$, $y = 4$, $\Delta x = 0{,}03$, $\Delta y = 0{,}02$.

Знаходимо повний диференціал функції $z = x^y$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x\cdot\Delta y \text{ і}$$

обчислюємо наближене значення функції $z = x^y$ в точці (1,03; 4,02)

$$1{,}03^{4,02} = f(1+0{,}03;\, 4+0{,}02)\approx f(1;\,4)+f'_x(1;\,4)\cdot 0{,}03+$$

$$+f'_y(1;\,4)\cdot 0{,}02 = 1+4\cdot 1\cdot 0{,}03+1\cdot \ln 1\cdot 0{,}02 = 1{,}12$$

5. Частинні похідні і повні диференціали вищих порядків.

Частинними похідними другого порядку функції $z = f(x, y)$ називається частинні похідні від частинних похідних першого порядку і позначаються

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x^2}=f''_{xx}(x;y)=z''_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x;y)=z''_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial y^2}=f''_{yy}(x;y)=z''_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x;y)=z''_{yx}$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ читається: «де два зет по де ікс квадрат»

Приклад 1. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = 3x^2y^3 + 2xy^2 – 3x + 2y – 1$.

Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку:

$z'_x = 6xy^3 + 2y^2 - 3,\qquad z'_y = 9x^2y^2 + 4xy + 2.$

Диференціюючи їх ще раз, дістанемо:

$z''_{xx} = (6xy^3 + 2y^2 - 3)'_x = 6y^3,\quad z''_{xy} = (6xy^3 + 2y^2 - 3)'_y = 18xy^2 + 4y,$

$z''_{yy} = (9x^2y^2 + 4xy + 2)'_y = 18x^2y + 4x,\ z''_{yx} = (9x^2y^2 + 4xy + 2)'_x =$

$= 18xy^2 + 4y$

Як бачимо, $z''_{xy} = z''_{yx} = 18xy^2 + 4y.$

<u>Теорема 1.</u> Якщо функція z = f(x, y) і її частинні похідні $z'_x,\ z'_y,\ z''_{xy},\ z''_{yx}$ визначені і неперервні у точці M(x; y) і в деякому її околі, то в цій точці має місце рівність $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Частинні похідні $z''_{xy},\ z''_{yx}$ називаються мішаними.

Приклад 2. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z=x^y$.

Маємо послідовно

$z'_x = yx^{y-1};\quad z'_y = x^y\ln x;\quad z''_{xx} = y(y-1)x^{y-2};\quad z''_{yy} = x^y\ln^2 x;$

$z''_{xy} = (yx^{y-1})'_y = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x;\quad z''_{yx} = (x^y\ln x)'_x = yx^{y-1}\ln x +$

$+ x^y\cdot\frac{1}{x} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x;$

Диференціалом другого порядку функції $z = f(x, y)$ називається диференціал від повного диференціала першого порядку і позначається $d^2z = d(dz)$.

Аналогічно визначається диференціал n-го порядку:

$$d^n z = d(d^{n-1}z).$$

Якщо x та y – незалежні змінні і функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні, то диференціал другого порядку обчислюється за формулою

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Для обчислення диференціалів вищих порядків користуються символічною формулою

$$d^n z = (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^n z,$$

яка формально розкривається за біноміальним законом. Спробуйте самостійно записати формулу для обчислення d^3z.

§ 3. Скалярне поле.

1. Скалярне поле. Поверхні рівня.

Нехай у просторі 0xyz є область D, в якій задана функція $u = u(x, y, z)$. У такому випадку говорять, що в області D задане скалярне поле.

Якщо кожній точці M простору ставиться у відповідність скалярна величина u, то виникає скалярне поле u(M). Фізичними прикладами скалярних полів є поле густини зарядів на поверхні, потенціал силового поля.

Розглянемо точки області Д, в яких функція u(x, y, z) набуває постійного значення C:

$$u(x, y, z) = C \qquad (1)$$

Сукупність цих точок утворює деяку поверхню. Якщо візьмемо інше значення C, то отримаємо іншу поверхню. Ці поверхні називаються поверхнями рівня, а (1) – рівнянням поверхні рівня.

2. Похідна за напрямом.

Розглянемо в області Д функцію $u = u(x, y, z)$. Нехай лінія (L) виходить з точки M за напрямом вектора $\bar{l}$ (рис. 38). Тоді похідною

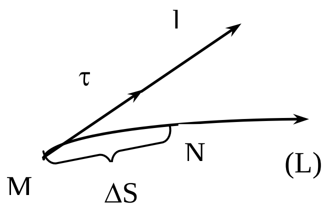


Рис. 38

від функції u за напрямом $\bar{l}$ називається швидкість зміни поля в даному напрямку, віднесена до одиниці довжини:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{u(N) - u(M)}{\Delta S}$$

Якщо функція u = u(x, y, z) диференційовна, то похідна за напрямом вектора $\bar{l}$ обчислюється формулою

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямні косинуси вектора $\bar{l}$.

3. <u>Градієнт функції.</u>

В кожній точці області Д, в якій задана функція u = u(x, y, z), визначимо вектор, проекціями якого на осі координат є значення частинних похідних $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ цієї функції в відповідній точці:

$$\overline{\text{grad}}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$$

Цей вектор називається градієнтом функції u(x, y, z). Кажуть, що в області D визначено векторне поле градієнтів.

Градієнт скалярного поля u у даній точці M(x, y, z) направлений по нормалі до поверхні рівня u(x, y, z) = C, яка проходить через цю точку.

Похідна функції u(x, y, z) за напрямом $\bar{l}$ і градієнт зв'язані співвідношенням

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \overline{\tilde{i}} \cdot \overline{\text{grad}}\, u,$$

де $\overline{\tilde{i}}$ – одиничний вектор напрямку l, $\left|\overline{\tilde{i}}\right| = 1$, $\overline{\tilde{i}} = \frac{\bar{l}}{\left|\bar{l}\right|}$.

Нехай φ – кут між векторами $\overline{\tilde{i}}$ і $\overline{\text{grad}}\, u$. Існує єдиний напрям, вздовж якого похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ має найбільше значення.

Оскільки, $\frac{\partial u}{\partial l} = \tilde{i} \cdot \overline{\mathrm{grad} u} = \left|\tilde{i}\right| \left|\overline{\mathrm{grad} u}\right| \cos\varphi = \left|\overline{\mathrm{grad} u}\right| \cos\varphi$, то єдиний напрям найшвидшого зростання функції u(x, y, z) відповідає кутові $\varphi = 0$, т.б. $\max(\frac{\partial u}{\partial l}) = \left|\overline{\mathrm{grad}\, u}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$. Отже, напрям вектора $\overline{\mathrm{grad}\, u}$ – це напрям найшвидшого зростання скалярного поля.

§ 4. Екстремуми функції декількох змінних.

1. Екстремуми функції двох змінних.

Означення 1. Говорять, що функція z = f(x, y) досягає в точці $M_0(x_0;y_0)$ максимуму (мінімуму), якщо існує деякий окіл цієї точки, для якого виконується нерівність $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ $(f(x, y) > f(x_0, y_0))$.

Максимум і мінімум функції називається її екстремумом, а точка, в якій досягається екстремум, – точкою екстремуму.

Теорема 1 (необхідні умови екстремуму). Якщо функція z = f(x,y) в точці $M_0(x_0; y_0)$ досягає екстремуму, то в цій точці частинні похідні дорівнюють нулю $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ чи принаймні одна з них не існує.

Означення 2. Точки, в яких частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю, називаються стаціонарними. Всі стаціонарні точки і точки, в яких частинні похідні не існують, називаються критичними.

Теорема 2 (достатні умови екстремуму). Нехай в деякій області D, що утримує критичну точку $M_0(x_0; y_0)$ частинні похідні функції z = f(x, y) включно до третього порядку визначені і неперервні, то тоді в точці M_0

1) функція z = f(x, y) досягає максимуму, якщо

$$\Delta = f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0 \text{ і } f''_{xx}(x_0, y_0) < 0;$$

2) функція z = f(x, y) досягає мінімуму, якщо

$$\Delta > 0 \quad \text{і} \quad f''_{xx}(x_0, y_0) > 0;$$

3) екстремуму немає, якщо $\Delta < 0$;

4) відповіді немає, якщо $\Delta = 0$, (потрібні додаткові дослідження).

Приклад 1. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Знаходимо частинні похідні:

$$z'_x = 3x^2 - 3y; \quad z'_y = 3y^2 - 3x; \quad z''_{xx} = 6x; \quad z''_{yy} = 6y; \quad z''_{xy} = -3$$

Користуючись необхідними умовами екстремуму, знаходимо стаціонарні точки функції:

$$\begin{cases} z'_x = \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ z'_y = \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x^4 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = x^2, \end{cases} \\ \begin{cases} x^3 - 1 = 0, \\ y = x^2 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Маємо дві стаціонарні точки: $M_1(0; 0)$, $M_2(1; 1)$.

Для точки $M_1(0; 0)$

$$\Delta = f''_{xx}(0,0) f''_{yy}(0,0) - (f''_{xy}(0,0))^2 = 0 - (-3)^2 = -9 < 0;$$

Отже, згідно з умовою 3) теореми 2, в точці $M_1(0; 0)$ екстремуму немає.

Для точки $M_2(1; 1)$

$$\Delta = f''_{xx}(1,1) f''_{yy}(1,1) - (f''_{xy}(1,1))^2 = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 27 > 0 \quad \text{і}$$

$$f''_{xx}(1,1) = 6 > 0.$$

Отже, згідно з умовою 2), в точці $M_2(1; 1)$ функція досягає мінімуму, причому $z_{min} = f(1; 1) = -1$.

2. Найбільше і найменше значення функції.

Для знаходження найбільшого і найменшого значення функції $z = f(x, y)$ в обмеженій замкненій області D потрібно:

1) знайти стаціонарні точки всередині заданої області і обчислити значення функції в цих точках;

2) знайти найбільше і найменше значення функції на границі області;

3) серед знайдених значень вибрати найбільше і найменше.

Приклад, Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в області D: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.
Дана область D – прямокутник (рис. 39).

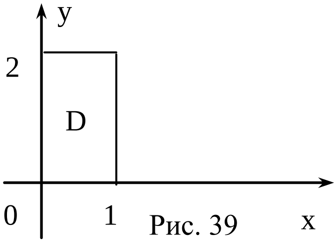


Рис. 39

1) Знайдемо стаціонарні точки. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} z'_x = 2x + 2y - 4 = 0, \\ z'_y = 2x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 6 \end{cases}$$

Маємо стаціонарну точку M_0 (-4; 6), $M_0 \notin D$.

2) Знайдемо найбільше і найменше значення функції на границі області D:

а) при $y=0$ маємо $z=x^2-4x$, $0 \le x \le 1$. Досліджуємо на екстремум функцію однієї змінної і обчислюємо її значення на кінцях відрізка [0; 1]:

$z'(x) = 2x - 4$, $z' = 0$ при $x = 2 \notin [0; 1]$,
$z(0) = 0$, $z(1) = -3$.
Отже, $\underline{z(0, 0) = 0}$, $\underline{z(1, 0) = -3}$;

б) при $x = 1$ маємо $z = 1^2 + 2y - 4 + 8y = 10y - 3$, $0 \le y \le 2$. Функція монотонно зростає і на кінцях відрізка [0; 2] набуває значення
$z(0) = -3$, $z(2) = 17$.
Врахуємо, що $\underline{z(1, 2) = 17}$.

в) при $y = 2$ маємо $z = x^2 + 4x - 4x + 16$, $0 \le x \le 1$. Знайдемо значення цієї функції в стаціонарній точці і на кінцях відрізка [0; 1]:
$z' = 2x$, $z' = 0$ при $x = 0$, $z(0) = 16$, $z(1) = 17$.
Отримали $\underline{z(0, 2) = 16}$.

г) при $x = 0$ маємо $z = 8y$, $0 \le y \le 2$. Функція монотонно зростає і на кінцях відрізка [0; 2] набуває значення $z(0) = 0$, $z(2) = 16$.

3) Порівнюючи отримані значення функції, знаходимо, що $z_{найб.} = z(1, 2) = 17$, $z_{найб.} = z(1, 0) = -3$.

Тема IV. **Диференціальні Рівняння**.

§ 1. Диференціальні рівняння першого порядку.

1. Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь.

В інтегральному численні за заданою похідною деякої функції визначалась сама функція. Однак часто, при розв'язуванні геометричних і фізичних задач постає більш загальна задача: знайти функцію, якщо відомо співвідношення між цією невідомою функцією, її похідними і незалежними змінними.

Розглянемо дві задачі.

Приклад 1. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку (1; 3) і має ту властивість, що відрізок дотичної (проведеної в будь-якій її точці), який міститься між осями координат, ділиться точкою дотику навпіл.

Нехай M(x; y) – довільна точка шуканої кривої y = f(x) (рис. 40). За умовою AM = MB, якщо AB – дотична проведена в

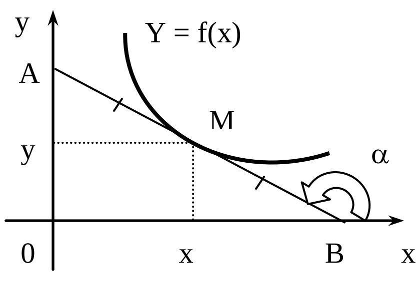


Рис. 40

точці M. Тоді $\frac{OA}{OB} = \mathrm{tg} ABO.$ Оскільки $y'(x) = \mathrm{tg}\alpha = -\,\mathrm{tg}\ ABO$, OA = 2y, OB = 2x, то маємо співвідношення $\frac{y}{x} = -y'$, яке зв'язує незалежну змінну x, шукану функцію y(x) і її похідну y′(x), тобто дістали диференціальне рівняння.

Як знайти невідому функцію y = f(x) (розв'язати отримане рівняння) поки не знаємо. Однак легко перевірити, що функція виду $y = \frac{C}{x}$ задовольняє рівняння $\frac{y}{x} = -y'$. Дійсно, якщо $y = \frac{C}{x}$, то $y' = -\frac{C}{x^2} \Rightarrow \frac{y}{x} = -y'$. Для визначення C = const використовуємо додаткову умову: крива проходить через точку (1; 3). $3 = \frac{C}{1} \Rightarrow C = 3.$ Отже, шукана крива є гіпербола $y = \frac{3}{x}.$

Приклад 2. Населення країни зростає з швидкістю, пропорційною наявній кількості. Знайти закон залежності кількості населення від часу.

Нехай x – кількість населення в момент часу t. Оскільки швидкість зміни x є похідною за часом t, то, згідно з умовою задачі
$\frac{dx}{dt} = kx,$ де k – коефіцієнт пропорційності. Отримали співвідношення, яке зв'язує невідому функцію x(t) і її похідну $x'(t)$, тобто дістали диференціальне рівняння.

Перевірте самостійно, що функція виду $x = Ce^{kt}$ задовільняє дане рівняння.

Як бачимо, розглянуті задачі приводять до диференціальних рівнянь. Перш ніж перейти до вивчення методів їх розв'язку, ознайомимось з основними означеннями і поняттями.

2. Основні поняття.

Означення 1. Диференціальним рівнянням називається рівняння, що зв'язує незалежну змінну x, невідому функцію y = f(x) і її похідні $y', y'', ..., y^{(n)}$

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

Якщо в диференціальному рівнянні невідома функція залежить від однієї змінної, то диференціальне рівняння називається звичайним, якщо від кількох змінних, – рівнянням у частинних похідних.

Означення 2. Порядком диференціального рівняння називається порядок найвищої похідної, яка входить в дане рівняння. Наприклад, $x(y')^3 + 2y^2 - 1 = 0$ – звичайне диференціальне рівняння першого порядку, $y'\sin x - y''' = 0$ – звичайне диференціальне рівняння третього порядку.

Означення 3. Розв'язком або інтегралом диференціального рівняння (1) називається така диференційована функція y = f(x), яка, будучи підставленою в це рівняння, перетворює його в тотожність

$$F(x,\ f(x),\ f'(x),\ f''(x), ...,\ f^{(n)}(x)) \equiv 0$$

Графік цієї функції називається інтегральною кривою заданого рівняння. Наприклад, функція $y = \sin x$ є розв'язком рівняння $y'' + y = 0$. Дійсно, якщо $y = \sin x$, то $y'=\cos x$, $y''=-\sin x$, $-\sin x + \sin x \equiv 0$. Функція виду $y = C_1\sin x + C_2\cos x$ є теж розв'язком рівняння $y'' + y = 0$ (перевірте).

В цьому параграфі будемо розглядати звичайні диференціальні рівняння першого порядку, т. б. Рівняння виду

$F(x, y, y') = 0$ (2) або $y' = f(x, y)$, (3)

якщо вони розв'язані відносно похідної.

Для таких рівнянь має місце теорема Коші про існування і єдність розв'язку диференціального рівняння.

<u>Теорема Коші.</u> Якщо в диференціальному рівнянні (3) функція $f(x, y)$ неперервна разом з частинною похідною $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ в деякій області Д, що містить точку $M_0(x_0;\ y_0)$, то рівняння має єдиний розв'язок

$$y = \varphi(x),$$

що задовольняє початкову умову $y_0 = \varphi(x_0)$

Геометричний зміст теореми: існує і причому єдина функція $y = \varphi(x)$, графік якої проходить через точку $(x_0; y_0)$.

Часто початкову умову $y_0 = \varphi(x_0)$ записують у вигляді $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

<u>Означення 4.</u> Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називається функція

$$y = \varphi(x, C), \qquad (4)$$

яка залежить від однієї довільної сталої C і задовольняє умовам:

1) вона є розв'язком рівняння (3) при будь-яких допустимих значеннях сталої C;

2) яка б початкова умова $y_0 = \varphi(x_0)$ не була задана, можна знайти таке значення сталої $C = C_0$, при якому ця умова буде задовільнена $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$.

Приклад. Знайти розв'язок рівняння $y' = \sin x$, який задовольняє початкову умову $y\big|_{x=\pi} = 2$.

$y = -\cos x + C$ – загальний розв'язок диференціального рівняння. Підставляючи у загальний розв'язок замість x і y відповідні значення, дістанемо $2 = -\cos\pi + C$, звідки $C = 1$.

Отже, $y = -\cos x + 1$.

Рівняння $\Phi(x, y, C) = 0$ називається загальним інтегралом диференціального рівняння (3) в неявній формі, якщо воно визначає $y = \varphi(x, C)$ – загальний розв'язок рівняння (3)

Розв'язок $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$, який дістаємо з загального розв'язку при конкретному значенні $C = C_0$, називають частинним. $y = -\cos x + 1$ – частинний розв'язок диференціального рівняння.

Зауваження. У диференціального рівняння може існувати розв'язок, який неможливо отримати з загального розв'язку ні при якому значенні сталої C, включаючи $\pm\infty$. Такий розв'язок може бути особливим в тому розумінні, що в кожній його точці порушується умова теореми Коші (функція f(x, y) чи $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ перестає бути неперервною або визначеною в околі деякої точки області Д).

3. Рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння вигляду

$$y' = f(x)\cdot g(y), \qquad (5)$$

де права частина зображується у вигляді добутку двох функцій, одна з яких залежить тільки від x, а друга – тільки від y, називається рівнянням з відокремлюваними змінними.

$$y' = f(x)\cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y) \Rightarrow dy = f(x)\cdot g(y)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx,\ g(y) \neq 0.$$

Розглядаючи y як функцію від x, остання рівність є рівності диференціалів двох функцій, із якої за властивістю невизначеного інтеграла випливає рівність

$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$ загальний інтеграл диференціального рівняння (5)

Диференціальне рівняння вигляду

$$f_1(x)\cdot g_1(y)dx + f_2(x)\cdot g_2(y)dy = 0, \qquad (6)$$

також називається рівнянням з відокремлюваними змінними.

Поділимо ліву і праву частини рівняння (6) на $g_1(y)$ $f_2(x) \neq 0$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0$$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy$$

Інтегруючи ліву частину за x, а праву за y, дістанемо

$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy + C$ – загальний інтеграл диференціального рівняння (6)

Приклад 1. Розв’язати рівняння $y' = \frac{y}{x^2}$

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними

$y' = \frac{1}{x^2} \cdot y$, де $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(y) = y$; $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2} \Rightarrow dy = \frac{y}{x^2}dx.$

Відокремимо змінні в заданому рівнянні, поділивши його на $y \neq 0$.

Дістанемо $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2}$. Інтегруючи останнє рівняння, маємо

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x^2} + C_1,$$

$\ln|y| = -\frac{1}{x} + \ln|C|$, (для зручності сталу інтегрування записали в логарифмічній формі $C_1 = \ln|C|$).

$$\ln|y| - \ln|C| = -\frac{1}{x},$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\frac{1}{x},$$

$\frac{y}{C} = e^{-\frac{1}{x}} \Rightarrow y = Ce^{-\frac{1}{x}}$ – загальний розв’язок диференціального рівняння

З’ясуємо чи існують особливі розв’язки.

Нехай y = 0. Оскільки функція y = 0 задовольняє задане диференціальне рівняння, то являється його розв’язком. Однак, розв’язок y = 0 не є особливим, тому що отримується з загального при C = 0.

Приклад 2. Розв’язати рівняння $\sqrt{1-y^2}dx + \sqrt{1-x^2}dy = 0$

Маємо диференціальне рівняння I-го порядку з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні в заданому рівнянні, поділивши його на $\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} \neq 0.$ Дістанемо

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

Інтегруючи, маємо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = C_1$$

arcsinx + arcsiny = arcsinC – загальний інтеграл,

або sin(arcsinx + arcsiny) = sin(arcsinC)

sin(arcsinx)·cos(arcsiny) + cos(arcsinx)· sin(arcsiny) = sin(arcsinC).

Враховуючи, що sin(arcsinx) = x, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$, дістанемо

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C$$

Нехай $\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} = 0,$ тоді x = ± 1, y = ± 1.

Функції y = ± 1 є розв’язком диференціального рівняння і їх не можна отримати з загального інтеграла ні при якому значенні C.

Отже, y = ± 1 – особливі розв’язки.

4. Однорідні рівняння.

Означення 1. Функція $f(x, y)$ називається однорідною функцією n-го виміру відносно змінних x та y, якщо при всякому $\lambda \neq 0$ виконується рівність

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n \cdot f(x, y), \qquad (\forall \lambda \in R).$$

Наприклад, $f(x, y) = 3x^2 - 4xy + y^2$

$$f(\lambda x, \lambda y) = 3(\lambda x)^2 - 4(\lambda x)(\lambda y) + (\lambda y)^2 = \lambda^2(3x^2 - 4xy + y^2) = \lambda^2 f(x, y).$$

Дана функція є однорідною другого виміру ($n = 2$) відносно змінних x та y.

Означення 2. Диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y)$$

називається однорідним, якщо $f(x, y)$ є однорідна функція нульового виміру ($n = 0$).

Розглянемо метод розв'язку такого рівняння.

За умовою однорідного рівняння

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 \cdot f(x, y) = f(x, y).$$

Нехай $\lambda = \dfrac{1}{x}$. Отримаємо $f(x, y) = f\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$,

тобто однорідна функція нульового виміру залежить тільки від відношення аргументів $\dfrac{y}{x}$.

Маємо
$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

Введемо нову змінну $u = \dfrac{y}{x}$, де $u = u(x)$, звідки

$$y = ux,$$

$$y' = u'x + u = \frac{du}{dx}x + u$$

Підставляючи вираз похідної в диференціальне рівняння $\dfrac{dy}{dx} = f\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$, отримаємо

$x \cdot \dfrac{du}{dx} + u = f(1, u)$ – рівняння з відокремлюваними змінними.

Дійсно $$x \cdot \frac{du}{dx} = f(1, u) - u,$$

$$\frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}$$

Загальний інтеграл отриманого рівняння:

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Підставляючи після інтегрування замість u відношення $\frac{y}{x}$, отримаємо шукану залежність y від x.

Отже, однорідне диференціальне рівняння за допомогою підстановки $y = u(x) \cdot x$ зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$.

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{2\lambda^2 xy}{\lambda^2 (x^2 - y^2)} = \lambda^0 f(x, y)$$

Таким чином, функція $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ – однорідна функція нульового виміру. Маємо однорідне диференціальне рівняння.

Виконаємо підстановку: $y = ux$,

$$y' = u'x + u.$$

Отримаємо $$u'x + u = \frac{2x \cdot ux}{x^2 - u^2 x^2},$$

$$u'x + u = \frac{x^2 2u}{x^2 (1 - u^2)},$$

$$u'x = \frac{2u}{1 - u^2} - u,$$

$$\frac{du}{dx}x=\frac{u+u^3}{1-u^2}$$ – рівняння з відокремлюваними змінними.

Відокремимо змінні: $\frac{(1-u^2)du}{u(1+u^2)}=\frac{dx}{x}$

Проінтегруємо обидві частини рівності:

$$\int\frac{(1-u^2)du}{u(1+u^2)}=\int\frac{dx}{x}+\ln|C|,$$

$$\int\frac{(1+u^2)-2u^2}{u(1+u^2)}du=\ln|x|+\ln|C|,$$

$$\int\frac{(1+u^2)du}{u(1+u^2)}-\int\frac{2u^2du}{u(1+u^2)}=\ln|Cx|,$$

$$\int\frac{du}{u}-\int\frac{d(1+u^2)}{1+u^2}=\ln|Cx|,$$

$$\ln|u|-\ln\left|1+u^2\right|=\ln|Cx|,$$

$$\ln\left|\frac{u}{1+u^2}\right|=\ln|Cx|,$$

$$\frac{u}{1+u^2}=Cx$$

Підставимо в останню рівність замість u відношення $\frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)}=Cx\ \Rightarrow\ \frac{y}{x^2+y^2}=C\ \Rightarrow\ C(x^2+y^2)=y\ -$$

– загальний інтеграл диференціального рівняння.

Рівняння вигляду

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$$

також називається однорідним диференціальним рівнянням, якщо функції f(x, y) і g(x, y) є однорідними однакового виміру відносно змінних x та y.

Приклад 2. Розв’язати рівняння $(x^2 + y^2)dx + 4xydy = 0$.

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \qquad g(x, y) = 4xy,$$
$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2(x^2 + y^2), \qquad g(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 \cdot 4xy.$$

Таким чином, функції $f(x, y)$ і $g(x, y)$ однорідні однакового (другого, $n = 2$) виміру. Маємо однорідне диференціальне рівняння.

Підстановка: $y = ux$, $y' = u'x + u$.

Тоді $4xydy = -(x^2 + y^2)dx$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + y^2}{4xy},$$

$$u'x + u = -\frac{x^2 + u^2x^2}{4x \cdot ux},$$

$$u'x = -\frac{1+u^2}{4u} - u,$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x = -\frac{1+5u^2}{4u}$$ – рівняння з відокремлюваними змінними

Відокремлюючи змінні і інтегруючи, маємо

$$\frac{4udu}{5u^2+1} = -\frac{dx}{x},\ 4\int \frac{udu}{5u^2+1} = -\int \frac{dx}{x} + \ln|C|,\ \frac{4}{10}\int \frac{d(5u^2+1)}{5u^2+1} = -\ln|x| + \ln|C|,$$

$$\frac{2}{5}\ln\left|5u^2+1\right| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|,\quad 5u^2+1 = \left(\frac{C}{x}\right)^{\frac{5}{2}},\quad 5u^2+1 = \frac{C_1}{\sqrt{x^5}},\quad C_1 = \sqrt{C^5}$$

$u = \pm\sqrt{\frac{1}{5}\left(\frac{C_1}{\sqrt{x^5}} - 1\right)}$. Повертаючись до змінної y, знаходимо

$$\frac{y}{x} = \pm\sqrt{\frac{1}{5}\left(\frac{C_1}{\sqrt{x^5}} - 1\right)} \Rightarrow y = \pm x\sqrt{\frac{1}{5}\left(\frac{C_1}{\sqrt{x^5}} - 1\right)}$$ – загальний розв'язок диференціального рівняння.

5. Рівняння, які зводяться до однорідних.

До них належать рівняння вигляду

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \qquad (1)$$

Якщо $c_1 = c_2 = 0$, то дане рівняння однорідне.

Якщо ж хоч би одне з чисел c_1 або c_2 відмінне від нуля, то за допомогою підстановки

$$\begin{cases} x = x_1 + h, \\ y = y_1 + k, \end{cases} \quad \text{де } h \text{ і } k \text{ – сталі дійсні числа,}$$

рівняння можна звести до однорідного.

Зазначимо, що $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$, і виконаємо вказану підстановку:

$$y' = f\left(\frac{a_1(x_1+h)+b_1(y_1+k)+c_1}{a_2(x_1+h)+b_2(y_1+k)+c_2}\right) = f\left(\frac{a_1x_1+b_1y_1+(a_1h+b_1k+c_1)}{a_2x_1+b_2y_1+(a_2h+b_2k+c_2)}\right)$$

Числа h і k виберемо так:

$$\begin{cases} a_1h+b_1k+c_1 = 0, \\ a_2h+b_2k+c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1h+b_1k = -c_1, \\ a_2h+b_2k = -c_2 \end{cases}$$

Розглянемо два випадки:

1) визначник системи лінійних рівнянь відмінний від нуля, т.б. $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$

Тоді система має єдиний розв'язок.

При такому виборі h і k диференціальне рівняння отримає вигляд: $y_1' = f\left(\frac{a_1x_1+b_1y_1}{a_2x_1+b_2y_1}\right)$

А це – однорідне рівняння, що за допомогою підстановки $y_1=u(x_1)\cdot x_1$ зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними;

2) визначник системи дорівнює нулю, т. б.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda \Rightarrow a_1 = \lambda a_2, b_1 = \lambda b_2$$

Тоді диференціальне рівняння (1) набуде вигляду:

$$y' = f\left(\frac{\lambda a_2x+\lambda b_2y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) = f\left(\frac{\lambda(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

І за допомогою заміни

$$z(x) = a_2x+b_2y(x),$$

$$z'(x) = a_2 + b_2 y'(x) \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \frac{z'(x) - a_2}{b_2}$$

зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{z' - a_2}{b_2} = f\left(\frac{\lambda z + c_1}{z + c_2}\right).$$

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y' = \dfrac{3x + 2y - 1}{2x - y + 2}$

Маємо диференціальне рівняння першого порядку, яке зводиться до однорідного.

Виконаємо підстановку: $\begin{cases} x = x_1 + h, \\ y = y_1 + k \end{cases}$

Тоді $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy_1}{dx_1}$ і

$$y_1' = \frac{3(x_1 + h) + 2(y_1 + k) - 1}{2(x_1 + h) - (y_1 + k) + 2} = \frac{3x_1 + 2y_1 + (3h + 2k - 1)}{2x_1 - y_1 + (2h - k + 2)}$$

Числа h і k виберемо так, щоб виконувались рівності:

$$\begin{cases} 3h + 2k - 1 = 0, \\ 2h - k + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3h + 2k = 1, \\ 2h - k = -2 \end{cases}$$

Визначник системи $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 4 = -7 \neq 0 \Rightarrow$ система має єдиний розв'язок, який знайдемо за формулами Крамера

$$h = \frac{\Delta_h}{\Delta}, \; k = \frac{\Delta_k}{\Delta}.$$

Маємо $\Delta_h = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3, \; \Delta_k = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8, \; h = -\dfrac{3}{7}, \; k = \dfrac{8}{7}.$

Виходить: $\begin{cases} x = x_1 - \dfrac{3}{7}, \\ y = y_1 + \dfrac{8}{7}. \end{cases}$

Таким чином, отримали однорідне диференціальне рівняння першого порядку:

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{3x_1+2y_1}{2x_1-y_1}$$

Зведемо його до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою підстановки:

$$y'=u(x_1)\cdot x_1,\quad y_1'=u'(x_1)\cdot x_1+u.$$

$$u'x_1+u=\frac{3x_1+2ux_1}{2x_1-ux_1},$$

$$u'x_1=\frac{3+2u}{2-u}-u,$$

$\frac{du}{dx_1}\cdot x_1=\frac{3+u^2}{2-u}$ – рівняння з відокремлюваними змінними

Відокремлюючи змінні і інтегруючи, отримуємо

$$\int\frac{(2-u)du}{u^2+3}=\int\frac{dx_1}{x_1}+\ln|C|,$$

$$2\int\frac{du}{u^2+3}-\int\frac{udu}{u^2+3}=\ln|x_1|+\ln|C|,$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln\left|u^2+3\right|=\ln|Cx_1|$$

Виконуючи обернену підстановку, повернемось до змінних x і y.

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\frac{y_1}{x_1}}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y_1{}^2}{x_1{}^2}+3\right)=\ln|Cx_1|,$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{y-\frac{8}{7}}{\left(x+\frac{3}{7}\right)\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\left(y-\frac{7}{8}\right)^2}{(x+\frac{3}{7})^2}+3\right)=\ln\left|C\left(x+\frac{3}{7}\right)\right|,$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{7y-8}{(7x+3)\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{(7y-8)^2}{(7x+3)^2}+3\right)=\ln\left|C\left(x+\frac{3}{7}\right)\right|$$

– загальний інтеграл даного диференціального рівняння.

Приклад 2. Розв’язати рівняння $y' = \dfrac{4x-2y+7}{2x-y-1}$.

$y' = \dfrac{2(2x-y)+7}{2x-y-1}$.

Маємо диференціальне рівняння першого порядку виду

$$y' = f\left(\frac{\lambda(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right), \text{ де } \lambda = 2$$

Зробимо заміну: $z = 2x - y$,

$$z' = 2 - y' \Rightarrow y' = 2 - z'$$

Тоді

$$2 - z' = \frac{2z+7}{z-1},$$

$$z' = 2 - \frac{2z+7}{z-1},$$

$\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{-9}{z-1}$ – рівняння з відокремлюваними змінними

$$\int (z-1)dz = -9\int dx + C,$$

$$\frac{z^2}{2} - z = -9x + C$$

$$\frac{(z-1)^2}{2} = -9x + C$$

Повертаючись до змінних x і y, знаходимо загальний інтеграл заданого рівняння:

$$(2x - y - 1)^2 = 2(C - 9x)$$

6. Лінійні рівняння.

Означення. Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, лінійне відносно невідомої функції y і її похідної y'. Вона має вид

$$y' + P(x)\cdot y = Q(x), \qquad (1)$$

де $P(x)$, $Q(x)$ – задані неперервні функції від x.

Якщо $Q(x) \equiv 0$, то рівняння (1), яке має вигляд

$$y' + P(x)y = 0,$$

називається лінійним однорідним. Якщо $Q(x) \neq 0$, то воно називається лінійним неоднорідним.

Рівняння (1) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою підстановки

$$y = u(x) \cdot v(x),$$

тоді $$y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Підставляючи значення y і y′ в рівняння (1), дістаємо

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$$

Згрупуємо доданки, що містять u(x)

$$u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x)$$

Одну з функцій u(x) або v(x) можна вибрати довільно. Тому виберемо таку функцію v(x), щоб вираз у дужках дорівнював нулю: $v'+P(x)v=0$.

Розв'язок рівняння (1) зводиться до розв'язку системи:

$\begin{cases} v' + P(x)v = 0, \\ u'v = Q(x) \end{cases}$ рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dx} = -P(x)v, \\ \dfrac{du}{dx} v = Q(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dv}{v} = -P(x)dx, \\ du = \dfrac{Q(x)}{v} dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int \dfrac{dv}{v} = -\int P(x)dx, \\ \displaystyle\int du = \int \dfrac{Q(x)}{v} dx + C \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln|v| = -\displaystyle\int P(x)dx, \\ u = \displaystyle\int \dfrac{Q(x)}{v} dx + C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = e^{-\int P(x)dx}, \\ u = \displaystyle\int Q(x) \cdot e^{+\int P(x)dx} dx + C. \end{cases}$$

Отже, $y = u \cdot v = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x) \cdot e^{+\int P(x)dx} dx + C\right)$ – загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння (1).

Приклад. Розв'язати рівняння $y' + y\,\mathrm{tg}x = \cos^2 x$.

Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку, де $P(x) = = \mathrm{tg}x$, $Q(x) = \cos^2 x$

Виконуючи підстановку $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, отримаємо

$$u'v + uv' + uv\,\mathrm{tg}x = \cos^2 x,$$

або $$u'v + u(v' + v\,\mathrm{tg}x) = \cos^2 x$$

Знайдемо таку функцію v, щоб $v' + v\,\mathrm{tg}x = 0$. Тоді розв'язок даного диференціального рівняння зводиться до розв'язку системи двох рівнянь з відокремлюваними змінними:

$$\begin{cases} v' + v\,tgx = 0, \\ u'v = \cos^2 x \end{cases}$$

Визначаємо v: $\frac{dv}{dx} + v\,tgx = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -v\,tgx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} =$

$$= -\int \frac{\sin x}{\cos x}dx \Rightarrow \ln|v| = \ln|\cos x| \Rightarrow v = \cos x$$

Підставляючи вираз функції v в друге рівняння системи, отримуємо рівняння для визначення u: $u'\cos x = \cos^2 x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow \int du = \int \cos x dx \Rightarrow u = \sin x + C$$

Загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння $y = uv = \cos x(\sin x + C)$.

7. Рівняння Бернуллі.

Означення. Диференціальне рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \qquad (1)$$

де P(x), Q(x) – неперервні функції, $n \in R$, причому $n \neq 0$, $n \neq 1$, називається рівняння Бернуллі.

При n = 0 воно перетворюється в лінійне диференціальне рівняння $y' + P(x)y = Q(x)$, метод розв'язку якого було розглянуто в п. 6.

При n = 1 – в рівняння з відокремлюваними змінними

$$y' = (Q(x) - P(x))y$$

Рівняння Бернуллі зводиться до лінійного за допомогою підстановки $z = y^{-n+1}$.

Тоді $z' = (-n+1)y^{-n} \cdot y' \Rightarrow y' = \frac{z'}{(-n+1)y^{-n}}$

Поділимо обидві частини рівняння (1) на y^n, дістанемо

$$y^{-n} \cdot y' + P(x)y^{-n+1} = Q(x)$$

Підставляючи значення z і z′ в останнє рівняння, будемо мати

$\frac{z'}{-n+1} + P(x)z = Q(x), \quad z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$ – лінійне відносно z і z′ рівняння. Розв'язуючи його відносно z за допомогою підстановки $z = u\cdot v$ і підставляючи замість z вираз y^{-n+1}, отримаємо загальний розв'язок рівняння Бернуллі.

Приклад. Розв'язати рівняння $y' + xy = 3xy^3$.

Маємо рівняння виду $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, де $P(x)= x$, $Q(x)=3x$, $n = 3$, яке називається рівняння Бернуллі.

Поділимо обидві частини рівняння на y^3:

$$y^{-3}y' + xy^{-2} = 3x$$

Покладаючи $z = y^{-2}$, знаходимо $z' = -2y^{-3}\cdot y' \Rightarrow y^{-3}\cdot y' = -\frac{1}{2}z'$.

Після підстановки, рівняння матиме вигляд:

$$-\frac{1}{2}z' + xz = 3x$$

Отримали лінійне диференціальне рівняння відносно z і z′. Як вже відомо, воно зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допогою підстановки

$$z = uv \Rightarrow z' = u'v + uv'$$

Підставляючи значення z і z′ в рівняння, дістаємо

$$-\frac{1}{2}(u'v + uv') + xuv = 3x,$$

$$u'v + uv' - 2xuv = -6x,$$

$$u'v + u(v' - 2xv) = -6x,$$

$$\begin{cases} v' - 2xv = 0, \\ u'v = -6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dv}{dx} = 2xv, \\ \frac{du}{dx}\cdot v = -6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int\frac{dv}{v} = \int 2xdx, \\ \frac{du}{dx}\cdot v = -6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln|v| = x^2, \\ \frac{du}{dx}\cdot v = -6x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = e^{x^2}, \\ \frac{du}{dx}e^{x^2} = -6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = e^{x^2}, \\ \int du = -6\int xe^{-x^2}dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = e^{x^2}, \\ u = 3\int e^{-x^2}d(-x^2) = 3e^{-x^2} + C. \end{cases}$$

Отже, $z = uv = (3e^{-x^2} + C)e^{x^2} = 3 + Ce^{x^2}$

$$y^{-2} = 3 + Ce^{x^2} \Rightarrow \frac{1}{y^2} = 3 + Ce^{x^2} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{3 + Ce^{x^2}}}$$ – загальний розв'язок заданого рівняння.

§ 2. Диференціальні рівняння вищих порядків.

1. Основні поняття.

Диференціальним рівнянням n-го порядку називається рівняння виду

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

або

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

якщо воно розв’язане відносно старшої похідної $y^{(n)}$.

Будемо розглядати тільки такі рівняння вищих порядків, які можна розв’язати відносно $y^{(n)}$. Для рівняння (2) має місце теорема Коші.

Теорема Коші (про існування і єдиність розв’язку). Якщо в диференціальному рівнянні (2) функція $f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$ і її частинні похідні за аргументами $y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$ неперервні в деякій області Д, що містить точку $(x_0, y_0, y_0', y_0'', ..., y_0^{(n-1)})$, то рівняння має єдиний розв’язок $y = y(x)$,

що задовольняє початковим умовам

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\big|_{x=x_0} = y_0', \quad ..., \quad y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}, \qquad (3)$$

Задача Коші для диференціального рівняння n-го порядку полягає в тому, щоб знайти розв’язок $y = y(x$ диференціального рівняння (1) чи (2), який задовольняє початковим умовам (3).

Якщо розглядати рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y') \qquad (4)$$

то початкові умови розв’язку $y = y(x)$ слідуючи:

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y'_0 \qquad (5)$$

Єдиність розв’язку задачі Коші для диференціального рівняння (4) з початковими умовами (5) треба розуміти так, що через задану точку площини $(x_0; y_0)$ проходить єдина інтегральна крива цього рівняння, дотична до якої в точці $(x_0; y_0)$ складає з додатнім напрямом осі 0х кут α_0, тангенс якого $tg\alpha_0 = y'_0$. Таким чином, існує нескінченна множина інтегральних кривих рівняння (4), що проходить через точку $(x_0; y_0)$, і тільки одна з них нахилена до осі 0х під кутом, тангенс якого дорівнює заданому числу y'_0.

Означення 1. Загальним розв’язком диференціального рівняння n-го порядку називається функція

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n), \qquad (6)$$

яка залежить від n довільних сталих і задовольняє умовам:

1) вона є розв'язком рівняння (2) при будь-яких допустимих значеннях сталих $C_1, C_2, ..., C_n$;

2) які б початкові умови (3) не були задані, можна знайти такі значення сталих $C_i (i = 1, 2, ..., n)$, при яких ці умови будуть задовільнені, тобто

$\varphi(x_0, C_{10}, C_{20}, ..., C_{n0}) = y_0$, $\varphi'(x_0, C_{10}, C_{20}, ..., C_{n0}) = y'_0$, ...,
$\varphi^{(n-1)}(x_0, C_{10}, C_{20}, ..., C_{n0}) = y_0^{(n-1)}$.

Загальний розв'язок, отриманий в неявній формі:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0,$$

називається загальним інтегралом диференціального рівняння (2).

Розв'язок, який отримали з загального розв'язку (6) при конкретних значеннях сталих C_i, називається частинним розв'язком диференціального рівняння (2).

2. Рівняння виду $y^{(n)} = f(x)$.

Загальний розв'язок рівняння $y^{(n)} = f(x)$ шукаємо шляхом послідовного інтегрування

$$y^{(n-1)} = \int y^{(n)} dx + C_1 = \int f(x) dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x) dx + C_1 \right) dx + C_2,$$

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' = 1 - \frac{3}{x^3} + 4\cos 2x$$

Інтегруючи послідовно, маємо:

$$y'' = \int \left(1 - \frac{3}{x^3} + 4\cos 2x \right) dx = \int dx - 3\int x^{-3} dx + 4\int \cos 2x dx = x + \frac{3}{2x^2} +$$
$$+ 2\sin 2x + C_1,$$

$$y' = \int \left(x + \frac{3}{2x^2} + 2\sin 2x + C_1 \right) dx = \int x dx + \frac{3}{2}\int x^{-2} dx + 2\int \sin 2x dx +$$
$$+ C_1 \int dx = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2x} - \cos 2x + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2x} - \cos 2x + C_1 x + C_2 \right) dx = \frac{1}{2}\int x^2 dx - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x} - \int \cos 2x dx +$$

$$+C_1\int x dx + C_2\int dx = \frac{x^2}{6} - \frac{3}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3$$

загальний розв'язок заданого рівняння

3. Частинні випадки диференціальних рівнянь другого порядку.

1) Рівняння виду

$$y'' = f(x, y') \qquad (1)$$

Права частина цього рівняння не містить шуканої функції y. За допомогою підстановки $y' = p(x)$ зводиться до рівняння першого порядку:

$$p' = f(x, p)$$

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y'' + \frac{y'}{x} = x$

Маємо диференціальне рівняння виду $y'' = f(x, y')$, яке не містить y.

Нехай $y' = p(x)$. Тоді $y'' = p'(x)$.

Отже, після заміни рівняння перетворилось у диференціальне рівняння першого порядку: $p' + \frac{1}{x}\cdot p = x$.

Це лінійне диференціальне рівняння. Розв'язуємо його вже відомим методом.

Покладаючи $p = uv$, знаходимо $p' = u'v + uv'$. Дістаємо

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = x,$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{1}{x}v\right) = x,$$

$$\begin{cases} v' + \frac{1}{x}v = 0, \\ u'v = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \\ \frac{du}{dx}v = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x}, \\ \frac{du}{dx}v = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln|v| = -\ln|x|, \\ \frac{du}{dx}v = x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{1}{x}, \\ \frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{x} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{1}{x}, \\ \int du = \int x^2 dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{1}{x}, \\ u = \frac{x^3}{3} + C_1. \end{cases}$$

Виходить $p = uv = \left(\frac{x^3}{3} + C_1\right)\frac{1}{x} = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}$,

$$y' = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x},$$

звідки $y = \int\left(\frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}\right)dx = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln|x| + C_2$ – загальний розв'язок заданого в умові диференціального рівняння.

2) Рівняння виду

$$y'' = f(y, y') \qquad (2)$$

Права частина цього рівняння не містить явно незалежну змінну x. Зводиться до рівняння першого порядку за допомогою підстановки $y' = p(y)$, де, на відміну від переднього випадку, p вважається функцією від y. Тоді, використовуючи правило диференціювання складної функції, дістаємо $y'' = p_y' \cdot y_x' = p'p$. Рівняння (2) матиме вигляд $p'p = f(y, p)$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $2yy'' + (y')^2 = 0$.

Маємо диференціальне рівняння виду $y'' = f(y, y')$, яке не містить явно x.

Нехай $y' = p(y)$. Тоді $y'' = p'p$. Отже, маємо $2yp'p + p^2 = 0$ – диференціальне рівняння першого порядку відносно p з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні і проінтегруємо:

$$2y \cdot \frac{dp}{dy} \cdot p = -p^2,$$

$$2y\,dp = -p\,dy, \quad p \neq 0$$

$$\int \frac{dp}{p} = -\frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} + \ln|C_1|,$$

$$\ln|p| = -\frac{1}{2}\ln|y| + \ln|C_1|,$$

$$\ln|p| = \ln\left|\frac{C_1}{\sqrt{y}}\right|,$$

$$p = \frac{C_1}{\sqrt{y}}.$$

Підставляючи замість p його значення, матимемо

$$y' = \frac{C_1}{\sqrt{y}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}},$$

$$\int \sqrt{y}dy = \int C_1 dx$$

$$\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} = C_1 x + C_2$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{9(C_1 x + C_2)}{4}}$$ – загальний розв'язок заданого рівняння.

Досліджуємо розв'язок p = 0: $p = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow y = C.$

Розв'язок y = C не є особливим, тому що отримується з загального при $C_1 = 0$.

4. Лінійні диференціальні рівняння вищого порядку.

Означення 1. Рівняння виду

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x), \qquad (1)$$

де функції $p_0(x)$, $p_1(x)$, ..., $p_{n-1}(x)$, f(x) задані і неперервні на деякому інтервалі (a; b), називається лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку.

Функція $p_0(x)$, $p_1(x)$, ..., $p_{n-1}(x)$ називають коефіцієнтами рівняння (1), а функцію f(x) – правою частиною рівняння (1).

У випадку, коли всі коефіцієнти є сталі дійсні числа, рівняння (1) називається рівнянням із сталими коефіцієнтами.

Якщо $f(x) \equiv 0$, то рівняння (1) називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням або рівнянням без правої частини.

Якщо $f(x) \not\equiv 0$, то рівняння (1) називається лінійним неоднорідним або рівняння з правою частиною.

Наприклад, рівняння $y''\sin x + 3y' - \frac{1}{x}y = 0$

є лінійним однорідним диференціальним рівнянням (ЛОДР) другого порядку, а рівняння

$$5y''' - y'' + 4y' + 2y = \cos^2 3x$$

– лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням (ЛНДР) третього порядку із сталими коефіцієнтами.

Встановимо деякі основні властивості лінійних диференціальних рівнянь, які виражаються рядом теорем.

Якщо функції $p_0(x)$, $p_1(x)$, ..., $p_{n-1}(x)$, $f(x)$ неперервні на інтервалі $(a; b)$, то для рівняння (1) має місце теорема Коші (про існування і єдиність розв'язку).

Ліву частину рівняння (1) позначають

$$L_n(y) = y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y$$

і називають лінійним диференціальним оператором n-го порядку.

Маємо $$L_n(y) = f(x) \qquad (2)$$

Очевидно, що лінійний диференціальний оператор задовольняє умовам: $$L_n(Cy) = CL_n(y) \qquad (3)$$

де C – довільна стала, $L_n(y_1 + y_2) = L_n(y_1) + L_n(y_2)$ (4)

Теорема 1. Якщо функції y_1, y_2, ..., y_n є розв'язками ЛОДР

$$L_n(y) = 0, \qquad (5)$$

то довільна лінійна комбінація цих функцій $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$, де C_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ – довільні сталі, також є розв'язком цього рівняння (довести самостійно).

При знаходженні загального і частинного розв'язків рівняння (1) важливу роль відіграє поняття лінійної залежності і лінійної незалежності функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$.

Означення 2. Функції y_1, y_2, ..., y_n називаються лінійно залежними на інтервалі $(a; b)$, якщо існує n дійсних чисел α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, з яких принаймні одне відмінне від нуля, таких, що виконується тотожність

$$\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + \ldots + \alpha_ny_n \equiv 0 \ (x \in (a; b)) \qquad (6)$$

В противному разі, тобто коли тотожність (6) виконується тільки при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, функції y_1, y_2, ..., y_n називаються лінійно незалежними на інтервалі $(a; b)$.

Означення 3. Сукупність n лінійно незалежних розв'язків y_1, y_2, ..., y_n рівняння (5) називається фундаментальною системою розв'язків.

За її допомогою будується загальний розв'язок ЛОДР (5). Справедлива слідуюча теорема.

Теорема 2. (наслідок з теореми 1). Якщо розв'язки y_1, y_2, ..., y_n ЛОДР (5) утворюють фундаментальну систему розв'язків в інтервалі (a; b), то функція

$$\tilde{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i \tag{7}$$

де C_i – довільні сталі, є загальним розв'язком рівняння (5).

Таким чином, щоб розв'язати ЛОДР (5), треба знайти n частинних розв'язків цього рівняння таких, що утворюють фундаментальну систему і побудувати з них лінійну комбінацію (7).

Означення 4. Визначником Вронського (або вронскіаном) системи функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ називається визначник

$$W[y_1, y_{2,} ... y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Теорема 3. Якщо функції y_1, y_2, ..., y_n на інтервалі (a; b) мають по-хідні до (n – 1)-го порядку включно і лінійно залежні, то визначник Вронського для цих функцій тотожно дорівнює нулю $W \equiv 0$ в (a; b).

□ За означенням 2 лінійної залежності функцій y_1, y_2, ..., y_n існують числа α_1, α_2, ..., α_n не всі одночасно рівні нулю такі, що має місце рівність $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n = 0$ для ($\forall x \in$(a; b)). Диференціюючи цю рівність (n – 1) раз, отримаємо систему n лінійних однорідних рівнянь з n невідомими α_i (i = 1, 2, ..., n). За умовою ця система має нетривіальні розв'язки (адже не всі α_i одночасно рівні нулю), тобто головний визначник системи дорівнює нулю для ($\forall x \in$ (a; b)). Але цей визначник і є визначник Вронського. Отже, $W[y_1, y_{2,} ... y_n] = 0$ ■

<u>Теорема 4.</u> Для того, щоб розв'язки y_1, y_2, ..., y_n ЛОДР (5) з неперервними коефіцієнтами були лінійно незалежними, необхідно і достатньо, щоб визначник Вронського $W \neq 0$ для $\forall x \in (a; b)$ (довести спробуйте самостійно для випадку n = 2).

Приклад 1. Функції $y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}$ лінійно незалежні, тому що вронскіан

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = e^{k_1 x} k_2 e^{k_2 x} - k_1 e^{k_1 x} e^{k_2 x} =$$

$$= e^{(k_1 + k_2)x}(k_2 - k_1) \neq 0 \text{ для } \forall x \in R, \text{ при } k_1 \neq k_2.$$

Приклад 2. Довести, що функції $y_1 = e^{kx}, y_2 = e^{kx}$ лінійно незалежні.

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} e^{kx} & xe^{kx} \\ ke^{kx} & e^{kx} + xke^{kx} \end{vmatrix} = e^{kx}(e^{kx} + xke^{kx}) - ke^{kx} xe^{kx} = e^{2kx} +$$

$$+ kxe^{2kx} - kxe^{2kx} = e^{2kx} \neq 0 \quad (\forall x \in R)$$

Оскільки вронскіан $W[y_1, y_2] \neq 0$, то функції $y_1 = e^{kx}, y_2 = xe^{kx}$ лінійно незалежні.

Приклад 3. Показати, що система функцій $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = e^{2x}$, є фундаментальною для рівняння $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$, і записати його загальний розв'язок.

Складемо вронскіан

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = e^x e^{-x} e^{2x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -6e^{2x} \neq 0 \quad (\forall x \in R)$$

Отже, функції $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = e^{2x}$ лінійно незалежні і утворюють фундаментальну систему розв'язків ЛОДР. За теоремою 2 загальний розв'язок рівняння має вигляд: $\tilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$.

Поставимо питання про знаходження загального розв'язку ЛНДР (2).

<u>Теорема 5.</u> Загальний розв'язок ЛНДР (2) має вид

$$y = \tilde{y} + y^*, \qquad (7)$$

де $\tilde{y}$ – загальний розв’язок відповідного ЛОДР (5),

а y^* – який-небудь частинний розв’язок ЛНДР (2).

□ Покажемо спочатку, що функція (7) є розв’язком рівняння (2). Справді, підставивши функцію $y = \tilde{y} + y^*$ в рівняння $L_n(y) = f(x)$ дістанемо $L_n(y) = L_n(\tilde{y} + y^*) = L_n(\tilde{y}) + L_n(y^*) = L_n(\sum_{i=1}^{n} C_i y_i) +$

$$+ L_n(y^*) = \sum_{i=1}^{n} C_i L_n(y_i) + f(x) = 0 + f(x) = f(x)$$

Перший доданок $\sum_{i=1}^{n} C_i L_n(y_i) = 0$, оскільки y_i ($i = 1, 2, ..., n$) – це частинні розв’язки відповідного однорідного рівняння $L_n(y) = 0$. Другий доданок $L_n(y^*) = f(x)$, оскільки y^* – розв’язок рівняння $L_n(y)=f(x)$. Отже, функція (7) є розв’язком рівняння (2).

Покажемо тепер, що функція (7) є загальним розв’язком рівняння (2), тобто доведемо, що довільні сталі C_i, які містяться у функції (7), можна підібрати так, щоб розв’язок рівняння (2) задовільнив наперед задані умови:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y'_0,\ ...,\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}.$$

Запишемо функцію (7) у вигляді

$y = \tilde{y} + y^* = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y^*$ і підставимо початкові умови

$$y_0 = C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + ... + C_n y_{n0} + y_0^*,$$

$$y'_0 = C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} + ... + C_n y'_{n0} + y_0^{*\prime},$$

$$...$$

$$y_0^{(n-1)} = C_1 y_{10}^{(n-1)} + C_2 y_{20}^{(n-1)} + ... + C_n y_{n0}^{(n-1)} + y_0^{*(n-1)}$$

Дістали систему n-лінійних рівнянь з n невідомими $C_1, C_2, ..., C_n$:

$$\begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + ... + C_n y_{n0} = y_0 - y_0^*, \\ C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} + ... + C_n y'_{n0} = y'_0 - y_0^{*\prime}, \\ C_1 y_{10}^{(n-1)} + C_2 y_{20}^{(n-1)} + ... + C_n y_{n0}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} - y_0^{*(n-1)}, \end{cases} \qquad (8)$$

Визначник цієї системи, будучи визначником Вронського фундаментальної системи розв'язків y_1, y_2, ..., y_n, відмінний від нуля. Тому система (8) має єдиний розв'язок

$C_1 = C_{10}$, $C_2 = C_{20}$, ..., $C_n = C_{n0}$.

Отже, існують такі значення C_1, C_2, ..., C_n, при яких розв'язок рівняння (2) задовольняє задані початкові умови. Цим доведено, що функція (7) є загальним розв'язком рівняння (2) ■

5. <u>Лінійні однорідні диференціальні рівняння (ЛОДР) другого порядку із сталими коефіцієнтами.</u>

Рівняння виду

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (1)$$

де p, q – дійсні числа, називаються ЛОДР другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Загальний розв'язок рівняння (1) внаслідок теореми 2 п.4 матиме структуру $y = C_1y_1 + C_2y_2$, де y_1, y_2 – фундаментальна система розв'язків, т. б. частинні розв'язки рівняння (1), для яких вронскіан $W[y_1, y_2] \neq 0$, $\forall x \in R$.

Будемо шукати частинні розв'язки рівняння (1) у вигляді $y = e^{kx}$, де k – стале число, вибір якого означимо нижче.

Підставляючи функцію $y = e^{kx}$ і її похідні $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$ в ліву частину рівняння (1), дістаємо

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0,$$

$$e^{kx}\,(k^2 + pk + q) = 0.$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то функція $y = e^{kx}$ буде розв'язком рівняння (1) тоді і тільки тоді, коли $$k^2 + pk + q = 0 \qquad (2)$$

Для невідомого коефіцієнта k отримали квадратне рівняння (2), яке називається характеристичним рівнянням рівняння (1). Зауважимо, що характеристичне рівняння складається з даного рівняння (1) шляхом заміни y'', y', y відповідно на k^2, k, 1.

Розв'язуючи рівняння (2), знаходимо його корені k_1 і k_2

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \qquad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

від яких залежить загальний розв'язок ЛОДР (1).

Можливі такі випадки:

I. k_1 і k_2 – дійсні і різні числа ($k_1 \neq k_2$);
II. k_1 і k_2 – дійсні рівні ($k_1 = k_2$);
III. k_1 і k_2 – комплексні числа ($k_{1,2} = \alpha \pm \beta_i$).

Розглянемо кожен випадок окремо.

Випадок I. Корені характеристичного рівняння дійсні і різні ($k_1 \neq k_2$).

Оскільки розв'язок рівняння (1) ми шукали у вигляді $y = e^{kx}$, то частинні розв'язки рівняння (1) будуть мати вигляд

$$y_1 = e^{k_1 x}, \qquad y_2 = e^{k_2 x},$$

Визначник Вронського $W[y_1, y_2] \neq 0$ для $\forall x \in R$, при $k_1 \neq k_2$. А це означає, що функції y_1 і y_2 лінійно незалежні і утворюють фундаментальну систему розв'язків ЛОДР (1). Отже, загальний розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \tag{3}$$

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

Маємо ЛОДР II-го порядку із сталими коефіцієнтами. Запишемо характеристичне рівняння

$$k^2 - 2k - 3 = 0.$$

За теоремою Вієта його корені

$$k_1 = -1,\ k_2 = 3 \text{ – дійсні і різні.}$$

Тому загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

Випадок II. Корені характеристичного рівняння дійсні і різні ($k_1 = k_2$).
Один частинний розв'язок рівняння (1) відомий

$$y_1 = e^{k_1 x}$$

Необхідно знайти другий частинний розв'язок, який утворює з даним фундаментальну систему розв'язків.

Будемо шукати другий частинний розв'язок у вигляді $y_2 = u(x)e^{k_1 x}$, де $u(x)$ – невідома функція.

Знаходимо похідні

$$y_2' = u'(x)e^{k_1 x} + k_1 u(x)e^{k_1 x},$$

$$y_2'' = u''(x)e^{k_1 x} + 2k_1 u'(x)e^{k_1 x} + k_1^2 u(x)e^{k_1 x}.$$

Підставляючи функцію y_2 і її похідні y_2', y_2'' в ліву частину рівняння (1), дістаємо

$$u''(x)e^{k_1x} + 2k_1u'(x)e^{k_1x} + k_1^2u(x)e^{k_1x} + pu'(x)e^{k_1x} + pk_1u(x)e^{k_1x} +$$

$$+ qu(x)e^{k_1x} = 0,$$

$$e^{k_1x}(u''(x) + (2k_1 + p)u'(x) + (k_1^2 + pk_1 + q)u(x)) = 0.$$

Оскільки k_1 – корінь характеристичного рівняння (2), то

$$k_1^2 + p\,k_1 + q = 0.$$

Крім того, $k_1 = k_2 = -\dfrac{p}{2} \Rightarrow 2k_2 + p = 0.$

Маємо $e^{k_1x}u''(x) = 0,$

$$e^{k_1x} \neq 0, \quad u''(x) = 0,$$

Інтегруючи, отримаємо $u(x) = Ax + B$.

Нехай $A = 1$, $B = 0$, тоді $u(x) = x$, $y_2 = xe^{k_1x}$

Отже, загальний розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x} = e^{k_1x}(C_1 + C_2x) \qquad (4)$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 6y' + 9y = 0.$$

Маємо ЛОДР II-го порядку із сталими коефіцієнтами. Запишемо характеристичне рівняння

$$k^2 + 6k + 9 = 0.$$

Його корені $k_1 = k_2 = -3$ (дійсні і рівні)

Тому, за формулою (4) загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = e^{-3x}(C_1 + C_2x)$$

<u>Випадок III.</u> Корені характеристичного рівняння комплексні.

Позначимо комплексно-спряжені корені характеристичного рівняння через

$$k_1 = \alpha + \beta\cdot i \quad і \quad k_2 = \alpha - \beta\cdot i.$$

У такому випадку частинні розв'язки рівняння (1) мають вигляд

$$y_1 = e^{(\alpha+\beta\cdot i)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha-\beta\cdot i)x}$$

Це – комплексні функції дійсної змінної x.

Використовуючи формулу Ейлера, запишемо отримані частинні розв'язки у вигляді

$$y_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x), \quad y_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

Для того, щоб замінити комплексні частинні розв'язки дійсними, розглянемо функції

$$\tilde{y}_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad \tilde{y}_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i}$$

Вони є розв'язками рівняння (1), тому що являють собою лінійні комбінації частинних розв'язків y_1 і y_2. Можна показати, що функції $\tilde{y}_1$ і $\tilde{y}_2$ утворюють фундаментальну систему розв'язків, тобто $W[\tilde{y}_1, \tilde{y}_2] \neq 0, \ \forall x \in R$.

Нова фундаментальна система складається з дійсних функцій, а саме:

$$\tilde{y}_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad \tilde{y}_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Тому, якщо корені характеристичного рівняння комплексні: $k_{1,2} = \alpha \pm \beta \cdot i$, то загальний розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x \tag{5}$$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

Маємо ЛОДР II-го порядку із сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння

$$k^2 - 4k + 5 = 0 \qquad (Д = 16 - 20 = -4 < 0)$$

має два комплексно-спряжених корені $k_1 = 2 + i$, $k_2 = 2 - i$ ($\alpha = 2$; $\beta = 1$). Отже, за формулою (5) загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{2x}\cos x + C_2 e^{2x}\sin x = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x).$$

Приклад 4. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y'' + 4y' + 29y = 0.$$

що задовольняє початкові умови

$$y\big|_{x=0} = 0, \qquad y'\big|_{x=0} = 15.$$

Спочатку знайдемо загальний розв'язок цього рівняння. Складемо характеристичне рівняння:

$$k^2 + 4k + 29 = 0.$$

$Д = 16 - 116 = -100 < 0 \Rightarrow$ корені комплексні $k_1 = -2 + 5i$, $k_2 = -2 - 5i$ ($\alpha = -2$; $\beta = 5$).

Загальний розв'язок рівняння, згідно з формулою (5), має вигляд

$$y = C_1 e^{-2x}\cos 5x + C_2 e^{-2x}\sin 5x = e^{-2x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x).$$

Тепер використаємо початкові умови для знаходження C_1 і C_2. Підставляючи ці початкові умови у загальний розв'язок і його похідну

$$y' = (e^{-2x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x))' = -2e^{-2x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x) +$$

$$+ e^{-2x}\times(-5C_1\sin 5x + 5C_2\cos 5x) = e^{-2x}((-2C_1 + 5C_2)\cos 5x +$$

$$+ (-2C_2 - 5C_1)\sin 5x)$$

дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 0 = e^0(C_1\cos 0 + C_2\sin 0) \\ 15 = e^0((-2C_1 + 5C_2)\cos 0 + (-2C_2 - 5C_1)\sin 0) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ -2C_1 + 5C_2 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 3. \end{cases}$$

Розв'язок системи: $C_1 = 0$, $C_2 = 3$

Підставляючи значення довільних сталих C_1 і C_2 у загальний розв'язок, дістанемо шуканий частинний розв'язок

$$y = 3e^{-2x}\sin 5x.$$

6. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння (ЛНДР) другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Рівняння вигляду

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (1)$$

де p, q – дійсні числа, називається ЛНДР другого порядку із сталими коефіцієнтами, якщо $f(x) \neq 0$.

Згідно з теоремою 5 п. 4 загальний розв'язок ЛНДР (1) має вид

$$y = \tilde{y} + y^*,$$

де $\tilde{y}$ – загальний розв'язок відповідного ЛОДР: $y'' + py' + qy = 0$, а y^* – який-небудь частинний розв'язок ЛНДР (1).

Якщо права частина рівняння (1) f(x) має певний вигляд, то частинний розв'язок y^* можна знаходити методом невизначених коефіцієнтів. Розглянемо кілька випадків:

а) права частина f(x) має вигляд

$$f(x) = P_n(x)e^{mx}, \qquad (2)$$

де $P_n(x)$ – многочлен степеня n; m – дійсне число, що може дорівнювати й нулю.

У цьому випадку частинний розв'язок шукають у вигляді

$$y^* = x^r Q_n(x)e^{mx},$$

де $Q_n(x)$ – многочлен того ж степеня, що й $P_n(x)$, r – кратність, з якою входить m у число коренів характеристичного рівняння

$$k^2 + pk + q = 0.$$

r = 0, якщо m не є коренем характеристичного рівняння $m \neq k_1$ і $m \neq k_2$;

r = 1, якщо m є простим коренем характеристичного рівняння

$m = k_1 \neq k_2$ ($m = k_2 \neq k_1$);

r = 2, якщо m є двократним коренем характеристичного рівняння

$m = k_1 = k_2$.

Невідомі коефіцієнта многочлена $Q_n(x)$ шукають методом невизначених коефіцієнтів, суть якого розглянемо на конкретному прикладі.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 4y' + 3y = 4xe^{3x}$$

Маємо ЛНДР II-го порядку із сталими коефіцієнтами і правою частиною $f(x) = 4xe^{3x}$.

Загальний розв'язок даного рівняння має вид

$$y = \tilde{y} + y^*,$$

1) Знайдемо $\tilde{y}$ – загальний розв'язок відповідного ЛОДР:

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

Характеристичне рівняння

$$k^2 - 4k + 3 = 0$$

має дійсні і різні корені $k_1 = 1$, $k_2 = 3$.

Тому $\tilde{y} = C_1e^x + C_2e^{3x}$.

2) Знайдемо y* – частинний розв'язок ЛНДР. Права частина рівняння $4xe^{3x}$ має вигляд $P_1(x)e^{3x}$, де $P_1(x) = 4x$ – многочлен першого степеня. Оскільки m = 3 є простим кореним характеристичного рівняння, т. б. $m = k_2 = 3$, то r = 1 і частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y^* = xQ_n(x)e^{3x},$$

або $$y^* = x(Ax + B)e^{3x}.$$

Маємо $y^{*\prime} = (Ax^2 + Bx)'e^{3x} + (Ax^2 + Bx)'(e^{3x})' = (2Ax + B)\, e^{3x} + + (Ax^2 + Bx)e^{3x} \cdot 3 = (3Ax^2 + (2A + 3B)x + B)e^{3x}$,

$y^{*\prime\prime}=(6Ax + 2A + 3B)\, e^{3x} + (3Ax^2 + (2A + 3B)x + B)e^{3x}\cdot 3= = (9Ax^2 + (12A + 9B)x + 2A + 6B)\, e^{3x}$

Підставляючи значення y^*, $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ в задане рівняння дістаємо

$y^{*\prime\prime} - 4y^{*\prime} + 3y^* = (9Ax^2 + (12A + 9B)x + 2A + 6B)\, e^{3x} -$

$- (12Ax^2 + (8A + 12B)x + 4B)e^{3x} + (3Ax^2 + 3Bx)e^{3x} = 4xe^{3x}$,

або $$(4Ax + 2A + 2B)e^{3x} = 4xe^{3x}.$$

Скоротивши на $2e^{3x} \neq 0$ і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах, дістанемо систему

$$\left.\begin{array}{l|l} x^1 & 2A = 2 \\ x^0 & A + B = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = -1 \end{cases}$$

Отже, шуканий частинний розв'язок ЛНДР має вигляд

$y^* = x(x - 1)\, e^{3x}$.

Загальний розв'язок даного рівняння:

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1e^x + C_2e^{3x} + x(x - 1)e^{3x};$$

б) права частина f(x) має вигляд

$$f(x) = M\cos bx + N\sin bx, \qquad (3)$$

де M, N, b – дійсні числа, причому $b \neq 0$.

Тоді частинний розв'язок ЛНДР (1) шукають у вигляді

$$y^* = A\cos bx + B\sin bx,$$

якщо bi не є коренем характеристичного рівняння, і

$$y^* = x(A\cos bx + B\sin bx),$$

якщо bi є коренем характеристичного рівняння.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 4y' + 13y = 29\sin 2x.$$

Маємо ЛНДР II-го порядку із сталими коефіцієнтами і правою частиною $f(x) = 29\sin 2x$.

Загальний розв'язок цього рівняння має вид

$$y = \tilde{y} + y^*,$$

1) Знайдемо $\tilde{y}$ – загальний розв'язок відповідного ЛОДР:

$$y'' + 4y' + 13y = 0$$

Характеристичне рівняння

$$k^2 + 4k + 13 = 0$$

має комплексні корені

$$k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-13} = -2 \pm 3i \quad (\alpha = -2; \beta = 3).$$

Тому $\tilde{y} = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

2) Знайдемо y* – частинний розв'язок ЛНДР. Права частина його 29sin2x має вигляд Mcos 2x + Nsin 2x, де M = 0, N = 29. Оскільки число 2i не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y^* = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Продиференціювавши двічі, отримаємо

$$y^{*\prime} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x.$$

$$y^{*\prime\prime} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x.$$

Підставляючи значення y^*, $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ в задане рівняння дістаємо

$$y^{*\prime\prime} + 4y^{*\prime} + 13y^* = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 8A\sin 2x + 8B\cos 2x +$$
$$+ 13A\cos 2x + 13B\sin 2x = 29\sin 2x,$$

або $(9A + 8B)\cos 2x + (-8A + 9B)\sin 2x = 29\sin 2x$

Прирівнюючи коефіцієнти при cos 2x і sin 2x в обох частинах рівності, маємо систему

$$\left.\begin{array}{l|l} \cos 2x & 9A + 8B = 0 \\ \sin 2x & -8A + 9B = 29 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{8}{5}, \\ B = \dfrac{9}{5}. \end{cases}$$

Отже, шуканий частинний розв'язок ЛНДР має вигляд

$$y^* = -\frac{8}{5}\cos 2x + \frac{9}{5}\sin 2x$$

Загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = \tilde{y} + y^* = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) - \frac{8}{5}\cos 2x + \frac{9}{5}\sin 2x;$$

в) права частина f(x) має вигляд

$$f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx), \qquad (4)$$

де $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлени степеня n і m відповідно a, в – дійсні числа, причому $b \neq 0$.

Тоді частинний розв'язок ЛНДР (1) шукають у вигляді

$$y^* = e^{ax}(U_k(x)\cos bx + V_k(x)\sin bx),$$

де $U_k(x)$, $V_k(x)$ – многочлени степеня $k = \max(n, m)$ з невизначеними коефіцієнтами, якщо число $a + bi$ не є коренем характеристичного рівняння $y^* = xe^{ax}(U_k(x)\cos bx + V_k(x)\sin bx)$,
якщо число $a + bi$ є коренем характеристичного рівняння

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + y = 4x\sin x$$

Маємо ЛНДР ІІ-го порядку із сталими коефіцієнтами і правою частиною $f(x) = 4x\sin x$.

Загальний розв'язок рівняння має вид

$$y = \tilde{y} + y^*,$$

1) Знайдемо $\tilde{y}$ – загальний розв'язок відповідного ЛОДР:

$$y'' + y = 0$$

Його характеристичне рівняння

$$k^2 + 1 = 0$$

має комплексні корені $k_{1,2} = \pm i \quad (\alpha = 0; \beta = 1)$.

Тому $\tilde{y} = e^{0\cdot x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

2) Знайдемо y^* – частинний розв'язок ЛНДР. Права частина рівняння $4x\sin x$ має структуру (4) $P_0(x)\cos x + Q_1(x)\sin x$, де $a=0, b = 1$, $P_0(x) \equiv 0$ – многочлен степеня $n = 0$, $Q_1(x) = 4x$ – многочлен степеня $m = 1$. Визначимо найвищий степень многочленів $P_0(x)$, $Q_1(x)$: $k = \max(n, m) = \max(0, 1) = 1$. Оскільки число i є коренем характеристичного рівняння і $k = 1$, то частинний розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді

$$y^* = x((Ax + B)\cos x + (Cx + Д)\sin x)$$

Визначаємо похідні функції $y^* = (Ax^2 + Bx)\cos x + (Cx^2 + Дx)\sin x$

$y^{*\prime} = (2Ax + B)\cos x - (Ax^2 + Bx)\sin x + (2Cx + Д)\sin x + (Cx^2 + +Дx)\cos x = (Cx^2 + (2A + Д)x + B)\cos x + (-Ax^2 + (-B + 2C)x + Д)\sin x$

$y^{*\prime\prime} = (2Cx + 2A + Д)\cos x + (Cx^2 + (2A + Д)x + B)\sin x - (-2Ax - B + +2C)\cdot\sin x + (-Ax^2 + (-B + 2C)x + Д)\cos x = (-Ax^2 + + (-B + 4C)x + 2A + 2Д)\cos x + (-Cx^2 - (4A + Д)x - 2B + 2C)\sin x$

і підставляємо отримані значення в задане рівняння

$y^{*\prime\prime} + y = (-Ax^2 + (-B + 4C)x + 2A + 2Д)\cos x + (-Cx^2 - (4A + Д)x - 2B + 2C)\sin x + (Ax^2 + Bx)\cos x + (Cx^2 + Дx)\sin x = 4x\sin x$,

або $(4Cx + 2A + 2Д)\cos x + (-4Ax - 2B + 2C)\sin x = 4x\sin x$, Прирівнюючи коефіцієнти при cosx і sinx в обох частинах рівності, дістаємо систему

$$\left.\begin{array}{l|l} \cos x & 4Cx + 2A + 2D = 0 \\ \sin x & -4Ax - 2B + 2C = 4x \end{array}\right\}$$

Звідки, прирівнюючи коефіцієнти правої і лівої частин при однакових степенях x,

$$\begin{cases} 4C = 0, \\ 2A + 2D = 0, \\ -4A = 4, \\ -2B + 2C = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 0, \\ A = -1, \\ D = 1, \\ B = 0. \end{cases}$$

Таким чином, частнний розв'язок ЛНДР має вигляд

$$y^* = (-x\cos x + \sin x) = x^2\cos x + x\sin x.$$

Загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1\cos x + C_2\sin x - x^2\cos x + x\sin x = (C_1 - x^2)\cos x +$$
$$+ (C_2 + x^2)\sin x.$$

Сергій Прокопович Онуфрійчук

Наталія Миколаївна Консевич

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Курс лекцій для студентів 1 курсу ФЕМ (у 2-х частинах)

Частина II

Навчальний посібник

Редактор	Гончарук Л.В.
Комп'ютерний набір та верстка	Синельникова Т.Ф.
Макетування	Андрейчиков В.Д.

Підписано до друку 15.01.98 р. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$.
Папір офісний. Гарнітура Times New Roman.
Ум. друк. арк. 8,07 Тираж 800 пр. Зам. № 350

Редакційно-видавничий відділ
Житомирського інженерно-технологічного інституту

262005, м. Житомир, вул. Черняховського, 103