

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**ЖИТОМИРСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ**

Вища математика

**Варіанти завдань та методичні вказівки
для самостійної роботи студентів**

Частина 2

Функції двох змінних
Невизначений інтеграл
Визначений інтеграл
Диференціальні рівняння

Житомир 2014

Вища математика: Варіанти завдань та методичні вказівки
для самостійної роботи студентів. Ч. 2. – Житомир: ЖДТУ,
2014. – 98 с.

Укладач: Бондарчук Василь Миколайович.

Функції двох змінних

Завдання 1. Знайти частинні похідні 1-го і 2-го порядку функції
 $z = f(x, y)$.

1.1. $z = e^x y - x^4 y + y^2 + 3y - x - 4$.

1.2. $z = 4x^3 \cos y - 3xy + 2y^2 + y - 7x + 1$.

1.3. $z = x^5 y - x^2 y + 2 \cos y + 3x + y + 4$.

1.4. $z = 5x^3 - 3xy + y^2 + 2 \operatorname{tg} y - 4x - 1$.

1.5. $z = 3e^x + 2x^3 y^2 - y^2 + x - 2y + x - 7$.

1.6. $z = 2y \sin x - x^3 y^2 + 4y^3 + y - 3x - 5$.

1.7. $z = 3xe^y + x^2 y + 2 \cos y + x - y + 3$.

1.8. $z = 2x^3 \cos y + 3x^5 y^4 - y^3 + x - 4$.

1.9. $z = x^3 y + y^2 \cos x + 2y^3 - 5y + 7$.

1.10. $z = 5e^x y^3 - 2xy^3 + 5y - 4x + 1$.

1.11. $z = 4x^3 - 2xy^2 + \ln y + 3x + 5$.

1.12. $z = 3 \ln x - x^2 y^4 + 2y + 5x - 4$.

1.13. $z = 2x^4 y - y^2 + 5y - 7x + 2$.

1.14. $z = x^3 y^2 - 3x^2 + 2y^2 + x - 4y + 5$.

1.15. $z = 2x^5 - 3x^2 y^4 + y^3 + 5y - x - 3$.

1.16. $z = x^4 - 3x^3 y^2 + 4x + 2y - 3$.

1.17. $z = x^3 - 2xy^3 + \ln y + 3y - x + 1$.

$$1.18. z = 3e^x y^2 + x^2 - y^3 + 2e^y - 4.$$

$$1.19. z = 4x^5 - x^4 y + \ln y - e^x + 3.$$

$$1.20. z = 5x^2 - 2x^3 y^4 + 4x - 3 \ln y.$$

$$1.21. z = x^2 y + 2 \ln x + 7 \ln y + 3x + y.$$

$$1.22. z = 4x^3 - 6xy^2 + 2y^2 + 7y - 2.$$

$$1.23. z = 2x^2 y - 3x + 4y^2 + \frac{4x}{y}.$$

$$1.24. z = 3x^4 + y^2 - xy + x + y.$$

$$1.25. z = 4x^3 - 3x^2 y + 2y^3 + 5 \ln x - 6.$$

$$1.26. z = e^x - x^3 y^2 + 4y^2 + 3y - x - 1.$$

$$1.27. z = 5x^3 y^2 - 3x + y^2 + \frac{2x}{y^3} - 3.$$

$$1.28. z = xy^4 - x^3 y + 2 \sin y - x + 3.$$

$$1.29. z = 4x^2 - xy^3 + 3 \ln y - e^x + 2.$$

$$1.30. z = 2x^2 y - \ln x + 3y^2 + \frac{4}{x}.$$

Завдання 2. Знайти диференціал функції $z = f(x, y)$.

$$2.1. z = \cos(x^3 - 3y).$$

$$2.2. z = \frac{3x + 2y}{3x - 2y}.$$

$$2.3. z = \sqrt{x^4 + 2y^3}.$$

$$2.4. z = x \ln \frac{x^2}{y}.$$

$$2.5. z = \frac{xy + 1}{x + y}.$$

$$2.6. z = e^{\sqrt{x^2 + xy + y^2}}.$$

$$2.7. z = \ln(x^2 + xy + y^2).$$

$$2.8. z = e^{3x-y^2}.$$

$$2.9. z = \arctg \frac{y}{x}.$$

$$2.10. z = x \ln(x^3 y).$$

$$2.11. z = 4e^{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

$$2.12. z = \sin(5x^2 + y).$$

$$2.13. z = \ln(x^3 + y^3).$$

$$2.14. z = \frac{x^2 + 3y^2}{x + y}.$$

$$2.15. z = \frac{xy}{x + y + 1}.$$

$$2.16. z = \cos \sqrt{x + y}.$$

$$2.17. z = \operatorname{tg}(x^3 y^4).$$

$$2.18. z = \frac{3x + y}{x - 3y}.$$

$$2.19. z = e^{x^2 + y^2 + xy}.$$

$$2.20. z = y \ln \frac{2y}{x^3}.$$

$$2.21. z = \arcsin(x + 3y).$$

$$2.22. z = \sqrt{x^2 + xy + y^2}.$$

$$2.23. z = \arccos \frac{y}{x}.$$

$$2.24. z = \frac{y}{y^2 - 9x^2}.$$

$$2.25. z = \sqrt{3x^2 + 2y^2}.$$

$$2.26. z = y \ln \frac{x}{y^2}.$$

$$2.27. z = e^{\frac{y}{x}}.$$

$$2.28. z = \frac{x^2 + y^2}{x - y}.$$

$$2.29. z = \sqrt{2xy + y^2}.$$

$$2.30. z = \ln(x^3 - 2y^2).$$

Завдання 3. Знайти частинні похідні 1-го порядку функції $z = f(x, y)$, заданої неявно.

$$3.1. x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0.$$

- 3.2. $e^x y - xyz + y^3 - 4xz^2 = 0$.
- 3.3. $2x^2 y - \ln x + 3y^2 z + 2xe^z - 4 = 0$.
- 3.4. $3ye^x + 2z^3 y^2 - y^2 + xz - 2x - 7 = 0$.
- 3.5. $5x^3 - 3xy + z^2 + 2tgy - 4xyz - 1 = 0$.
- 3.6. $x^3 y - z^2 y + 2x \cos y + 3x + z - 3 = 0$.
- 3.7. $3e^x y^3 - 2xy^3 z + 5y - 4z^3 + 1 = 0$.
- 3.8. $xy \sin z - x^3 y + 4xz^3 + y - 3z = 0$.
- 3.9. $x^4 - 3x^3 yz + 4 \ln x + 2yz^2 - 3 = 0$.
- 3.10. $e^z y - x^4 y + z^2 + 4y - x - 3 = 0$.
- 3.11. $5x^2 y - 2x^3 z^4 + 4xy^2 z - 3 \ln z = 0$.
- 3.12. $2x^3 \cos y + 3x^5 z^4 - y^3 + \operatorname{tg} z - 4 = 0$.
- 3.13. $3e^z y^2 + x^2 - xy^3 + 2 \ln z - 1 = 0$.
- 3.14. $x^3 - 2xy^3 + x \ln z + 3y - 2z + 1 = 0$.
- 3.15. $3e^z + 2x^3 y^2 - z^2 + 3x - 2z + 4 = 0$.
- 3.16. $4x^3 - 3x^2 yz + 2z^3 + 5 \ln x - 6 = 0$.
- 3.17. $4x^5 y - y^4 z + \ln x - e^z + 3 = 0$.
- 3.18. $5x^2 y - 3xz^2 + 2y^2 + \frac{z}{y} = 0$.
- 3.19. $x^3 - 3x^2 y + 2y^2 + \ln z - 4xz + 5 = 0$.
- 3.20. $xe^z - x^3 y^2 + 4z^2 + 3xy - x - 1 = 0$.
- 3.21. $x^2 y + 2x \ln y + 7 \ln z + 3x + e^z = 0$.
- 3.22. $5x^3 y^2 - 3xz^2 + y^2 + \frac{2z}{y^3} - 3 = 0$.

3.23. $x^3 \cos z - 3xy + 2y^2 + z - 4x + 1 = 0$.

3.24. $5x^3 - 2x^2yz + \ln z + 3x - 4 = 0$.

3.25. $3x^4 + y^2z - xy^2 + \sin z + y = 0$.

3.26. $5 \ln x - x^2z^4 + 2 \cos y + 3z - 1 = 0$.

3.27. $2xe^y + z^2y + 2 \cos z + x + 3y = 0$.

3.28. $4x^3y - 6yz^2 + 3y^2 + 7 \cos z - 2 = 0$.

3.29. $4x^2z - xy^3 + 3 \ln z - e^y + 2 = 0$.

3.30. $xy^4z - x^3y + 2 \sin z - y + 3 = 0$.

Завдання 4. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$.

4.1. $z = x^3 \cdot \ln y$, де $x = \frac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$.

4.2. $z = \operatorname{tg} x - 2x \cos y$, де $x = v \sin u$, $y = 3v - 2uv$.

4.3. $z = xy^2 + \frac{x}{y}$, де $x = v^2u - 4v$, $y = \frac{2v}{u}$.

4.4. $z = e^x y + \ln x$, де $x = uv$, $y = u^2 - 3v$.

4.5. $z = x^2 y - 2 \cos y$, де $x = u \ln v$, $y = 4u^2 v$.

4.6. $z = \cos x - 2y^3$, де $x = \frac{u^2}{v}$, $y = 3u \sin v$.

4.7. $z = y \ln x - 4x$, де $x = 2v^2 - 4u$, $y = u - 3v^2$.

4.8. $z = \operatorname{tg} x - 2 \ln y$, де $x = 2uv$, $y = 4u - 5v^3$.

4.9. $z = 2x^3 \ln y$, де $x = v \cos u$, $y = 3u - \sin v$.

4.10. $z = x^2 y + 2y$, де $x = 5u^2 v$, $y = uv^3$.

- 4.11. $z = x^2 \sin y$, де $x = 3uv$, $y = u^3 - 2v$.
- 4.12. $z = \cos y - 3x^2$, де $x = 2u - v$, $y = \frac{3u}{v^2}$.
- 4.13. $z = xy^3 + \ln x$, де $x = v + 3u^2$, $y = 5uv$.
- 4.14. $z = x^4 - 3 \sin y$, де $x = u - 4v^2$, $y = v - u^3$.
- 4.15. $z = \arcsin x + 3 \ln y$, де $x = 5uv$, $y = u + v$.
- 4.16. $z = y \ln x - x$, де $x = 4v - u$, $y = \frac{v}{2u}$.
- 4.17. $z = \operatorname{arctg} y - 3x^2$, де $x = 2uv$, $y = u^2 - 3v$.
- 4.18. $z = x^4 y - \cos x$, де $x = u - 5v$, $y = 3uv^2$.
- 4.19. $z = xy + x^2 y^3$, де $x = 5u + 2v$, $y = v \sin u$.
- 4.20. $z = \ln x - 2x \sin y$, де $x = uv$, $y = v^2 - 2u$.
- 4.21. $z = xy^3 - \operatorname{tg} y$, де $x = v - u$, $y = -2uv$.
- 4.22. $z = \operatorname{ctg} x + 2e^y$, де $x = 2u + v$, $y = u^v$.
- 4.23. $z = x^3 - 2x \ln y$, де $x = u \cos v$, $y = v - 3u$.
- 4.24. $z = e^x - 2xy^3$, де $x = ve^u$, $y = 2u + v$.
- 4.25. $z = 3e^y + xy$, де $x = v - \sin u$, $y = 3ve^u$.
- 4.26. $z = 2x^3 \cos y$, де $x = 5u - v$, $y = uv^2$.
- 4.27. $z = \ln(xy)$, де $x = ue^v$, $y = 3v - u$.
- 4.28. $z = x^4 - 2 \cos y$, де $x = \sin u - 2v$, $y = ve^u$.
- 4.29. $z = xy^3 - \ln y$, де $x = v \ln u$, $y = v - 2u$.
- 4.30. $z = x^4 y^3 + \frac{3x^2}{y}$, де $x = v^2 + u$, $y = \frac{\sin v}{u}$.

Завдання 5. Знайти похідну функції $z = f(x, y)$ у точці $P_1(x_1; y_1)$ в напрямі від цієї точки до точки $P_2(x_2; y_2)$.

5.1. $z = x^4 - 3x^2y^2 + 2xy + 1, P_1(1; -1), P_2(5; 2)$.

5.2. $z = 3x^2 - 2xy^2 + y - 3, P_1(2; -2), P_2(6; 1)$.

5.3. $z = 2x^3 - 3x^2y + 2x - y + 1, P_1(2; 3), P_2(-2; 6)$.

5.4. $z = 3x^2 - 4xy^2 + 3y - 5, P_1(1; 3), P_2(-3; 0)$.

5.5. $z = 4x^2y - y^3 + 2x + 4, P_1(0; 1), P_2(3; -3)$.

5.6. $z = x^4 + 2x^2y^2 - 3x + 1, P_1(1; 1), P_2(5; -2)$.

5.7. $z = 2x^3 - 3xy^2 + 2x - y, P_1(2; 1), P_2(-2; -2)$.

5.8. $z = xy^4 - 3y^2 - 2x + y + 4, P_1(1; 2), P_2(5; -1)$.

5.9. $z = x^3 + 2x^2y + x - 3y + 1, P_1(-1; 1), P_2(2; -3)$.

5.10. $z = 4x^2 - 3xy^2 + 2x + 5y + 1, P_1(1; 1), P_2(4; -3)$.

5.11. $z = e^x - 3x^2y^2 + 2xy - 3, P_1(0; 2), P_2(4; -1)$.

5.12. $z = \cos x - 2x^2y + y^3 - 3, P_1(0; -1), P_2(4; 2)$.

5.13. $z = x^4 + 2xy^2 - y^3 + 1, P_1(1; 1), P_2(5; -2)$.

5.14. $z = 3x^2 + 4xy^2 + 2y - 1, P_1(2; 0), P_2(5; -4)$.

5.15. $z = x^5 - x^2y + 2xy^2 - 3, P_1(1; -1), P_2(5; 2)$.

5.16. $z = x^3 + x \cos y - y^2 - 2, P_1(1; 0), P_2(-3; 3)$.

5.17. $z = 2x^3 - 4x^2y + 3x - y + 1, P_1(1; 1), P_2(4; -3)$.

5.18. $z = x^4 - 4xy + 2y^2 - 3$, $P_1(1; 3)$, $P_2(-3; 0)$.

5.19. $z = 3x^2y - y^2 + 2x + 3$, $P_1(1; -1)$, $P_2(5; 2)$.

5.20. $z = x^3 - 2xy^2 + e^y - 3$, $P_1(2; 0)$, $P_2(-1; 4)$.

5.21. $z = xy^2 - 2x^3y + 4x - 3$, $P_1(2; -3)$, $P_2(5; 1)$.

5.22. $z = 2x^3 - 3y^2 + 4x - 5$, $P_1(1; 2)$, $P_2(5; -1)$.

5.23. $z = x^3 - 2x^2y^2 + 4y - x$, $P_1(1; 3)$, $P_2(-3; 0)$.

5.24. $z = 3x^4 - 2x^2y + 3y - 4$, $P_1(2; -2)$, $P_2(6; 1)$.

5.25. $z = 4e^x + 2xy^2 - x \ln y + 5$, $P_1(0; 1)$, $P_2(-3; 5)$.

5.26. $z = x^4 + 3x^2y - 2y^3 - 1$, $P_1(1; 1)$, $P_2(-2; 5)$.

5.27. $z = 7x^2 - 2xy^3 + y - 3x$, $P_1(1; -2)$, $P_2(-3; 1)$.

5.28. $z = x^3 - 2x \sin y + 5y - 4$, $P_1(2; 0)$, $P_2(6; -3)$.

5.29. $z = 3 \cos x - 4xy^3 + 2y - 1$, $P_1(0; -2)$, $P_2(4; 1)$.

5.30. $z = 3x^2y - xy^2 + 5y - 3x$, $P_1(-1; -2)$, $P_2(2; 2)$.

Завдання 6. Знайти градієнт функції $z = f(x, y)$ у точці $P(x; y)$.

6.1. $z = \frac{xy+1}{x+y}$, $P(1; 3)$.

6.2. $z = \frac{x^2 - y^2}{x+y+1}$, $P(1; 1)$.

6.3. $z = \frac{xy+x+y}{x-y}$, $P(1; -2)$.

6.4. $z = \frac{x^2+y}{x+y^2}$, $P(2; -1)$.

6.5. $z = \frac{2xy}{x-y}$, $P(3; 2)$.

6.6. $z = \frac{x^2 - xy + y^2}{x-y}$, $P(1; 2)$.

6.7. $z = \frac{x^2 + xy}{x-y}$, $P(2; 3)$.

6.8. $z = \frac{x^2 + y^2}{x+y}$, $P(1; -3)$.

$$6.9. z = \frac{x^2 + 2xy}{3x - 2y}, P(1; 2).$$

$$6.10. z = \frac{xy}{x + 2y}, P(1; -1).$$

$$6.11. z = \frac{xy + y}{x^2 - y}, P(2; -2).$$

$$6.12. z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2y^2}, P(1; -1).$$

$$6.13. z = \frac{x^2 - 2y}{2x + 3y}, P(2; -2).$$

$$6.14. z = \frac{x + 2y}{2x + y}, P(-1; 3).$$

$$6.15. z = \frac{x - y}{1 + xy}, P(2; -1).$$

$$6.16. z = \frac{x^2 + y^2}{x - y}, P(1; -1).$$

$$6.17. z = \frac{2 - xy}{x + 2y}, P(1; 3).$$

$$6.18. z = \frac{x^2 y - xy^2}{x + y}, P(-1; -1).$$

$$6.19. z = \frac{x + y^2}{x^2 - y}, P(1; -2).$$

$$6.20. z = \frac{x^3 + y^2}{x + y^2}, P(2; -1).$$

$$6.21. z = \frac{xy^2}{x^2 - y}, P(3; 4).$$

$$6.22. z = \frac{xy - y^2}{x^2 - y}, P(1; 2).$$

$$6.23. z = \frac{2x^2 + 3xy}{3x - 2y}, P(2; 3).$$

$$6.24. z = \frac{3x + y^2}{x^2 + 4y}, P(1; -2).$$

$$6.25. z = \frac{3x - y^3}{x^3 + y}, P(1; 3).$$

$$6.26. z = \frac{2x + y^2}{x^2 + 3y}, P(2; -1).$$

$$6.27. z = \frac{xy + y^2}{x^2 - xy}, P(2; -1).$$

$$6.28. z = \frac{4x - y^2}{x^2 + 3y}, P(-1; 1).$$

$$6.29. z = \frac{x - 5y}{4x + 3y}, P(2; -2).$$

$$6.30. z = \frac{x + y^2}{x^2 - y}, P(1; -3).$$

Завдання 7. Дослідити функцію $z = f(x, y)$ на екстремуми.

$$7.1. z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y.$$

$$7.2. z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5.$$

- 7.3. $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$.
- 7.4. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.
- 7.5. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.
- 7.6. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$.
- 7.7. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$.
- 7.8. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.
- 7.9. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.
- 7.10. $z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2$.
- 7.11. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.
- 7.12. $z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 10$.
- 7.13. $z = (x - 5)^2 + y^2 + 1$.
- 7.14. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.
- 7.15. $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$.
- 7.16. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.
- 7.17. $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$.
- 7.18. $z = xy(12 - x - y)$.
- 7.19. $z = xy - x^2 - y^2 + 9$.
- 7.20. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.
- 7.21. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.
- 7.22. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.
- 7.23. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.
- 7.24. $z = xy(6 - x - y)$.

7.25. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$.

7.26. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

7.27. $z = (x-1)^2 + 2y^2$.

7.28. $z = xy - 3x^2 - 2y^2$.

7.29. $z = x^2 + 3(y+2)^2$.

7.30. $z = 2(x+y) - x^2 - y^2$.

Завдання 8. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = f(x, y)$ в області D , що обмежена заданими лініями.

8.1. $z = 3x + y - xy$, $D: y = x, y = 4, x = 0$.

8.2. $z = xy - x - 2y$, $D: x = 3, y = x, y = 0$.

8.3. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$.

8.4. $z = 5x^2 - 3xy + y^2$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$.

8.5. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, $D: x - y + 1 = 0, x = 3, y = 0$.

8.6. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$, $D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$.

8.7. $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 6$.

8.8. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$.

8.9. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$, $D: x = 0, y = 0, x + y - 3 = 0$.

8.10. $z = x^2 + 2xy - 10$, $D: y = 0, y = x^2 - 4$.

8.11. $z = xy - 2x - y$, $D: x = 0, x = 3, y = 0, y = 4$.

8.12. $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$, $D: y = 8, y = 2x^2$.

8.13. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$, $D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$.

- 8.14. $z = 2x^2 + 3y^2 + 1$, $D: y = \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$, $y = 0$.
- 8.15. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$, $D: x = -3$, $y = 0$, $x + y + 1 = 0$.
- 8.16. $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1$, $D: x = 5$, $y = 0$, $x - y - 1 = 0$.
- 8.17. $z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x$, $D: y = 2x$, $y = 2$, $x = 0$.
- 8.18. $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x$, $D: x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$.
- 8.19. $z = xy - 3x - 2y$, $D: x = 0$, $x = 4$, $y = 0$, $y = 4$.
- 8.20. $z = x^2 + xy - 2$, $D: y = 4x^2 - 4$, $y = 0$.
- 8.21. $z = x^2y(4 - x - y)$, $D: x = 0$, $y = 0$, $y = 6 - x$.
- 8.22. $z = x^3 + y^3 - 3xy$, $D: x = 0$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 2$.
- 8.23. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$, $D: x + 2y = 4$, $x - 2y = 4$.
- 8.24. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, $D: x = 3$, $y = 0$, $y = x + 1$.
- 8.25. $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$, $D: x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$.
- 8.26. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$, $D: y = x + 2$, $y = 0$, $x = 2$.
- 8.27. $z = 4 - 2x^2 - y^2$, $D: y = 0$, $y = \sqrt{1 - x^2}$.
- 8.28. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$, $D: x = -1$, $x = 1$, $y = -1$, $y = 1$.
- 8.29. $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$, $D: x + y + 2 = 0$, $x = 0$, $y = 0$.
- 8.30. $z = 2x^2y - x^3y - x^2y^2$, $D: x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

Завдання 9. Знайти екстремуми функції $z = f(x, y)$ за умови, що змінні x і y задовольняють рівняння $\varphi(x, y) = 0$.

- 9.1. $z = x^3 + 4xy^2 + 5y^2 - 48x + 1$ за умови $x - 3y + 2 = 0$.
- 9.2. $z = 4y^3 + 3x^2y - 2x^2 - 108x - 3$ за умови $3y - x - 4 = 0$.
- 9.3. $z = 5x^3 + 7xy^2 - 3y^2 - 15x - 4$ за умови $2x + 4y + 1 = 0$.
- 9.4. $z = 6y^3 + 10x^2y + 2x^2 - 2y + 9$ за умови $3x - y + 5 = 0$.
- 9.5. $z = 7x^3 + 6xy^2 + y^2 - \frac{21}{4}x + 1$ за умови $4x - 3y + 1 = 0$.
- 9.6. $z = 5y^3 + 7x^2y - 3x^2 - 15y + 2$ за умови $2y - 2x - 3 = 0$.
- 9.7. $z = 6x^3 + 10xy^2 + 2y^2 - 2x + 7$ за умови $x + 2y - 2 = 0$.
- 9.8. $z = 3y^3 + \frac{3}{2}x^2y - 2x^2 - 25y + 3$ за умови $y - 3x - 1 = 0$.
- 9.9. $z = 2x^3 + 5xy^2 + 8y^2 - 24x - 10$ за умови $2y - 3x + 2 = 0$.
- 9.10. $z = 2y^3 + 5x^2y + 8x^2 - 24y + 8$ за умови $4x + 2y - 3 = 0$.
- 9.11. $z = 4x^3 + 3xy^2 - 2y^2 - 108x - 6$ за умови $2y - 4x + 3 = 0$.
- 9.12. $z = y^3 + 4x^2y + 5x^2 - 48y + 7$ за умови $x + 2y - 1 = 0$.
- 9.13. $z = 3x^3 - 4y^2 + 2xy^2 - 49x + 4$ за умови $2y - 6x - 3 = 0$.
- 9.14. $z = 7y^3 + 6x^2y + x^2 - \frac{21}{4}y + 4$ за умови $3x + 2y + 3 = 0$.
- 9.15. $z = 3x^3 + \frac{3}{2}xy^2 - 2y^2 - 25x - 5$ за умови $2x - 4y - 3 = 0$.
- 9.16. $z = 8y^3 + 2y^3 + 5x^2y - 24y - 3$ за умови $x + 4y - 4 = 0$.
- 9.17. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$ за умови $x - 3y + 2 = 0$.
- 9.18. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$ за умови $3x + 2y - 4 = 0$.
- 9.19. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$ за умови $2x - 3y - 3 = 0$.
- 9.20. $z = y^3 + x^2 - 6xy - 39y + 18x + 5$ за умови $x - 2y + 4 = 0$.

- 9.21. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$ за умови $x + 2y - 3 = 0$.
- 9.22. $z = x^3 + 4xy^2 + 5y^2 - 48x + 1$ за умови $x - 3y + 2 = 0$.
- 9.23. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 3$ за умови $2y - 2x + 3 = 0$.
- 9.24. $z = x^3 + 4xy^2 + 5y^2 - 48x + 1$ за умови $x - 3y + 2 = 0$.
- 9.25. $z = 3x^3 + 2xy^2 - 49x + 4$ за умови $2y - 6x - 3 = 0$.
- 9.26. $z = x^3 + 4xy^2 + 5y^2 - 48x + 1$ за умови $x - 3y + 2 = 0$.
- 9.27. $z = x^3 + 6y^2 - 4x + 5$ за умови $4x - 3y + 5 = 0$.
- 9.28. $z = x^2 + y^3 + 5y^2 + 48x + 2$ за умови $2x - 4y + 3 = 0$.
- 9.29. $z = x^3 + 3xy^2 + 4y^2 - 5x + 2$ за умови $3x - 4y + 1 = 0$.
- 9.30. $z = x^3 + 2xy^2 + y^2 - 6x + 7$ за умови $5x + y - 3 = 0$.

Невизначений інтеграл

Завдання 10. Знайти інтеграл.

- 10.1. $\int \left(3x^5 + \cos x - \frac{2}{x^2 - 9} \right) dx$.
- 10.2. $\int (4x^3 - 5e^x + 1) dx$.
- 10.3. $\int \left(\frac{3}{4}\sqrt{x} + 3^x - \sin x \right) dx$.
- 10.4. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{9 - x^2}} + 4\operatorname{tg}x - 9 \right) dx$.
- 10.5. $\int \left(8x - \frac{9}{\cos^2 x} + 2 \right) dx$.
- 10.6. $\int \left(2x^3 - \sqrt{x} + \frac{4}{x} \right) dx$.
- 10.7. $\int (\sqrt[3]{x} - \operatorname{ctg}x + 3) dx$.
- 10.8. $\int \left(3x^2 - \frac{5}{\sin^2 x} + 4 \right) dx$.
- 10.9. $\int \left(5x^4 - 3e^x + \frac{8}{x^3} \right) dx$.
- 10.10. $\int \left(\cos x - \frac{4}{x^2 + 16} + x \right) dx$.

$$10.11. \int \left(5x - 3\operatorname{ctgx} + \frac{4}{x^3} \right) dx.$$

$$10.12. \int \left(4^x - \frac{2}{\sqrt{x^3}} + 1 \right) dx.$$

$$10.13. \int \left(x^2 - \frac{3}{\sin^2 x} - 5 \right) dx.$$

$$10.14. \int \frac{\sqrt[3]{x^2 - 2x^5} + 3}{x} dx.$$

$$10.15. \int \left(2x^3 - \frac{4}{\sqrt{5+x^2}} + 7 \right) dx.$$

$$10.16. \int \left(4x^5 + \frac{6}{\cos^2 x} - 5 \right) dx.$$

$$10.17. \int \left(7\sqrt[4]{x^3} - 3e^x + \frac{4}{x} \right) dx.$$

$$10.18. \int (3x^2 - 5\operatorname{tg}x + 2) dx.$$

$$10.19. \int \left(7x^6 + \frac{3}{x^2 - 9} + 2 \right) dx.$$

$$10.20. \int \left(5x^4 + 4\sin x - \frac{2}{x} \right) dx.$$

$$10.21. \int \left(\sqrt[5]{x^2} - \frac{2}{x^3} + 4 \right) dx.$$

$$10.22. \int \left(2x^3 + \frac{6}{\cos^2 x} - 5 \right) dx.$$

$$10.23. \int \frac{\sqrt[5]{x} - 2x^3 + 4}{x^2} dx.$$

$$10.24. \int \left(3\sqrt{x} - \frac{5}{x^4} + 2 \right) dx.$$

$$10.25. \int \left(\sqrt[5]{x^3} - \frac{4}{x^5} + 2\sin x \right) dx.$$

$$10.26. \int \left(3x - \frac{5}{x^2 + 4} - 1 \right) dx.$$

$$10.27. \int \left(3\operatorname{tg}x - \frac{2}{x^4} + 5 \right) dx.$$

$$10.28. \int \left(4x^3 - \cos x + \frac{6}{x^3} \right) dx.$$

$$10.29. \int \left(\frac{3}{5+x^2} - \frac{7}{x^3} + 5x \right) dx.$$

$$10.30. \int (3\operatorname{ctgx} - 5\sqrt[3]{x^2} + 2^x) dx.$$

Завдання 11. Знайти інтеграл.

$$11.1. \int \sqrt{3+x} dx.$$

$$11.2. \int \sin(3x-2) dx.$$

$$11.3. \int \sqrt[3]{(1+x)^2} dx.$$

$$11.4. \int \frac{dx}{\cos^2(4x-3)}.$$

$$11.5. \int \frac{dx}{\sin^2(3x+7)}.$$

$$11.7. \int (5-4x)^7 dx.$$

$$11.9. \int \sin(5+3x) dx.$$

$$11.11. \int \frac{3}{\sqrt{5-4x}} dx.$$

$$11.13. \int \operatorname{ctg}(4x-3) dx.$$

$$11.15. \int \frac{dx}{(5x+6)^2}.$$

$$11.17. \int \frac{5}{\cos^2(4x+7)} dx.$$

$$11.19. \int \sin(7x-5) dx.$$

$$11.21. \int \frac{dx}{(2+x)^3}.$$

$$11.23. \int e^{5x+4} dx.$$

$$11.25. \int \frac{2 dx}{\sqrt{9-4x^2}}.$$

$$11.27. \int \sqrt{3-4x} dx.$$

$$11.29. \int \operatorname{ctg}(7x+4) dx.$$

$$11.6. \int e^{2x+3} dx.$$

$$11.8. \int \operatorname{tg}(2+3x) dx.$$

$$11.10. \int \sqrt[3]{2+5x} dx.$$

$$11.12. \int \frac{dx}{\sin^2(2x-5)}.$$

$$11.14. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}}.$$

$$11.16. \int 3^{2x-5} dx.$$

$$11.18. \int \frac{dx}{\sqrt{9+4x^2}}.$$

$$11.20. \int \frac{dx}{(3x-5)^4}.$$

$$11.22. \int \operatorname{ctg}(5-3x) dx.$$

$$11.24. \int \sqrt[5]{(6-5x)^2} dx.$$

$$11.26. \int \sin(4x+3) dx.$$

$$11.28. \int \frac{7 dx}{\sin^2(2x-5)}.$$

$$11.30. \int \frac{6 dx}{2x+5}.$$

Завдання 12. Знайти інтеграл, використовуючи відповідну заміну змінної.

$$12.1. \int \frac{dx}{(3x+2)\ln^2(3x+2)}.$$

$$12.2. \int \frac{\operatorname{tg}^5 x}{\cos^2 x} dx.$$

$$12.3. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin^3 x}.$$

$$12.4. \int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{\ln^3(1-x)}}.$$

$$12.5. \int \frac{5}{\operatorname{ctg}^4 x \sin^2 x} dx.$$

$$12.6. \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$$

$$12.7. \int \frac{5}{(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}} dx.$$

$$12.8. \int \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}.$$

$$12.9. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arccos x}.$$

$$12.10. \int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$12.11. \int \cos x e^{\sin x} dx.$$

$$12.12. \int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(x+1)}}{x+1} dx.$$

$$12.13. \int \frac{2}{\sin^2 x \sqrt{\operatorname{ctg} x}} dx.$$

$$12.14. \int \frac{\sin x dx}{\sqrt[4]{\cos x}}.$$

$$12.15. \int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{x^2+1} dx.$$

$$12.16. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+2}}.$$

$$12.17. \int \frac{\ln^4(3x+1)}{3x+1} dx.$$

$$12.18. \int \frac{3 dx}{\cos^2 x \sqrt[5]{\operatorname{tg}^4 x}}.$$

$$12.19. \int \frac{dx}{x \ln^3 x}.$$

$$12.20. \int \frac{4}{(1+x^2)\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}} dx.$$

$$12.21. \int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx.$$

$$12.22. \int \cos x \sqrt{\sin^3 x} dx.$$

$$12.23. \int \frac{\ln^3(x-5)}{x-5} dx.$$

$$12.24. \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx.$$

$$12.25. \int \frac{dx}{(x^2+1)\operatorname{arctg}^4 x}.$$

$$12.26. \int \frac{\sqrt[3]{\log_2(x-8)}}{x-8} dx.$$

$$12.27. \int \frac{e^{\frac{2}{x}}}{3x^2} dx.$$

$$12.28. \int \frac{5x^2 dx}{\sqrt{x^3-4}}.$$

$$12.29. \int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$12.30. \int 5x \operatorname{tg}(1+x^2) dx.$$

Завдання 13. Знайти інтеграл за формулою інтегрування частинами.

$$13.1. \int (2x-7)\cos x dx.$$

$$13.2. \int (3x-4)e^x dx.$$

$$13.3. \int (x-5)\ln x dx.$$

$$13.4. \int 3\arcsin x dx.$$

$$13.5. \int (4x+3)\sin x dx.$$

$$13.6. \int x^3 \ln x dx.$$

$$13.7. \int (2x-9)3^x dx.$$

$$13.8. \int x \operatorname{arctg} x dx.$$

$$13.9. \int 4x^3 \ln x dx.$$

$$13.10. \int (3x+5)\sin x dx.$$

$$13.11. \int x^2 e^{-x} dx.$$

$$13.12. \int \operatorname{arctg} x dx.$$

$$13.13. \int (x-3)\log_2 x dx.$$

$$13.14. \int (3x+4)\cos x dx.$$

$$13.15. \int (6x+2)e^x dx.$$

$$13.16. \int 3x^2 \ln x dx.$$

$$13.17. \int \arccos x dx.$$

$$13.18. \int (5x-2)3^x dx.$$

$$13.19. \int (5x+4)\cos x dx.$$

$$13.20. \int 7x \ln x dx.$$

$$13.21. \int (2x+3)\log_3 x dx.$$

$$13.22. \int (3x-5)\sin x dx.$$

$$13.23. \int (3x-4)e^x dx.$$

$$13.25. \int x \cos(x+6) dx.$$

$$13.27. \int \ln(2x-1) dx.$$

$$13.29. \int (5x-4)3^x dx.$$

$$13.24. \int 4x \arctg x dx.$$

$$13.26. \int (3x^2-4) \ln x dx.$$

$$13.28. \int (2x+3) \sin x dx.$$

$$13.30. \int 2x \operatorname{arccctg} x dx.$$

Завдання 14. Знайти інтеграл.

$$14.1. \int \frac{3x+2}{\sqrt{4+2x-x^2}} dx.$$

$$14.3. \int \frac{5x-1}{3x^2-2x+6} dx.$$

$$14.5. \int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+13}} dx.$$

$$14.7. \int \frac{5x+3}{2x^2-6x-8} dx.$$

$$14.9. \int \frac{5x-2}{3x^2-5x+2} dx.$$

$$14.11. \int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x-3x^2}} dx.$$

$$14.13. \int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x+4}} dx.$$

$$14.15. \int \frac{x dx}{2x^2+2x+5}.$$

$$14.17. \int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-4x-1}} dx.$$

$$14.2. \int \frac{2x-5}{3x^2+x+1} dx.$$

$$14.4. \int \frac{x-4}{\sqrt{2x^2-x+7}} dx.$$

$$14.6. \int \frac{x+4}{4x^2-7x+1} dx.$$

$$14.8. \int \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}} dx.$$

$$14.10. \int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x+x^2}} dx$$

$$14.12. \int \frac{x+1}{3x^2-2x-3} dx.$$

$$14.14. \int \frac{5x+1}{x^2-4x+1} dx.$$

$$14.16. \int \frac{2x-13}{\sqrt{3x^2-3x-16}} dx.$$

$$14.18. \int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2} dx.$$

$$14.19. \int \frac{2x+6}{3x^2+x+4} dx.$$

$$14.20. \int \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+8x+9}} dx.$$

$$14.21. \int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}} dx.$$

$$14.22. \int \frac{3x-7}{4x^2-4x+5} dx.$$

$$14.23. \int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx.$$

$$14.24. \int \frac{3x-1}{\sqrt{2x^2-5x+1}} dx.$$

$$14.25. \int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+3x-4}} dx.$$

$$14.26. \int \frac{x dx}{2x^2+x+5}.$$

$$14.27. \int \frac{3x+8}{4x^2+6x-13} dx.$$

$$14.28. \int \frac{4x+1}{\sqrt{2+x-x^2}} dx.$$

$$14.29. \int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+4x-5}} dx.$$

$$14.30. \int \frac{3x+5}{2x^2+3x-4} dx.$$

Завдання 15. Знайти інтеграл.

$$15.1. \int \frac{3x^2+20x+9}{(x^2+4x+3)(x+5)} dx.$$

$$15.2. \int \frac{43x-67}{(x-1)(x^2-x-12)} dx.$$

$$15.3. \int \frac{8x dx}{(x^2+6x+5)(x+3)}.$$

$$15.4. \int \frac{6x^2+6x-6}{(x+1)(x^2+x-2)} dx.$$

$$15.5. \int \frac{37x-85}{(x^2+2x-3)(x-4)} dx.$$

$$15.6. \int \frac{3x^2+3x-24}{(x^2-x-2)(x-3)} dx.$$

$$15.7. \int \frac{3x^2-15}{(x-1)(x^2+5x+6)} dx.$$

$$15.8. \int \frac{x^2-19x+6}{(x-1)(x^2+5x+6)} dx.$$

$$15.9. \int \frac{6x dx}{x^3+2x^2-x-2}.$$

$$15.10. \int \frac{4x^2+32x+52}{(x^2+6x+5)(x+3)} dx.$$

$$15.11. \int \frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)} dx.$$

$$15.12. \int \frac{6x^2}{(x-1)(x^2+3x+2)} dx.$$

$$15.13. \int \frac{6x^4}{(x^2-1)(x+2)} dx .$$

$$15.14. \int \frac{2x^2-26}{(x^2+4x+3)(x+5)} dx .$$

$$15.15. \int \frac{2x^2+12x-6}{(x+1)(x^2+8x+15)} dx .$$

$$15.16. \int \frac{7x^2-17x}{(x-2)(x^2-2x-3)} dx .$$

$$15.17. \int \frac{3x^2-17x+2}{(x-1)(x^2+5x+6)} dx .$$

$$15.18. \int \frac{4x^2}{(x^2-2x+1)(x+1)} dx .$$

$$15.19. \int \frac{2x^2-2x-1}{x^2-x^3} dx .$$

$$15.20. \int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x} dx .$$

$$15.21. \int \frac{3x-x^2-2}{x(x+1)^2} dx .$$

$$15.22. \int \frac{x^3-3}{(x-1)(x^2-1)} dx .$$

$$15.23. \int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x} dx .$$

$$15.24. \int \frac{4x dx}{(x^2-1)(x+1)} .$$

$$15.25. \int \frac{6x-2x^2-1}{x^3-2x^2+x} dx .$$

$$15.26. \int \frac{3x^2+2}{x(x+1)^2} dx .$$

$$15.27. \int \frac{x+5}{x^3-x^2-x+1} dx .$$

$$15.28. \int \frac{3x^2-7x+2}{(x^2-x)(x-1)} dx .$$

$$15.29. \int \frac{x^2+x+2}{x^3+x^2} dx .$$

$$15.30. \int \frac{2x^2+1}{x^3-2x^2+x} dx .$$

Завдання 16. Знайти інтеграл.

$$16.1. \int \frac{dx}{2+\sqrt{x+3}} .$$

$$16.2. \int \frac{\sqrt{x} dx}{4x-\sqrt[3]{x^2}} .$$

$$16.3. \int \frac{x dx}{\sqrt{x-4}} .$$

$$16.4. \int \frac{\sqrt{x} dx}{1+\sqrt[3]{x}} .$$

$$16.5. \int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}} .$$

$$16.6. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}} .$$

- 16.7. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x-4\sqrt[3]{x^2}}$
- 16.8. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[6]{x})} dx .$
- 16.9. $\int \frac{\sqrt[6]{x+3} dx}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt{x+3}} .$
- 16.10. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x-8}}$
- 16.11. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1-\sqrt[3]{x}} .$
- 16.12. $\int \frac{x dx}{\sqrt[5]{x+1}} .$
- 16.13. $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})} dx .$
- 16.14. $\int \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}} dx .$
- 16.15. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})\sqrt[3]{x}} .$
- 16.16. $\int \frac{\sqrt{x+3} dx}{1+\sqrt[3]{x+3}} .$
- 16.17. $\int \frac{(\sqrt{x}-1) dx}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt{x}} .$
- 16.18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} .$
- 16.19. $\int \frac{\sqrt[6]{x-1} dx}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}} .$
- 16.20. $\int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+1}} dx .$
- 16.21. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1-\sqrt[4]{x}} .$
- 16.22. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})} dx .$
- 16.23. $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} .$
- 16.24. $\int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[6]{x^5}} dx .$
- 16.25. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+6}} .$
- 16.26. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x+1}} dx .$
- 16.27. $\int \frac{(x+1) dx}{x\sqrt{x-1}} .$
- 16.28. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x+2}} dx .$
- 16.29. $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x-6}} .$
- 16.30. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{(1+\sqrt[3]{x+1})\sqrt{x+1}} dx .$

Завдання 17. Знайти інтеграл.

$$17.1. \int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}.$$

$$17.3. \int \frac{dx}{3\sin x-\cos x}.$$

$$17.5. \int \frac{dx}{3+6\sin x-2\cos x}.$$

$$17.7. \int \frac{dx}{3\cos x-4\sin x}.$$

$$17.9. \int \frac{dx}{4+3\sin x-2\cos x}.$$

$$17.11. \int \frac{dx}{5+4\sin x+3\cos x}.$$

$$17.13. \int \frac{dx}{7+6\sin x-5\cos x}.$$

$$17.15. \int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}.$$

$$17.17. \int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}.$$

$$17.19. \int \frac{dx}{4-4\sin x+3\cos x}.$$

$$17.21. \int \frac{dx}{5+4\sin x+6\cos x}.$$

$$17.23. \int \frac{dx}{7-3\sin x+2\cos x}.$$

$$17.25. \int \frac{dx}{4-4\sin x+3\cos x}.$$

$$17.2. \int \frac{dx}{5\cos x+10\sin x}.$$

$$17.4. \int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}.$$

$$17.6. \int \frac{dx}{3+4\sin x+2\cos x}.$$

$$17.8. \int \frac{dx}{5-4\sin x+2\cos x}.$$

$$17.10. \int \frac{dx}{3+2\cos x-\sin x}.$$

$$17.12. \int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}.$$

$$17.14. \int \frac{dx}{5-3\sin x+6\cos x}.$$

$$17.16. \int \frac{dx}{2+4\sin x+3\cos x}.$$

$$17.18. \int \frac{dx}{7+4\sin x+6\cos x}.$$

$$17.20. \int \frac{dx}{7\sin x-3\cos x}.$$

$$17.22. \int \frac{dx}{2+4\sin x+3\cos x}.$$

$$17.24. \int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}.$$

$$17.26. \int \frac{dx}{2+3\sin x-2\cos x}.$$

$$17.27. \int \frac{dx}{1 - \sin x + 3 \cos x}.$$

$$17.28. \int \frac{dx}{5 + 3 \cos x - 5 \sin x}.$$

$$17.29. \int \frac{dx}{4 \cos x + 3 \sin x}.$$

$$17.30. \int \frac{4 dx}{3 + 2 \sin x - 5 \cos x}.$$

Визначений інтеграл

Завдання 18. Обчислити інтеграл за формулою Ньютона-Лейбніца.

$$18.1. \int_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\sqrt{5}} \frac{4 dx}{x^2 + 5}$$

$$18.2. \int_{-3}^0 \frac{3 dx}{\sqrt{25 + 5x}}$$

$$18.3. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{7 dx}{4 \sin^2 3x}$$

$$18.4. \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}$$

$$18.5. \int_{-\pi}^{\pi} 3 \sin \frac{x}{2} dx$$

$$18.6. \int_3^8 6\sqrt{x+1} dx$$

$$18.7. \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{6}} 12 \operatorname{ctg} 3x dx$$

$$18.8. \int_0^1 \frac{2 dx}{\sqrt{4-3x}}$$

$$18.9. \int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2 - 9}$$

$$18.10. \int_1^e \left(3 + \frac{2}{x}\right) dx$$

$$18.11. \int_1^2 \frac{3 dx}{2\sqrt{x^2 + 16}}$$

$$18.12. \int_0^{\frac{5}{\sqrt{2}}} \frac{7 dx}{\sqrt{8-x^2}}$$

$$18.13. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{3 \cos^2 5x}$$

$$18.14. \int_3^5 \frac{5 dx}{3 - x^2}$$

$$18.15. \int_{-\pi}^{\pi} \left(2x + \cos \frac{x}{3} \right) dx$$

$$18.16. \int_0^7 \sqrt[3]{x+1} dx$$

$$18.17. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (3x - 2 \operatorname{tg} x) dx$$

$$18.18. \int_{-2}^2 \frac{4 dx}{11 + x^2}$$

$$18.19. \int_{-1}^0 \left(4 + \sqrt[3]{x^2} \right) dx$$

$$18.20. \int_1^3 \left(4 + \frac{2}{x^2} \right) dx$$

$$18.21. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 dx}{5 \cos^2 x}$$

$$18.22. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-2}}$$

$$18.23. \int_0^1 (3x^2 - 2^x) dx$$

$$18.24. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$18.25. \int_0^1 (3e^x - 2\sqrt{7x}) dx$$

$$18.26. \int_1^2 (4x+9)^3 dx$$

$$18.27. \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} (4x - 3 \operatorname{tg} 2x) dx$$

$$18.28. \int_0^{\frac{\pi}{6}} (4x + 3 \cos 5x) dx$$

$$18.29. \int_1^2 \frac{6 dx}{x^2 - 9}$$

$$18.30. \int_1^2 \left(3x + \frac{4}{x^3} \right) dx$$

Завдання 19. Обчислити інтеграл, використовуючи відповідну заміну змінної.

$$19.1. \int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{1+x^2} dx .$$

$$19.2. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{12x^5 dx}{\sqrt{x^6 + 1}} .$$

$$19.3. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^3 + 2}.$$

$$19.5. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx.$$

$$19.7. \int_0^{-3} \frac{4x dx}{\sqrt{25 + 3x^2}}.$$

$$19.9. \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx.$$

$$19.11. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{1 - \cos x}.$$

$$19.13. \int_0^1 x^3 \sqrt{4 + 5x^4} dx.$$

$$19.15. \int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx.$$

$$19.17. \int_0^1 3x^2 e^{x^3} dx.$$

$$19.19. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1 + x^6}.$$

$$19.21. \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}.$$

$$19.23. \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{4 - 3x^2}}.$$

$$19.4. \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx.$$

$$19.6. \int_0^1 \frac{3x dx}{x^2 + 1}.$$

$$19.8. \int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4 + 4}}.$$

$$19.10. \int_0^1 \frac{x^3}{x^8 + 1} dx.$$

$$19.12. \int_2^5 \frac{(x-2) dx}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}.$$

$$19.14. \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \cos x dx.$$

$$19.16. \int_0^{1/2} \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$19.18. \int_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$19.20. \int_1^e \frac{\sin \ln x}{x} dx.$$

$$19.22. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} x \sqrt{x^2 + 1} dx.$$

$$19.24. \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{12 \operatorname{ctg} 3x}{\sin^2 3x} dx.$$

$$19.25. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x \, dx .$$

$$19.26. \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x \, dx}{\sqrt{4-x^2}} .$$

$$19.27. \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} \, dx .$$

$$19.28. \int_{-1}^0 \frac{2x^2 \, dx}{4x^3 - 9} .$$

$$19.29. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x \, dx .$$

$$19.30. \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{x \, dx}{\cos^2(x^2)} .$$

Завдання 20. Обчислити інтеграл за формулою інтегрування частинами.

$$20.1. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (x-7) \cos 2x \, dx .$$

$$20.2. \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \arccos \frac{x}{3} \, dx .$$

$$20.3. \int_1^2 (3x+5) e^{3x} \, dx .$$

$$20.4. \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} (x-4) \cos 2x \, dx .$$

$$20.5. \int_0^{\frac{1}{2}} \arctg 2x \, dx .$$

$$20.6. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (x+2) \sin \frac{x}{2} \, dx .$$

$$20.7. \int_6^7 \ln(x-5) \, dx .$$

$$20.8. \int_0^2 (4x-9) 3^x \, dx .$$

$$20.9. \int_0^{\pi} (3x+4) \cos \frac{x}{2} \, dx .$$

$$20.10. \int_1^e x^3 \ln x \, dx .$$

$$20.11. \int_{-1}^2 (2x-5) e^{-x} \, dx .$$

$$20.12. \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{9}} 6 \arctg 3x \, dx .$$

$$20.13. \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{2}} (x+3) \sin 2x dx .$$

$$20.14. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 4x \operatorname{arctg} x dx .$$

$$20.15. \int_1^3 (5x+2) \ln x dx .$$

$$20.16. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (3x+4) \cos x dx .$$

$$20.17. \int_0^1 \arccos x dx .$$

$$20.18. \int_0^1 (2x-3) e^x dx .$$

$$20.19. \int_{\frac{1}{2}}^1 (6x+7) e^{2x} dx .$$

$$20.20. \int_1^4 \sqrt{x} \ln x dx .$$

$$20.21. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (3x-2) \sin x dx .$$

$$20.22. \int_1^3 (2x+5) e^x dx .$$

$$20.23. \int_2^4 x \ln(x-1) dx .$$

$$20.24. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (x-1) \cos x dx .$$

$$20.25. \int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx .$$

$$20.26. \int_{-7}^1 \ln(x+8) dx .$$

$$20.27. \int_1^2 \ln(2x-1) dx .$$

$$20.28. \int_{1/2}^1 \arccos x dx .$$

$$20.29. \int_0^3 (x-5) 2^x dx .$$

$$20.30. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (x-4) \sin x dx .$$

Завдання 21. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність.

$$\begin{array}{ll}
21.1. \text{ a)} \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{16x^4 + 1}, & \text{б)} \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{\ln(3x-1)}{3x-1} dx. \\
21.2. \text{ a)} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\pi(1+4x^2)} dx, & \text{б)} \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}. \\
21.3. \text{ a)} \int_0^{+\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4 + 1}}, & \text{б)} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^x}{x^2} dx. \\
21.4. \text{ a)} \int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}, & \text{б)} \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}. \\
21.5. \text{ a)} \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}, & \text{б)} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x}} dx. \\
21.6. \text{ a)} \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3 + 8)^4}}, & \text{б)} \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{dx}{20x^2 - 9x + 1}. \\
21.7. \text{ a)} \int_0^{+\infty} x e^{-3x} dx, & \text{б)} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{(1-x)\ln^2(1-x)}. \\
21.8. \text{ a)} \int_4^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}, & \text{б)} \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x} dx. \\
21.9. \text{ a)} \int_{-\infty}^{-1} \frac{7 dx}{x^2 - 4x}, & \text{б)} \int_0^1 \frac{x dx}{1-x^2}. \\
21.10. \text{ a)} \int_{-1}^{+\infty} \frac{x dx}{x^2 + 4x + 5}, & \text{б)} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 3x}{\sqrt[5]{(1-\sin 3x)^5}} dx. \\
21.11. \text{ a)} \int_0^{+\infty} \frac{5 \operatorname{arctg} 2x}{3(1+4x^2)} dx, & \text{б)} \int_0^1 \frac{2x dx}{\sqrt{1-x^4}}.
\end{array}$$

$$21.12. \text{ a) } \int_{\frac{1}{3}}^{+\infty} \frac{dx}{(1+9x^2) \operatorname{arctg}^2 3x},$$

$$\text{б) } \int_{-\frac{1}{3}}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}.$$

$$21.13. \text{ a) } \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{4x^2 + 4x + 5},$$

$$\text{б) } \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}.$$

$$21.14. \text{ a) } \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx,$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx.$$

$$21.15. \text{ a) } \int_0^{+\infty} \frac{3-x^2}{x^2+4} dx,$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}.$$

$$21.16. \text{ a) } \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}},$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(2x-1)^2}.$$

$$21.17. \text{ a) } \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^5}},$$

$$\text{б) } \int_0^1 x \ln x dx.$$

$$21.18. \text{ a) } \int_{-\infty}^{-3} \frac{x dx}{(x^2+1)^2},$$

$$\text{б) } \int_{\frac{3}{4}}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}.$$

$$21.19. \text{ a) } \int_1^{+\infty} \frac{3 dx}{x(1+\ln^2 x)},$$

$$\text{б) } \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}.$$

$$21.20. \text{ a) } \int_0^{+\infty} x \sin x dx,$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{9x^2 - 9x + 2}.$$

$$21.21. \text{ a) } \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2 - 4x},$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}.$$

$$21.22. \text{ a) } \int_{1/3}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\arctg^3 x},$$

$$\text{б) } \int_0^3 \frac{x dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}.$$

$$21.23. \text{ a) } \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}},$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}.$$

$$21.24. \text{ a) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2x)},$$

$$\text{б) } \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{64-x^6}}.$$

$$21.25. \text{ a) } \int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx,$$

$$\text{б) } \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-2x}}.$$

$$21.26. \text{ a) } \int_0^{+\infty} x \cos x dx,$$

$$\text{б) } \int_2^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-4}}.$$

$$21.27. \text{ a) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-2x+1},$$

$$\text{б) } \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}.$$

$$21.28. \text{ a) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arccos x},$$

$$\text{б) } \int_0^4 \frac{3x dx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}.$$

$$21.29. \text{ a) } \int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x-1)^2},$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}.$$

$$21.30. \text{ a) } \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2},$$

$$\text{б) } \int_1^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3-1}}.$$

Завдання 22. Обчислити площу фігури, обмеженої заданими лініями.

$$22.1. y = x^2 - 2x + 4, y = 3x - 2.$$

$$22.2. y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = 0, x = 1, x = 2.$$

$$22.3. y = x^2 - 3x + 2, y = x + 2.$$

$$22.4. y = x^2 - 2, y = 3x + 2.$$

- 22.5.** $y = x^2, y = 3 - x.$ **22.6.** $y = x^2 + 1, y = x - 1, x = 0, x = 3.$
22.7. $y = \frac{1}{1+x^2}, y = x, x = 0, x = 2.$ **22.8.** $y = \sqrt{x}, y = x^3.$
22.9. $y = 2x^2, y = x + 6$ **22.10.** $y = e^x, y = x, x = -1, x = 1.$
22.11. $y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x.$ **22.12.** $y = \frac{1}{1+x^2}, y = \frac{x^2}{2}.$
22.13. $y = \frac{1}{3+x^2}, y = \frac{x^2}{4}.$ **22.14.** $y = \sqrt{4-x^2}, y = 0, x = 0, x = 1.$
22.15. $y = 2\sqrt{x}, y = 2x^2.$ **22.16.** $y = 3^x, y = 0, x = 1, x = 2.$
22.17. $y^2 = 9x, y = 3x.$ **22.18.** $y = 6x - x^2 + 3, y = x^2 + 3.$
22.19. $x = \sqrt{4-y^2}, x = 0, y = 0, y = 1.$ **22.20.** $y^2 = 4x, x^2 = 4y.$
22.21. $y = 3x^2 - 1, y = 4x + 3.$ **22.22.** $y = 2x - x^2, y = 0, x = 0, x = 3.$
22.23. $y = -2x^2 + 1, y = -2x - 3.$ **22.24.** $y = (x-1)^2, y^2 = x - 1.$
22.25. $y = x^3, y = 1, x = 0.$ **22.26.** $y = x + 1, y = \cos x, y = 0.$
22.27. $xy = 6, x + y - 7 = 0.$ **22.28.** $x^2 = 4y, y = \frac{8}{x^2 + 4}.$
22.29. $y = x^2, y = 2 - x^2.$ **22.30.** $y = \sqrt[3]{x} + 2, y = \frac{1}{2}x + 2.$

Завдання 23. Обчислити площу фігури, обмеженої заданими лініями.

- 23.1.** $\rho = \frac{1}{2} - \sin \varphi.$ **23.2.** $\rho = 3 \cos 2\varphi.$
23.3. $\rho = 2(1 - \cos \varphi).$ **23.4.** $\rho^2 = \frac{3}{2} \cos 3\varphi.$
23.5. $\rho = 2 \sin 3\varphi.$ **23.6.** $\rho = 4 + \cos \varphi.$

$$23.7. \rho^2 = 3 \sin 2\varphi .$$

$$23.8. \rho = \frac{1}{2}(1 + \sin \varphi) .$$

$$23.9. \rho = 1 + \cos 2\varphi$$

$$23.10. \rho = \frac{2}{5}(1 + \cos \varphi) .$$

$$23.11. \rho = 5 \sin 4\varphi .$$

$$23.12. \rho = 2 + \sin 4\varphi .$$

$$23.13. \rho^2 = 1 + \cos 2\varphi .$$

$$23.14. \rho = 1 + \cos \varphi .$$

$$23.15. \rho = 3 \cos^2 \varphi .$$

$$23.16. \rho^2 = \frac{3}{2} \sin 4\varphi .$$

$$23.17. \rho = 1 + \sin \varphi .$$

$$23.18. \rho = 5 + \frac{2}{3} \cos 4\varphi$$

$$23.19. \rho = 5 \sin 2\varphi .$$

$$23.20. \rho = \frac{1}{2} \cos 3\varphi .$$

$$23.21. \rho^2 = 1 + \cos 2\varphi$$

$$23.22. \rho = 1 + \sin \varphi .$$

$$23.23. \rho = 1 + \frac{1}{3} \cos 2\varphi .$$

$$23.24. \rho = \frac{3}{2} \cos 4\varphi .$$

$$23.25. \rho = 2 - \sin 5\varphi .$$

$$23.26. \rho^2 = 2 + \sin 3\varphi .$$

$$23.27. \rho = 1 + \cos 3\varphi .$$

$$23.28. \rho^2 = \frac{2}{3} \cos \varphi .$$

$$23.29. \rho = \frac{1}{4} \cos 7\varphi$$

$$23.30. \rho = 4 \sin 3\varphi .$$

Завдання 24. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури Φ навколо вказаної осі координат.

$$24.1. \Phi : y^2 = 4 - x, \quad x = 0, \quad Oy .$$

$$24.2. \Phi : y = \cos x, \quad y = 0, \quad x = -\frac{\pi}{4}, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad Ox .$$

$$24.3. \Phi : y^2 = 9x, \quad y = -x, \quad Oy .$$

- 24.4. $\Phi: y^2 = 2x, x = \frac{3}{2}, Ox$.
- 24.5. $\Phi: y = x^3, y = 0, x = 2, Oy$.
- 24.6. $\Phi: y = 2x - x^2, y = 2 - x, Ox$.
- 24.7. $\Phi: y = 4x - x^2, y = x, Ox$.
- 24.8. $\Phi: y^2 = x, x^2 = y, Ox$.
- 24.9. $\Phi: y^2 + x - 4 = 0, x = 0, Ox$.
- 24.10. $\Phi: y = x^2, 8x = y^2, Oy$.
- 24.11. $\Phi: y^2 = 4x, x^2 = 4y, Ox$.
- 24.12. $\Phi: y = 2 - x, x^2 + y^2 = 4, Ox$.
- 24.13. $\Phi: y = \sin x, y = 0, x = 0, x = \pi, Ox$.
- 24.14. $\Phi: y = e^x, x = 0, y = 0, x = 1, Ox$.
- 24.15. $\Phi: y^2 = \frac{4}{3}x, x = 3, Ox$.
- 24.16. $\Phi: y = 2x - x^2, y = 0, Ox$.
- 24.17. $\Phi: y = \frac{x^3}{3}, x = -2, x = 2, Ox$.
- 24.18. $\Phi: xy = 4, y = 1, y = 2, x = 0, Ox$.
- 24.19. $\Phi: y = \frac{x^2}{4} - 1, y = 0, Ox$.
- 24.20. $\Phi: y^2 = x, y = \frac{x}{2}, Ox$.
- 24.21. $\Phi: xy = 4, 2x + y - 6 = 0, Ox$.
- 24.22. $\Phi: y^2 = \frac{3}{2}x, x^2 + y^2 = 1, Ox$.

- 24.23. $\Phi: y = 2 - x^2, y = x^2, Ox$.
- 24.24. $\Phi: y = 8 - x^2, y = x^2, Ox$.
- 24.25. $\Phi: y = \operatorname{tg}x, y = 0, x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}, Ox$.
- 24.26. $\Phi: y = x^3, x = 0, y = 8, Oy$.
- 24.27. $\Phi: y = 2^x, y = 4^x, x = 1, Ox$.
- 24.28. $\Phi: 2y = x^2, 2x + 2y - 3 = 0, Ox$.
- 24.29. $\Phi: y = x - x^2, y = 0, Ox$.
- 24.30. $\Phi: y = 2 - \frac{x^2}{2}, x + y = 2, Oy$.

Диференціальні рівняння

Завдання 25. Розв'язати диференціальне рівняння.

- | | |
|---|--|
| 25.1. $xy' = 1 + y^2$. | 25.2. $yy'\sqrt{1+x^2} = x\sqrt{1+y^2}$. |
| 25.3. $y' = \frac{x^2 y + y}{\sqrt{4+y^2}}$. | 25.4. $x + xy + y'(y + xy) = 0$. |
| 25.5. $(y - x^2 y)y' = 4x - 5xy^2$. | 25.6. $y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + 1}}$. |
| 25.7. $y' \operatorname{tg}x = y$. | 25.8. $(e^{2x} + 5)y' = ye^{2x}$. |
| 25.9. $e^{2x}(2y - 1)y' = y$. | 25.10. $(x + 4)y' = y^2 - 1$. |
| 25.11. $(1 + e^x)yy' = e^x$. | 25.12. $\sqrt{4 - x^2}y' + xy^2 + x = 0$. |
| 25.13. $(e^x + 8)y' = ye^x$. | 25.14. $2x + 2xy^2 + \sqrt{2 - x^2}y' = 0$. |

$$25.15. y' \operatorname{ctgx} = y^4 .$$

$$25.17. (2x - xy^2) dx = (y + yx^2) dy .$$

$$25.19. xy' + y = y^2 .$$

$$25.21. xy' - 2y = yx^3 .$$

$$25.23. (3 + e^x) yy' = e^x .$$

$$25.25. y' \sin x = y \ln y .$$

$$25.27. yy' = e^x (4 + y^2) .$$

$$25.29. y' \operatorname{ctgy} = x^3 .$$

$$25.16. y'y\sqrt{1-x^2} = \sqrt{5+y^2} .$$

$$25.18. y \ln y + xy' = 0 .$$

$$25.20. \sqrt{1-x^2} y' + xy^2 + x = 0 .$$

$$25.22. xy' = y(1 + \ln y) .$$

$$25.24. \sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2} yy' = 0 .$$

$$25.26. (1 + e^x) yy' = e^x .$$

$$25.28. \sqrt{4-x^2} y' = 3x + xy^2 .$$

$$25.30. y' = 2\sqrt{y} \ln x .$$

Завдання 26. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$26.1. y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2 .$$

$$26.3. y' = \frac{x+y}{x-y} .$$

$$26.5. y' = \frac{y^2}{x^2} + 5\frac{y}{x} + 8 .$$

$$26.7. xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x .$$

$$26.9. y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4 .$$

$$26.11. xy' + 2\sqrt{xy} = y .$$

$$26.2. y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x} .$$

$$26.4. y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} .$$

$$26.6. y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x} .$$

$$26.8. y' = \frac{x+2y}{2x-y} .$$

$$26.10. xy' = y \left(1 + \ln \frac{y}{x} \right) .$$

$$26.12. xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y .$$

$$26.13. y' = \frac{y^2}{x^2} + 3\frac{y}{x} + 5.$$

$$26.15. xy' = xe^{-\frac{y}{x}} + y.$$

$$26.17. y' = \frac{y^2}{x^2} + 7\frac{y}{x} + 9.$$

$$26.19. xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$$

$$26.21. y' = 2\frac{y^2}{x^2} + 5\frac{y}{x} + 1.$$

$$26.23. xy' = 3\sqrt{x^2 - y^2} + y.$$

$$26.25. xy' = y + x \sin^2 \frac{2y}{x}.$$

$$26.27. y' = \frac{y^2}{x^2} + 3\frac{y}{x} + 1.$$

$$26.29. y' = 3\cos^2 \frac{2y}{x} + \frac{y}{x}.$$

$$26.14. xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

$$26.16. xy' = y + 2x \sin^2 \frac{3y}{x}.$$

$$26.18. y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}.$$

$$26.20. xy' - y = y \ln \frac{y}{x}.$$

$$26.22. xy' = y + 2x \operatorname{tg} \frac{3y}{x}.$$

$$26.24. xy' = y + x \cos^2 \frac{y}{x}.$$

$$26.26. y' = \frac{y^2}{x^2} + 9\frac{y}{x} + 16.$$

$$26.28. xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

$$26.30. y' = \frac{y^2}{x^2} + 5\frac{y}{x} + 4.$$

Завдання 27. Знайти розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє задану початкову умову.

$$27.1. y' - \frac{y}{x} = x^2,$$

$$y(1) = 0.$$

$$27.2. y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x,$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$27.3. y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x,$$

$$y(0) = 0.$$

- 27.4. $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.
- 27.5. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x$, $y(-1) = \frac{3}{2}$.
- 27.6. $y' - \frac{x}{x+1} y = e^x (x+1)$, $y(0) = 1$.
- 27.7. $y' - \frac{y}{x} = x \sin x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
- 27.8. $y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 5$, $y(2) = 4$.
- 27.9. $y' + \frac{y}{2x} = x^2$, $y(1) = 1$.
- 27.10. $y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}$, $y(0) = \frac{2}{3}$.
- 27.11. $y' + \frac{y}{x} = \sin x$, $y(\pi) = \frac{1}{\pi}$.
- 27.12. $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x$, $y(1) = e$.
- 27.13. $y' - \frac{y}{x} = -2 \frac{\ln x}{x}$, $y(1) = 1$.
- 27.14. $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$, $y(1) = 1$.
- 27.15. $y' + \frac{2}{x} y = x^3$, $y(1) = -5/6$.
- 27.16. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1+x^2$, $y(1) = 3$.
- 27.17. $y' + \frac{y}{x} = 3x$, $y(1) = 1$.

$$27.18. \quad y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, \quad y(1) = 4.$$

$$27.19. \quad y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1.$$

$$27.20. \quad y' + 2xy = -2x^3, \quad y(1) = e^{-1}.$$

$$27.21. \quad y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}.$$

$$27.22. \quad y' + xy = -x^3, \quad y(0) = 3.$$

$$27.23. \quad y' - \frac{2}{x+1}y = e^x(x+1)^2, \quad y(0) = 1.$$

$$27.24. \quad y' + 2xy = e^{-x^2} \sin x, \quad y(0) = 1.$$

$$27.25. \quad y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

$$27.26. \quad y' - y \cos x = -\sin 2x, \quad y(0) = 3.$$

$$27.27. \quad y' - 4xy = -4x^3, \quad y(0) = -\frac{1}{2}.$$

$$27.28. \quad y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1.$$

$$27.29. \quad y' - 3x^2y = \frac{x^2(1+x^3)}{3}, \quad y(0) = 0.$$

$$27.30. \quad y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}, \quad y(1) = 1.$$

Завдання 28. Знайти розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє задані початкові умови.

$$28.1. \quad y''' = \sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0.$$

$$28.2. y''' = \frac{1}{x},$$

$$y(1) = \frac{1}{4}, y'(1) = y''(1) = 0.$$

$$28.3. y'' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$y(0) = 1, y'(0) = \frac{3}{5}.$$

$$28.4. y''' = \frac{6}{x^3},$$

$$y(1) = 0, y'(1) = 5, y''(1) = 1.$$

$$28.5. y'' = 4 \cos 2x,$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 3.$$

$$28.6. y'' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

$$28.7. xy''' = 2,$$

$$y(1) = \frac{1}{2}, y'(1) = y''(1) = 0.$$

$$28.8. y''' = e^{2x},$$

$$y(0) = \frac{9}{8}, y'(0) = \frac{1}{4}, y''(0) = -\frac{1}{2}.$$

$$28.9. y''' = \cos^2 x,$$

$$y(0) = 1, y'(0) = -\frac{1}{8}, y''(0) = 0.$$

$$28.10. y'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y(0) = 2, y'(0) = 3.$$

$$28.11. y'' = \frac{1}{\sin^2 2x},$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}, y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$28.12. y'' = x + \sin x,$$

$$y(0) = -3, y'(0) = 0.$$

$$28.13. y'' = 2 \sin x \cos 2x,$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

$$28.14. y'' = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x},$$

$$y(0) = \frac{1}{2}, y'(0) = 0.$$

$$28.15. y''' = e^{\frac{x}{2}} + 1,$$

$$y(0) = 8, y'(0) = 5, y''(0) = 2.$$

$$28.16. y'' = \frac{x}{e^{2x}},$$

$$y(0) = \frac{1}{4}, y'(0) = -\frac{1}{4}.$$

$$28.17. y'' = \sin^2 3x,$$

$$y(0) = -\frac{\pi^2}{16}, y'(0) = 0.$$

$$28.18. y''' = x \sin x,$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0.$$

$$28.19. y''' \sin^4 x = \sin 2x,$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, y\left(\frac{\pi}{2}\right)' = 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right)'' = -1.$$

$$28.20. y'' = \cos x + e^{-x},$$

$$y(0) = -e^{-\pi}, y'(0) = 1.$$

$$28.21. y'' = \sin^3 x,$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{7}{9}, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$28.22. y''' = \sqrt{x} - \sin 2x,$$

$$y(0) = -\frac{1}{8}, y'(0) = \frac{1}{8} \cos 2, y''(0) = \frac{1}{2}.$$

$$28.23. y'' = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}},$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

$$28.24. y'' = 2 \sin x \cos^2 x,$$

$$y(0) = -\frac{5}{9}, y'(0) = -\frac{2}{3}.$$

$$28.25. y'' = \sin^2 x \cos x,$$

$$y(0) = \frac{1}{9}, y'(0) = 1.$$

$$28.26. y'' = \operatorname{arctg} x,$$

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

$$28.27. y'' = -2 \cos x \cos 2x,$$

$$y(0) = \frac{2}{3}, y'(0) = \frac{2}{3}.$$

$$28.28. y'' = x - \ln x,$$

$$y(1) = -\frac{5}{12}, y'(1) = \frac{3}{2}.$$

$$28.29. y'' = \frac{1}{x^2},$$

$$y(1) = 3, y'(1) = 1.$$

$$28.30. y''' = \cos 4x,$$

$$y(0) = 2, y'(0) = \frac{15}{16}, y''(0) = 0.$$

Завдання 29. Розв'язати диференціальне рівняння.

29.1. $(1-x^2)y'' - xy' = 2$.

29.2. $2xy'y'' = (y')^2 - 1$.

29.3. $x^3y'' + x^2y' = 1$.

29.4. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$.

29.5. $y''x \ln x = y'$.

29.6. $xy'' - y' = x^2e^x$.

29.7. $y''x \ln x = 2y'$.

29.8. $x^2y'' + xy' = 1$.

29.9. $y'' = -\frac{x}{y}$.

29.10. $xy'' = y'$.

29.11. $y'' = y' + x$.

29.12. $xy'' = y' + x^2$.

29.13. $xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right)$.

29.14. $xy'' + y' = \ln x$.

29.15. $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1$.

29.16. $y'' + 2x(y')^2 = 0$.

29.17. $2xy'y'' = (y')^2 + 1$.

29.18. $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$.

29.19. $y''' + y'' \operatorname{tg} x = \sec x$.

29.20. $y'' - 2y' \operatorname{ctg} x = \sin^3 x$.

29.21. $y'' + 4y' = 2x^2$.

29.22. $xy'' - y' = 2x^2e^x$.

29.23. $x(y'' + 1) + y' = 0$.

29.24. $y'' + 4y' = \cos 2x$.

29.25. $y'' + y' = \sin x$.

29.26. $x^2y'' = (y')^2$.

29.27. $2xy'y'' = (y')^2 - 4$.

29.28. $y'''x \ln x = y''$.

29.29. $y'' \operatorname{ctg} x + y' = 2$.

29.30. $(1+x^2)y'' = 2xy$.

Завдання 30. Знайти розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє задані початкові умови.

30.1. $y'' = y'e^y$,

$y(0) = 0, y'(0) = 1$.

- 30.2. $(y')^2 + 2yy'' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
- 30.3. $yy'' + (y')^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
- 30.4. $y'' + 2y(y')^3 = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = \frac{1}{3}$.
- 30.5. $y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$, $y'(1) = 2$.
- 30.6. $2yy'' = (y')^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
- 30.7. $yy'' - (y')^2 = y^4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
- 30.8. $y'' = -\frac{1}{2y^3}$, $y(0) = \frac{1}{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.
- 30.9. $y'' = 1 - (y')^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
- 30.10. $(y'')^2 = y'$, $y(0) = \frac{2}{3}$, $y'(0) = 1$.
- 30.11. $2yy'' - (y')^2 + 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.
- 30.12. $y'' = 2 - y$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.
- 30.13. $y'' = \frac{1}{y^3}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
- 30.14. $yy'' - 2(y')^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
- 30.15. $y'' = y' + (y')^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
- 30.16. $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
- 30.17. $y''(1+y) = 5(y')^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
- 30.18. $y''(2y+3) - 2(y')^2 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

$$30.19. \quad 4(y'')^2 = 1 + (y')^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

$$30.20. \quad 2(y')^2 = (y-1)y'', \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2.$$

$$30.21. \quad 1 + (y')^2 = yy'', \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

$$30.22. \quad y'' + y(y')^3 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

$$30.23. \quad yy'' - (y')^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

$$30.24. \quad yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

$$30.25. \quad y'' - \frac{(1 + \ln y)(y')^2}{y(1 - \ln y)} = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

$$30.26. \quad y''(1 + y) = (y')^2 + y', \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2.$$

$$30.27. \quad y'' = \frac{y'}{\sqrt{y}}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

$$30.28. \quad y^3 y' y'' + 1 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$$

$$30.29. \quad yy'' - 2yy' \ln y = (y')^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

$$30.30. \quad y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Завдання 31. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння другого порядку.

$$31.1. \quad y'' - 2y' + 3y = f(x), \text{ якщо}$$

- а) $f(x) = 0$
- б) $f(x) = (2x-1)e^{2x}$
- в) $f(x) = 3 \sin x$.

$$31.2. \quad y'' - 2y' + 5y = f(x), \text{ якщо}$$

- а) $f(x) = 0$

- 31.3.** $y'' - 2y' - 8y = f(x)$, якщо
- а) $f(x) = 0$
 б) $f(x) = (3x+1)e^{-x}$
 в) $f(x) = 4 \cos x$
- 31.4.** $y'' - 12y' + 36y = f(x)$, якщо
- а) $f(x) = 0$
 б) $f(x) = (5x-3)e^{-2x}$
 в) $f(x) = 2 \sin x$
- 31.5.** $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, якщо
- а) $f(x) = 0$
 б) $f(x) = (x-4)e^{3x}$
 в) $f(x) = 5 \cos x$
- 31.6.** $y'' - 6y' + 10y = f(x)$, якщо
- а) $f(x) = 0$
 б) $f(x) = (34-12x)e^{-x}$
 в) $f(x) = 2 \sin 3x$
- 31.7.** $y'' + 5y' - 6y = f(x)$, якщо
- а) $f(x) = 0$
 б) $f(x) = (7x-4)e^{-x}$
 в) $f(x) = 4 \cos 2x$
- 31.8.** $y'' + 6y' + 10y = f(x)$, якщо
- а) $f(x) = 0$
 б) $f(x) = (3x-5)e^{-2x}$
 в) $f(x) = 3 \sin 4x$
- 31.9.** $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, якщо
- а) $f(x) = 0$
 б) $f(x) = (2x+5)e^{3x}$
 в) $f(x) = \cos 5x$
- 31.10.** $y'' + 6y' + 9y = f(x)$, якщо
- а) $f(x) = 0$
 б) $f(x) = (5x+3)e^{2x}$
 в) $f(x) = 5 \sin 2x$
- 31.11.** $y'' + 4y' + 8y = f(x)$, якщо
- а) $f(x) = 0$
 б) $f(x) = (48x+8)e^x$
 в) $f(x) = 3 \cos 4x$
- а) $f(x) = 0$
 б) $f(x) = (4x-3)e^{2x}$

- 31.12. $y'' - 5y' - 6y = f(x)$, якщо
- а) $f(x) = 0$
 б) $f(x) = (3x - 2)e^x$
 в) $f(x) = 3\cos 2x$.
- 31.13. $y'' - 8y' + 12y = f(x)$, якщо
- а) $f(x) = 0$
 б) $f(x) = (16x - 2)e^{3x}$
 в) $f(x) = 7\sin 3x$.
- 31.14. $y'' + 8y' + 25y = f(x)$, якщо
- а) $f(x) = 0$
 б) $f(x) = (x + 3)e^{5x}$
 в) $f(x) = 3\sin 4x$.
- 31.15. $y'' - 9y' + 20y = f(x)$, якщо
- а) $f(x) = 0$
 б) $f(x) = (8x - 5)e^{-2x}$
 в) $f(x) = 3\cos 5x$.
- 31.16. $y'' - 4y' + 3y = f(x)$, якщо
- а) $f(x) = 0$
 б) $f(x) = (2x - 5)e^{5x}$
 в) $f(x) = 4\sin x$.
- 31.17. $y'' + 2y' + 2y = f(x)$, якщо
- а) $f(x) = 0$
 б) $f(x) = (-4x + 3)e^{3x}$
 в) $f(x) = 2\cos x$.
- 31.18. $y'' + 2y' - 24y = f(x)$, якщо
- а) $f(x) = 0$
 б) $f(x) = (3x + 7)e^{2x}$
 в) $f(x) = \sin 2x$.
- 31.19. $y'' + 6y' + 13y = f(x)$, якщо
- а) $f(x) = 0$
 б) $f(x) = (5x + 3)e^{-x}$
 в) $f(x) = 4\cos 5x$.
- 31.20. $y'' + 5y' + 4y = f(x)$, якщо
- а) $f(x) = 0$
 б) $f(x) = (3x - 4)e^{4x}$
 в) $f(x) = 5\sin 2x$.

- 31.21.** $y'' - 4y' + 29y = f(x)$, якщо а) $f(x) = 0$
 б) $f(x) = (5x + 2)e^{5x}$
 в) $f(x) = 3\sin 6x$.
- 31.22.** $y'' - 4y' + 5y = f(x)$, якщо а) $f(x) = 0$
 б) $f(x) = (2x - 3)e^x$
 в) $f(x) = \cos 2x$.
- 31.23.** $y'' - 6y' + 9y = f(x)$, якщо а) $f(x) = 0$
 б) $f(x) = (3x + 5)e^{4x}$
 в) $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$.
- 31.24.** $y'' + 9y' + 8y = f(x)$, якщо а) $f(x) = 0$
 б) $f(x) = (9x - 7)e^{2x}$
 в) $f(x) = \frac{1}{3}\cos 2x$.
- 31.25.** $y'' - 12y' + 40y = f(x)$, якщо а) $f(x) = 0$
 б) $f(x) = (2x + 5)e^{3x}$
 в) $f(x) = \frac{1}{5}\sin 3x$.
- 31.26.** $y'' + 4y' - 5y = f(x)$, якщо а) $f(x) = 0$
 б) $f(x) = (3x + 7)e^{2x}$
 в) $f(x) = \frac{2}{5}\cos 3x$.
- 31.27.** $y'' + 2y' + y = f(x)$, якщо а) $f(x) = 0$
 б) $f(x) = (5x + 6)e^x$
 в) $f(x) = \sin 4x$.
- 31.28.** $y'' + 2y' + 37y = f(x)$, якщо а) $f(x) = 0$
 б) $f(x) = (5x - 8)e^{6x}$
 в) $f(x) = \frac{3}{2}\cos x$.
- 31.29.** $6y'' - y' - y = f(x)$, якщо а) $f(x) = 0$

- 31.30. $2y'' + 7y' + 3y = f(x)$, якщо
- а) $f(x) = 0$
 б) $f(x) = (5x + 3)e^{2x}$
 в) $f(x) = 2\sin 3x$
 а) $f(x) = 0$
 б) $f(x) = (3x - 4)e^{-2x}$
 в) $f(x) = \frac{3}{4}\cos 2x$.

Завдання 32. Розв'язати систему диференціальних рівнянь.

$$32.1. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 4y. \end{cases}$$

$$32.2. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$$

$$32.3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 8x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$$

$$32.4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 6y. \end{cases}$$

$$32.5. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

$$32.6. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -6x - 3y. \end{cases}$$

$$32.7. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y. \end{cases}$$

$$32.8. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 2y. \end{cases}$$

$$32.9. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = -4x + 4y. \end{cases}$$

$$32.10. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 8y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$$

$$32.11. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = -4x + y. \end{cases}$$

$$32.12. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

$$32.13. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 6y. \end{cases}$$

$$32.14. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 5y. \end{cases}$$

$$32.15. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

$$32.16. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$$

$$32.17. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 8y. \end{cases}$$

$$32.18. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$$

$$32.19. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 7x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 5y. \end{cases}$$

$$32.20. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + 4y. \end{cases}$$

$$32.21. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 8y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 4y. \end{cases}$$

$$32.22. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 8y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 3y. \end{cases}$$

$$32.23. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 8x + y. \end{cases}$$

$$32.24. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 5y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$$

$$32.25. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 6y. \end{cases}$$

$$32.26. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = -8x - 5y. \end{cases}$$

$$32.27. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 8y, \\ \frac{dy}{dt} = -8x + 4y. \end{cases}$$

$$32.28. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 2y. \end{cases}$$

$$32.29. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -7x + 5y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 8y. \end{cases}$$

$$32.30. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x - 8y, \\ \frac{dy}{dt} = -4x - 2y. \end{cases}$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Функції двох змінних

Частинні похідні функції двох змінних

За означенням частинні похідні функції двох змінних $z = f(x, y)$ у точці $P(x; y)$ обчислюються за формулами:

по змінній x –

$$z'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

по змінній y –

$$z'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Поряд з позначеннями z'_x та z'_y використовують також інші позначення – відповідно $\frac{\partial z}{\partial x}$, $f'_x(x, y)$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, $f'_y(x, y)$.

З означення частинних похідних випливає, що для їх знаходження можна використовувати відомі формули обчислення похідних функцій однієї змінної, вважаючи іншу змінну сталою.

Приклад 1. Знайти частинні похідні функції $z = 5x^4y^2 + 3x^2 - 4y^3 + 7$.

▮ Вважаючи y сталою, знаходимо

$$\begin{aligned} z'_x &= 5y^2 \cdot (x^4)'_x + 3(x^2)'_x - 4(y^3)'_x + (7)'_x = \\ &= 5y^2 \cdot 4x^3 + 3 \cdot 2x - 0 + 0 = 20x^3y^2 + 6x. \end{aligned}$$

Вважаючи x сталою, знаходимо

$$\begin{aligned} z'_y &= 5x^4 \cdot (y^2)'_y + (3x^2)'_y - 4(y^3)'_y + (7)'_y = \\ &= 5x^4 \cdot 2y + 0 - 4 \cdot 3y^2 + 0 = 10x^4y - 12y^2. \quad \square \end{aligned}$$

Приклад 2. Знайти частинні похідні функції $z = \arccos \frac{x^2}{y}$.

▮ Враховуючи правило диференціювання складної функції, дістанемо

$$\begin{aligned} z'_x &= \left(\arccos \frac{x^2}{y} \right)'_x = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{y} \right)^2}} \cdot \left(\frac{x^2}{y} \right)'_x = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^4}{y^2}}} \cdot \frac{1}{y} \cdot (x^2)'_x = \\ &= -\frac{y}{\sqrt{y^2 - x^4}} \cdot \frac{1}{y} \cdot 2x = -\frac{2xy}{\sqrt{y^2 - x^4} \cdot y} = -\frac{2x}{\sqrt{y^2 - x^4}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_y &= \left(\arccos \frac{x^2}{y} \right)'_y = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{y} \right)^2}} \cdot \left(\frac{x^2}{y} \right)'_y = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^4}{y^2}}} \cdot x^2 \cdot \left(\frac{1}{y} \right)'_y = \\ &= -\frac{y}{\sqrt{y^2 - x^4}} \cdot x^2 \cdot \left(-\frac{1}{y^2} \right) = \frac{x^2 y}{\sqrt{y^2 - x^4} \cdot y^2} = \frac{x^2}{y\sqrt{y^2 - x^4}}. \quad \square \end{aligned}$$

Частинними похідними другого порядку функції $z = f(x, y)$ називаються частинні похідні від її частинних похідних першого порядку.

Приклад 3. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = 3xy^4 + 5x^3 - 2y^2 + 1$.

$$\square z'_x = (3xy^4 + 5x^3 - 2y^2 + 1)'_x = 3y^4 + 15x^2,$$

$$z'_{xy} = (3xy^4 + 5x^3 - 2y^2 + 1)'_y = 12xy^3 - 4y,$$

$$z''_{xx} = (3y^4 + 15x^2)'_x = 30x,$$

$$z''_{xx} = (12xy^3 - 4y)'_y = 36xy^2 - 4,$$

$$z''_{xy} = (3y^4 + 15x^2)'_y = 12y^3,$$

$$z''_{yx} = (12xy^3 - 4y)'_x = 12y^3. \quad \lrcorner$$

Диференціал функції двох змінних

Диференціал функції $z = f(x, y)$ обчислюється за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Приклад 4. Знайти повний диференціал функції $z = \ln(x^2 + y^2)$

┌ Знайдемо частинні похідні функції $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ та підставимо їх у вираз

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\ln(x^2 + y^2))'_x = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (x^2 + y^2)'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\ln(x^2 + y^2))'_y = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (x^2 + y^2)'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2},$$

$$dz = \frac{2x}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y}{x^2 + y^2} dy \quad \lrcorner$$

Диференціювання неявно заданих функцій

Якщо рівняння $F(x, y, z) = 0$, де $F(x, y, z)$ – диференційовна функція змінних x, y і z , визначає z як функцію незалежних змінних x і y і $F'_z(x, y, z) \neq 0$, то частинні похідні цієї неявно заданої функції знаходяться за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}.$$

Приклад 5. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $x^3y - 2y^2 + 3z^2 - y \cos z + 7 = 0$.

┌ Позначимо $F(x, y, z) = x^3y - 2y^2 + 3z^2 - y \cos z + 7$.

Знайдемо частинні похідні:

$$F'_x(x, y, z) = 3x^2y,$$

$$F'_y(x, y, z) = x^3 - 4y - \cos z,$$

$$F'_z(x, y, z) = 6z + y \sin z.$$

За формулами $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2y}{6z + y \sin z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^3 - 4y - \cos z}{6z + y \sin z}. \quad \lrcorner$$

Диференціювання складних функцій

Якщо z є складною функцією кількох незалежних змінних, наприклад, $z = f(x, y)$, де $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ (u, v – незалежні змінні; f, φ, ψ – диференційовні функції), то частинні похідні z по u і v знаходяться за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Приклад 6. Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z = x^2y - y^2x$, де $x = u \cdot \cos v$,

$$y = u \cdot \sin v.$$

┌ Знайдемо похідні з правих частин формул:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (xy^2 - y^2x)'_x = 2xy - y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (x^2y - y^2x)'_y = x^2 - 2xy,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = (u \cdot \cos v)'_u = \cos v, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = (u \cdot \cos v)'_v = -u \sin v,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = (u \cdot \sin v)'_u = \sin v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = (u \cdot \sin v)'_v = u \cos v.$$

Підставимо отримані вирази у формули для диференціювання складних функцій. Тоді, маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= (2xy - y^2) \cdot \cos v + (x^2 - 2xy) \cdot \sin v = \\ &= (2u \cos v \cdot u \sin v - u^2 \sin^2 v) \cdot \cos v + \\ &+ (u^2 \cos^2 v - 2u \cos v \cdot u \sin v) \cdot \sin v = \\ &= u^2 \sin v \cos v (2 \cos v - \sin v) + u^2 \sin v \cos v (\cos v - 2 \sin v) = \\ &= u^2 \sin v \cos v (2 \cos v - \sin v + \cos v - 2 \sin v) = \\ &= u^2 \sin v \cos v (3 \cos v - 3 \sin v) = 3u^2 \sin v \cos v (\cos v - \sin v). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial v} &= (2xy - y^2) \cdot (-u \sin v) + (x^2 - 2xy) \cdot u \cos v = \\ &= (2u \cos v \cdot u \sin v - u^2 \sin^2 v) \cdot (-u \sin v) + (u^2 \cos^2 v - 2u^2 \cos v \sin v) \times \\ &\times u \cos v = -u^3 \sin^2 v (2 \cos v - \sin v) + u^3 \cos^2 v (\cos v - 2 \sin v) = \\ &= u^3 \left(\underline{-2 \sin^2 v \cos v} + \underline{\sin^3 v} + \underline{\cos^3 v} - \underline{2 \cos^2 v \sin v} \right) = \\ &= u^3 \left[-2 \sin v \cos v (\sin v + \cos v) + (\sin v + \cos v) \times \right. \\ &\left. \times (\sin^2 v - \sin v \cos v + \cos^2 v) \right] = u^3 (\sin v + \cos v) (1 - 3 \sin v \cos v). \quad \square \end{aligned}$$

Похідна функції за напрямом

Похідною функції $z = f(x, y)$ у точці $P(x, y)$ за напрямом $\vec{e} = \overline{PP_1}$ називається

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \lim_{PP_1 \rightarrow 0} \frac{f(P_1) - f(P)}{PP_1},$$

де $f(P)$ і $f(P_1)$ – значення функції у точках P і P_1 , PP_1 – відстань між цими точками.

Якщо функція z диференційовна, то має місце формула

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha,$$

де α – кут, що утворює вектор \vec{e} з віссю Ox .

Приклад 7. Знайти похідну функції $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ у точці $P(2; -1)$ в напрямі від цієї точки до точки $N(5; 2)$.

┌ Знайдемо частинні похідні даної функції та їх значення у точці P :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6xy + 3y^2; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1)^2 = 27;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x^2 + 6xy; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = -3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 \cdot (-1) = -24.$$

Знайдемо координати вектора $\vec{a} = \overline{PN}$: $\vec{a} = \{5 - 2; 2 - (-1)\} = \{3; 3\}$.

Знайдемо координати орта \vec{a}_0 вектора \vec{a} :

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}, \quad \vec{a}_0 = \left\{ \frac{3}{3\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

$$\text{Звідси } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

За формулою $\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha$:

$$\frac{\partial z}{\partial a} = 27 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + (-24) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}. \quad \perp$$

Градiєнт функції

Градiєнтом функції $z = f(x, y)$ у точці $P(x; y)$ називається вектор, проєкціями якого на координатні осі є відповідні частинні похідні даної функції:

$$\overline{\text{grad}} z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j}.$$

Приклад 8. Знайти градiєнт функції $z = x^2y$ у точці $P(1; 1)$.

┌ Знаходимо частинні похідні та їх значення в точці P :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = 1^2 = 1.$$

Отже, $\overline{\text{grad}} z = 2\vec{i} + \vec{j}$. \square

Рівняння дотичної площини і нормалі

Дотичною площиною до поверхні у точці M (точка дотику) називається площина, в якій знаходяться всі дотичні у точці M до різних кривих, що проведені на поверхні через цю точку.

Нормаллю до поверхні називається перпендикуляр до дотичної площини у точці дотику.

Якщо рівняння поверхні у декартовій системі координат задано у явній формі $z = f(x, y)$, де $f(x, y)$ – диференційовна функція, то рівняння дотичної площини у точці $M(x_0; y_0; z_0)$ поверхні має вигляд

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Рівняння нормалі має вигляд

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Приклад 9. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні

$$z = \frac{x^2}{2} - y^2 \text{ у точці } M(2; -1; 1).$$

\square Рівняння дотичної площини у точці $M(x_0; y_0; z_0)$ поверхні має вигляд $z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.

$$\text{Рівняння нормалі має вигляд } \frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Знайдемо частинні похідні даної функції та їх значення у точці M :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = 2.$$

Звідси маємо:

$z - 1 = 2(x - 2) + 2(y + 1)$ або $2x + 2y - z - 1 = 0$ – рівняння дотичної площини;

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1} \text{ – рівняння нормалі. } \lrcorner$$

Локальний екстремум функції двох змінних

Функція $f(x, y)$ має локальний максимум (мінімум) $f(a, b)$ у точці $P(a, b)$, якщо для всіх відмінних від P точок $P'(x, y)$ з деякого околу точки P виконується нерівність $f(a, b) > f(x, y)$ (відповідно $f(a, b) < f(x, y)$). Максимум або мінімум функції називають її екстремумом.

Необхідна умова екстремуму. Точки, в яких диференційовна функція $f(x, y)$ може набувати екстремуму, знаходять шляхом розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

Розв'язки даної системи називають стаціонарними точками.

Достатня умова екстремуму. У стаціонарній точці $P(a, b)$ знаходимо

$$A = f''_{xx}(a, b), \quad B = f''_{xy}(a, b), \quad C = f''_{yy}(a, b), \quad \Delta = AC - B^2.$$

Тоді: 1) якщо $\Delta > 0$, то функція має екстремум у точці $P(a, b)$, а саме – максимум, якщо $A < 0$, і мінімум, якщо $A > 0$;

2) якщо $\Delta < 0$, то екстремуму в точці $P(a, b)$ немає;

3) якщо $\Delta = 0$, то потрібні подальші дослідження.

Приклад 10. Дослідити на екстремуми функцію $z = 4y^3 + 3x^2y - 2x^2 - 108y - 3$.

▮ Знайдемо частинні похідні і складемо систему $\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 4x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 12y + 3x^2 - 108,$$

$$\begin{cases} 6xy - 4x = 0 \\ 12y + 3x^2 - 108 = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x(6y - 4) = 0 \\ 12y + 3x^2 - 108 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему і знаходимо три стаціонарні точки: $P_1\left(0; \frac{5}{6}\right)$,
 $P_2\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $P_3\left(-\frac{10\sqrt{3}}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Знайдемо похідні 2-го порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12$ і обчислимо $\Delta = AC - B^2$ для кожної стаціонарної точки.

1) Точка $P_1\left(0; \frac{5}{6}\right)$: $A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_R = 6 \cdot \frac{5}{6} = 5$, $B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_R = 6 \cdot 0 = 0$,
 $C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_R = 12$.

$$\Delta = AC - B^2 = 5 \cdot 12 - 0 = 60.$$

Оскільки $\Delta > 0$ і $A > 0$, то у точці P_1 функція має мінімум.

2) Точка $P_2\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}; \frac{2}{3}\right)$: $A = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$, $B = 6 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} = 20\sqrt{3}$, $C = 12$;

$$\Delta = 4 \cdot 12 - (20\sqrt{3})^2 = 48 - 1200 = -1152.$$

Оскільки $\Delta < 0$, то у точці P_2 функція не має екстремуму.

3) Точки $P_3\left(-\frac{10\sqrt{3}}{3}; \frac{2}{3}\right)$: $A = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$, $B = 6 \cdot \left(-\frac{10\sqrt{3}}{3}\right) = -20\sqrt{3}$,

$$C = 12; \Delta = 4 \cdot 12 - (-20\sqrt{3})^2 = 48 - 1200 = -1152.$$

Оскільки $\Delta < 0$, то у точці P_3 екстремуму немає.]

Умовний екстремум

Умовним екстремумом функції $f(x, y)$ називають екстремум цієї функції за умови, що її аргументи пов'язані рівнянням зв'язку $\varphi(x, y) = 0$. Для знаходження умовного екстремуму функції $f(x, y)$ за умови $\varphi(x, y) = 0$ складають функцію Лагранжа

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y),$$

де λ – невизначений сталий множник. Необхідні умови екстремуму зводяться до системи трьох рівнянь з трьома невідомими x , y , λ :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Достатні умови умовного екстремуму. Нехай x_0 , y_0 , λ_0 – розв’язок системи. Складемо визначник

$$\Delta = - \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial y^2} & \frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta < 0$, то функція $f(x, y)$ має у точці (x_0, y_0, λ_0) умовний максимум; якщо $\Delta > 0$ – умовний мінімум.

Приклад 11. Знайти екстремуми функції $z = 6 - 4x - 3y$ за умови, що змінні x і y задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = 1$.

Г Геометрично задача зводиться до знаходження найбільшого і найменшого значень аплікати z площини $z = 6 - 4x - 3y$ для точок її перетину із циліндром $x^2 + y^2 = 1$.

Складемо функцію Лагранжа

$$F(x, y, \lambda) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

$$\text{Маємо } \frac{\partial F}{\partial x} = -4 + 2\lambda x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -3 + 2\lambda y, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1.$$

З необхідної умови дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -4 + 2\lambda x = 0 \\ -3 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

розв’язуючи яку знаходимо

$$\lambda_1 = \frac{5}{2}, \quad x_1 = \frac{4}{5}, \quad y_1 = \frac{3}{5} \quad \text{і} \quad \lambda_2 = -\frac{5}{2}, \quad x_2 = -\frac{4}{5}, \quad y_2 = -\frac{3}{5}.$$

Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda.$$

При $\lambda = \frac{5}{2}$, $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{3}{5}$ маємо визначник

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1,4 \\ 0 & 5 & 1,2 \\ 1,4 & 1,2 & 0 \end{vmatrix} = 20 > 0.$$

Отже, у точці $\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$ функція має умовний мінімум.

При $\lambda = -\frac{5}{2}$, $x = -\frac{4}{5}$, $y = -\frac{3}{5}$ маємо визначник

$$\Delta = - \begin{vmatrix} -5 & 0 & -1,4 \\ 0 & -5 & -1,2 \\ -1,4 & -1,2 & 0 \end{vmatrix} = -20 < 0.$$

Отже, у точці $\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$ функція має умовний максимум.

Таким чином,

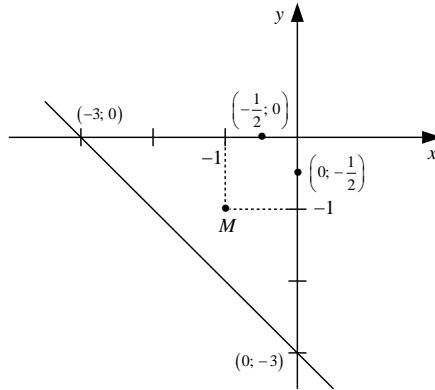
$$z_{\max} = 6 + \frac{16}{5} + \frac{9}{5} = 11, \quad z_{\min} = 6 - \frac{16}{5} - \frac{9}{5} = 1. \quad \square$$

Найбільше і найменше значення функції

Диференційовна функція в обмеженій замкненій області набуває свого найбільшого (найменшого) значення або у стаціонарній точці або у точці межі області.

Приклад 12. Визначити найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в області $x \leq 0$, $y \leq 0$, $x + y \geq -3$.

□ Зазначена область є трикутником.



1) Знайдемо стаціонарні точки: $z'_x = 2x - y + 1$, $z'_y = 2y - x + 1$,
 $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$. Розв'язуючи систему, знаходимо $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$. Точка $M(-1; -1)$
належить області.

У точці M значення функції $z(M) = -1$. Дослідження на екстремум не є обов'язковим.

2) Досліджуємо функцію на межі області.

Якщо $x = 0$, то $z = y^2 + y$ і задача зводиться до знаходження найбільшого і найменшого значень цієї функції одного аргументу на відрізку $-3 \leq y \leq 0$. Похідна функції:

$z' = (y^2 + y)' = 2y + 1$. Знаходимо критичні точки з умови $z' = 0$:
 $2y + 1 = 0$, $y = -\frac{1}{2}$. Ця точка належить відрізку $[-3, 0]$. Знаходимо значення функції:

$$z\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4},$$

$$z(-3) = (-3)^2 - 3 = 9 - 3 = 6,$$

$$z(0) = 0 + 0 = 0.$$

При $y = 0$ маємо $z = x^2 + x$. Аналогічно проводимо дослідження на найбільше і найменше значення цієї функції одного аргументу на відрізку $-3 \leq x \leq 0$.

$$z' = (x^2 + x)' = 2x + 1.$$

$$z' = 0: 2x + 1 = 0, x = -\frac{1}{2} \in [-3, 0].$$

$$z\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4},$$

$$z(-3) = (-3)^2 - 3 = 6,$$

$$z(0) = 0 + 0 = 0.$$

При $x + y = -3$, або $y = -3 - x$ маємо функцію
 $z = x^2 + (-3 - x)^2 - x \cdot (-3 - x) + x + (-3 - x) = 3x^2 + 9x + 6$ на відрізьку
 $-3 \leq x \leq 0$. Дослідження проводимо аналогічно попередньому.

$$z' = (3x^2 + 9x + 6)' = 6x + 9.$$

$$z' = 0: 6x + 9 = 0, x = -\frac{3}{2} \in [-3, 0].$$

$$z\left(-\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 9 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 6 = -\frac{3}{4},$$

$$z(-3) = 3 \cdot (-3)^2 + 9 \cdot (-3) + 6 = 6,$$

$$z(0) = 0 + 0 + 6 = 6.$$

3) Порівнюємо всі знайдені значення функції z . Робимо висновок, що
 $z_{\text{найб.}} = 6$ у точках $(0; -3)$ і $(-3; 0)$;
 $z_{\text{найм.}} = -1$ у стаціонарній точці $M(-1; -1)$. \square

Невизначений інтеграл

Невизначеним інтегралом $\int f(x)dx$ функції $f(x)$ (на проміжку X) називають вираз $F(x)+C$, де $F(x)$ – одна з первісних функцій $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$ ($x \in X$); C – довільна стала.

Приклад 13. $\int \frac{dx}{9-x^2}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{9-x^2} &= \int \frac{dx}{-(x^2-4)} = -\int \frac{dx}{x^2-3^2} = -\frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C = \\ &= -\frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C \end{aligned}$$

(скористалися властивістю 1^о табличним інтегралом 11 при $a=3$). \square

Приклад 14. $\int (4x^3 + 5 \cos x) dx$.

\square Застосуємо послідовно властивості 2^о та 1^о:

$$\int (4x^3 + 5 \cos x) dx = \int 4x^3 dx + \int 5 \cos x dx = 4 \int x^3 dx + 5 \int \cos x dx.$$

Для обчислення інтегралів у правій частині рівності використовуємо табличні інтеграли відповідно 1 ($n=3$) та 4 і остаточно дістаємо

$$\int (4x^3 + 5 \cos x) dx = 4 \frac{x^4}{4} + 5 \sin x + C = x^4 + 5 \sin x + C. \quad \square$$

Приклад 15. $\int \left(4x - \frac{5}{x^2} + \frac{3^x}{2} \right) dx$.

\square Застосуємо послідовно властивості 2^о, 1^о і табличні інтеграли 1, 3:

$$\begin{aligned} \int \left(4x - \frac{5}{x^2} + \frac{3^x}{2} \right) dx &= \int 4x dx - \int 5x^{-2} dx + \int \frac{1}{2} 3^x dx = \\ &= 4 \int x dx - 5 \int x^{-2} dx + \frac{1}{2} \int 3^x dx = 4 \frac{x^2}{2} - 5 \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{1}{2} 3^x \ln 3 + C = \\ &= 2x^2 + \frac{5}{x} + \frac{3^x \ln 3}{2} + C. \quad \square \end{aligned}$$

Заміна змінної

Обчислення невизначених інтегралів методом заміни змінної ґрунтується на формулі

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + C,$$

де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$; $\varphi'(x)$ – похідна функції $\varphi(x)$.

При застосуванні формули на практиці зручно перейти до нової змінної t , поклавши $t = \varphi(x)$. Розглядаючи t як функцію змінної x , запишемо диференціал $dt = \varphi'(x) dx$. В результаті приходимо до інтеграла відносно змінної t : $\int f(t) dt = F(t) + C$. Поклавши у правій частині цієї рівності $t = \varphi(x)$, дістаємо остаточно $F(\varphi(x)) + C$.

Якщо маємо інтеграл $\int p(x) dx$, то його обчислення методом заміни змінної зручно оформляти в загальному випадку наступним чином:

$$\begin{aligned} \int p(x) dx &= \int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \left| \begin{array}{l} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x) dx \end{array} \right| = \\ &= \int f(t) dt = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C. \end{aligned}$$

Приклад 16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

┌ Оскільки $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, то дістанемо

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\ln x} + C \quad \rfloor$$

Приклад 17. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$.

┌ Оскільки $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, то дістанемо

$$\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{array} \right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{\operatorname{tg} x} + C$$

(скористалися табличним інтегралом **3** при $a = e$). ┘

Приклад 18. $\int \frac{x \, dx}{x^2 - 1}$.

┌ Оскільки $(x^2 - 1)' = 2x$, то виконавши тотожне перетворення підінтегральної функції, дістанемо

$$\begin{aligned} \int \frac{x \, dx}{x^2 - 1} &= \int \frac{2x \, dx}{2(x^2 - 1)} = \left| \begin{array}{l} t = x^2 - 1 \\ dt = 2x \, dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \\ &= \frac{1}{2} \ln |t| + C = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + C. \quad \lrcorner \end{aligned}$$

Інтегрування частинами

Обчислення невизначених інтегралів методом інтегрування частинами полягає у використанні формули

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du,$$

де u та v – функції змінної x ; $du = u'(x) \, dx$, $dv = v'(x) \, dx$.

Якщо потрібно обчислити інтеграл $\int f(x) \, dx$, то підінтегральний вираз $f(x) \, dx$ слід представити у вигляді $u \, dv$ так, щоб інтеграл у правій частині формули був простішим за заданий $\int f(x) \, dx = \int u \, dv$. Зауважимо, що функція v , яка фігурує у правій частині, знаходиться за очевидною формулою $v = \int v'(x) \, dx = \int dv$, яка означає, що функція $v(x)$ є первісною своєї похідної $v'(x)$.

Приклад 19. $\int x \cos 2x \, dx$.

┌ Покладемо $u = x$, $dv = \cos 2x \, dx$. Тоді $du = (x)' \, dx = 1 \cdot dx = dx$, $v = \int dv = \int \cos 2x \, dx = \frac{\sin 2x}{2}$ (беремо заради простоти $C = 0$). Застосовуючи формулу інтегрування частинами, дістанемо

$$\begin{aligned} \int x \cos 2x \, dx &= x \cdot \frac{\sin 2x}{2} - \int \frac{\sin 2x}{2} \, dx = \\ &= \frac{x \sin x}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{-\cos 2x}{2} \right) + C = \frac{x \sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C. \quad \lrcorner \end{aligned}$$

Приклад 20. $\int (5x-2)e^x dx$.

┌ Покладемо $u = 5x-2$, $dv = e^x dx$. Тоді $du = (5x-2)' dx = 5dx$,
 $v = \int dv = \int e^x dx = e^x$. Застосовуючи формулу інтегрування частинами,
дістанемо

$$\begin{aligned} \int (5x-2)e^x dx &= (5x-2)e^x - \int e^x 5 dx = (5x-2)e^x - 5 \int e^x dx = \\ &= (5x-2)e^x - 5e^x + C = e^x(5x-7) + C. \quad \lrcorner \end{aligned}$$

Приклад 21. $\int \arcsin x dx$.

┌ Покладемо $u = \arcsin x$, $dv = dx$. Тоді $du = (\arcsin x)' dx = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$,
 $v = \int dx = x$. За формулою інтегрування частинами

$$\int \arcsin x dx = \arcsin x \cdot x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Обчислимо інтеграл у правій частині методом заміни змінної:

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} &= -\frac{1}{2} \int \frac{-2x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} t = 1-x^2 \\ dt = -2x dx \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

Тоді,

$$\int \arcsin x dx = \arcsin x \cdot x - \left(-\sqrt{1-x^2}\right) + C = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Приклад 23. $\int \frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$.

┌ Спочатку виділимо повний квадрат відносно x :

$$\begin{aligned} 5+2x-x^2 &= -(x^2-2x+1-6) = -\left[(x^2-2 \cdot x \cdot 1+1^2)-6\right] = \\ &= -\left[(x-1)^2-6\right] = 6-(x-1)^2 \end{aligned}$$

(скористалися формулою $a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$).

Обчислюємо інтеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{6-(x-1)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{6})^2 - (x-1)^2}} = \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{6}} + C \quad \rfloor$$

Інтегрування раціональних функцій

Якщо підінтегральна функція — неправильний раціональний дріб, то за допомогою ділення його розкладають на суму многочлена та правильного раціонального дробу.

Знаменник правильного раціонального дробу розкладають на множники. За виглядом знаменника правильний раціональний дріб подають у вигляді суми найпростіших дробиб, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.

Інтегрують цілу частину та найпростіші дроби.

Приклад 24. $\int \frac{x^4 + 2x}{x^3 + 8} dx$.

┌ Підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб. Виділимо цілу частину:

$$- \frac{x^4 + 2x}{x^4 + 8x} \Bigg| \frac{x^3 + 8}{x} ; \quad \frac{x^4 + 2x}{x^3 + 8} = x - \frac{6x}{x^3 + 8}.$$

$$\text{Звідси, } \int \frac{x^4 + 2x}{x^3 + 8} dx = \int \left(x - \frac{6x}{x^3 + 8} \right) dx = \int x dx + \int \frac{6x}{x^3 + 8} dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{6x}{x^3 + 8} dx$$

Обчислимо інтеграл $\int \frac{6x}{x^3 + 8} dx$. Розкладемо підінтегральну функцію на доданки. Тоді матимемо

$$\begin{aligned} \frac{6x}{x^3 + 8} &= \frac{6x}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2 - 2x + 4} = \\ &= \frac{A(x^2 - 2x + 4) + (Bx+C)(x+2)}{x^3 + 8} = \frac{x^2(A+B) + x(-2A+2B+C) + 4A+2C}{x^3 + 8} \end{aligned}$$

Тоді, $6x = x^2(A+B) + x(-2A+2B+C) + 4A+2C$. Маємо систему

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \right| \begin{cases} 0 = A+B \\ 6 = -2A+2B+C \\ 0 = 4A+2C \end{cases} \text{Звідси, } \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 2 \end{cases}.$$

Тоді,

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{1}{x+2} - \frac{x+2}{x^2-2x+4} \right) dx = \ln|x+2| - \int \frac{(x+2)dx}{(x-1)^2+3} = \ln|x+2| - \int \frac{\frac{1}{2}(2(x-1)+6)dx}{(x-1)^2+(\sqrt{3})^2} = \\ & = \ln|x+2| - \left(\frac{1}{2} \int \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+(\sqrt{3})^2} dx + 3 \int \frac{dx}{(x-1)^2+(\sqrt{3})^2} \right) = \\ & = \ln|x+2| - \ln \sqrt{x^2-2x+4} - \frac{3}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C = \\ & = \ln|x+2| - \ln \sqrt{x^2-2x+4} - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C \\ & \text{Отже, } \int \frac{x^4+2x}{x^3+8} dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \ln \sqrt{x^2-2x+4} - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C \quad \square \end{aligned}$$

Інтегрування функцій, що містять ірраціональності

Інтегрування функцій, що містять ірраціональності, зокрема виду $\sqrt[m]{kx+b}$ ($k \neq 0$). У цьому випадку слід покласти $\sqrt[m]{kx+b} = t$, звідки $x = \frac{1}{k}(t^m - b)$, $dx = \frac{m}{k} t^{m-1} dt$.

Приклад 22. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x-3}$.

$$\begin{aligned} \square \int \frac{\sqrt{x} dx}{x-3} &= \left. \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array} \right| = \int \frac{t \cdot 2t dt}{t^2-3} = 2 \int \frac{t^2 dt}{t^2-3} = 2 \int \frac{(t^2-3)+3}{t^2-3} dt = \\ &= 2 \int \left(1 + \frac{3}{t^2-3} \right) dt = 2 \left(\int dt + 3 \int \frac{dt}{t^2-(\sqrt{3})^2} \right) = 2 \left(t + 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}} \right| \right) + C = \\ &= 2t + \sqrt{3} \ln \left| \frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}} \right| + C = 2\sqrt{x} + \sqrt{3} \ln \left| \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} \right| + C \quad \square \end{aligned}$$

Універсальна тригонометрична підстановка

Оскільки в знаменник дробу функції $\sin x$ і $\cos x$ входять лінійно, то для алгебраїчної раціоналізації підінтегральної функції зручно використати універсальну тригонометричну підстановку:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \quad \text{Так як } x = 2\operatorname{arctg} t, \text{ то } dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Приклад 25. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} &= \left. \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \right| dx = \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = \\ &= 2 \int \frac{dt}{4t - (1-t^2) + 5(1+t^2)} = 2 \int \frac{dt}{6t^2 + 4t + 4} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}} = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t + \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3t+1}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C. \quad \square \end{aligned}$$

Визначений інтеграл

Формула Ньютона-Лейбніца.

Визначений інтеграл функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ – це число, яке позначають $\int_a^b f(x) dx$. Тут $f(x)$ – підінтегральна функція; $[a, b]$ – відрізок інтегрування; a та b – відповідно нижня та верхня межі інтегрування.

Визначений інтеграл обчислюється за формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$. Для знаходження первісної доцільно використати відповідний невизначений інтеграл – $\int f(x) dx = F(x) + C$.

Приклад 26. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

З таблиці невизначених інтегралів $\int \sin x dx = -\cos x + C$. Тому, застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, дістанемо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = -\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 0 - (-1) = 1. \quad \square$$

Приклад 27. $\int_0^1 (5e^x - 10x^4 + \frac{1}{1+x^2}) dx$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 (5e^x - 10x^4 + \frac{1}{1+x^2}) dx &= \left(5e^x - 10 \frac{x^5}{5} + \arctg x \right) \Big|_0^1 = \\ &= (5e^1 - 2x^5 + \arctg x) \Big|_0^1 = (5e^1 - 2 \cdot 1^5 + \arctg 1) - (5e^0 - 2 \cdot 0^5 + \arctg 0) = \\ &= 5e - 2 + \frac{\pi}{4} - (5 - 0 + 0) = 5e + \frac{\pi}{4} - 7. \quad \square \end{aligned}$$

Заміна змінної у визначеному інтегралі

Якщо у визначеному інтегралі $\int_a^b f(x) dx$ вводиться нова змінна

$t = t(x)$
 $\int dt = t(x) dx$, то слід змінити межі інтегрування. Нижня межа інтегрування

t_1 визначається як значення введеної змінної в точці $x = a$, а верхня межа t_2

– в точці $x = b$, тобто $\int_{t_1}^{t_2} = \int_a^b$.

Приклад 28. $\int_0^2 x e^{x^2} dx$.

Нехай $t = x^2$. Тоді $dt = (x^2)' dx = 2x dx$ або $x dx = \frac{1}{2} dt$,

$$\int_{t_1}^{t_2} = \int_0^2 = 0^2 = 0$$

$$\int_{t_2} = \int_2 = 2^2 = 4.$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 x e^{x^2} dx &= \int_0^2 x e^{x^2} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^4 e^t dt = \frac{1}{2} e^t \Big|_0^4 = \\ &= \frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (e^4 - 1). \quad \square \end{aligned}$$

Приклад 29. $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$.

Покладемо $\sqrt{x} = t$. Тоді $x = t^2$, $dx = 2t dt$. Межі інтегрування нової

змінної: $\int_{t_1}^{t_2} = \int_2^3$ Маємо

$$\begin{aligned} \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx &= \int_2^3 \frac{1}{t+1} 2t dt = 2 \int_2^3 \frac{t}{t+1} dx = 2 \int_2^3 \frac{t+1-1}{t+1} dx = \\ &= 2 \int_2^3 \frac{t+1}{t+1} - \frac{1}{t+1} dt = 2 \int_2^3 1 - \frac{1}{t+1} dt = 2(t - \ln|t+1|) \Big|_2^3 = \\ &= 2(3 - \ln|3+1|) - 2(2 - \ln|2+1|) = 6 - 2\ln 4 - 4 + 2\ln 3 = \\ &= 2 + 2(\ln 3 - \ln 4) = 2 + 2\ln \frac{3}{4}. \quad \square \end{aligned}$$

Інтегрування частинами

Обчислення визначених інтегралів методом інтегрування частинами полягає у використанні формули

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Приклад 30. $\int_0^1 x e^x dx.$

Покладемо $u = x$, $dv = e^x dx$. Тоді $du = (x)' dx = dx$,
 $v = \int dv = \int e^x dx = e^x$. Застосовуючи формулу інтегрування частинами для визначеного інтеграла, дістанемо

$$\int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = (1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0) - e^x \Big|_0^1 = e - (e^1 - e^0) = e - e + 1 = 1. \quad \square$$

Приклад 31. $\int_1^e x^2 \ln x dx.$

Покладемо $u = \ln x$, $dv = x^2 dx$. Тоді $du = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx$,
 $v = \int dv = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$. Застосовуючи формулу інтегрування частинами, дістанемо

$$\begin{aligned} \int_1^e x^2 \ln x dx &= \frac{x^3}{3} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^3}{3} \ln e - \frac{1^3}{3} \ln 1 - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx = \\ &= \frac{e^3}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{1 \cdot e^3}{3 \cdot 3} - \frac{1^3 \cdot 0}{3 \cdot 3} = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3 + 1}{9}. \quad \square \end{aligned}$$

Невласні інтеграли

Невласні інтеграли I роду

За означенням *невласні інтеграли I роду* обчислюються за формулами:

$$1) \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx ;$$

$$2) \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx ;$$

$$3) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx .$$

Якщо вказані границі існують і скінченні, то відповідні невластні інтеграли дорівнюють значенню цих границь, а у випадку **3)** сумі значень двох границь. При цьому невластні інтеграли називають збіжними.

Якщо ж вказані границі дорівнюють нескінченності або не існують (для випадку **3)** хоча б одна з двох границь), то відповідні невластні інтеграли називають розбіжними.

Приклад 32. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx .$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(2\sqrt{x} \right) \Big|_1^b =$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(2\sqrt{b} - 2\sqrt{1} \right) .$$

Так як $\lim_{b \rightarrow +\infty} \sqrt{b} = +\infty$, то $\lim_{b \rightarrow +\infty} \left(2\sqrt{b} - 2 \right) = +\infty$.

Отже, заданий інтеграл розбіжний. \square

Невласні інтеграли II роду

Невластний інтеграл II роду є узагальненням визначеного інтеграла $\int_a^b f(x) dx$ на випадок, коли підінтегральна функція $f(x)$ необмежена на відрізку $[a, b]$.

Розрізняють три випадки:

1) $f(x)$ необмежена у точці $x = a$ ($\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$). Тоді

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

Тут і далі $\varepsilon > 0$, тобто ε прямує до нуля справа.

2) $f(x)$ необмежена у точці $x = b$ ($\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \infty$). Тоді

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \quad (\varepsilon > 0)$$

3) $f(x)$ необмежена у точці $c \in (a, b)$ ($\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$). Тоді

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \quad (\varepsilon > 0)$$

Якщо вказані границі існують і скінченні, то відповідні невласні інтеграли дорівнюють значенню цих границь, а у випадку 3) сумі значень двох границь. При цьому невласні інтеграли називають збіжними. Якщо ж вказані границі дорівнюють нескінченності або не існують (для випадку 3) хоча б одна з двох), то відповідні невласні інтеграли називають розбіжними.

Приклад 33. $\int_3^4 \frac{1}{\sqrt{x-3}} dx$.

Підінтегральна функція необмежена у точці $x = 3$. Знаходимо

$$\begin{aligned} \int_3^4 \frac{1}{\sqrt{x-3}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{3+\varepsilon}^4 \frac{1}{\sqrt{x-3}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(2\sqrt{x-3} \right) \Big|_{3+\varepsilon}^4 = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\sqrt{4-3} - 2\sqrt{3+\varepsilon-3}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2 \cdot 1 - 2 \cdot \sqrt{\varepsilon}) = 2 - 0 = 2. \quad \square \end{aligned}$$

Приклад 34. $\int_1^2 \frac{1}{x \ln x} dx$.

Так як $\ln 1 = 0$, то підінтегральна функція необмежена у точці $x = 1$.

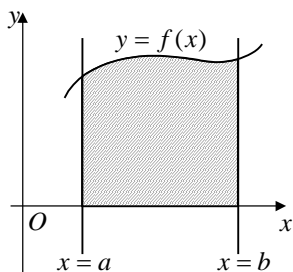
$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x \ln x} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{1}{x \ln x} dx = \left. \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = (\ln x)^{-1} dx = \frac{1}{x} dx \\ \text{межі } t_1 = \ln 2 \\ t_2 = \ln(1+\varepsilon) \end{array} \right| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\ln(1+\varepsilon)}^{\ln 2} \frac{1}{t} dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln |t| \Big|_{\ln(1+\varepsilon)}^{\ln 2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln \ln 2 - \ln \ln(1+\varepsilon)). \end{aligned}$$

Оскільки $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \ln(1 + \varepsilon) = -\infty$, то заданий інтеграл розбіжний. \square

Застосування визначеного інтеграла

Обчислення площ плоских фігур

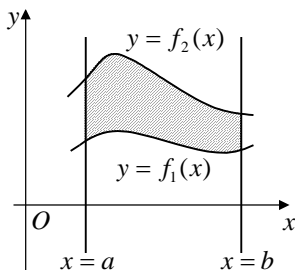
1. Якщо на відрізку $[a, b]$ функція $y = f(x)$ неперервна і $f(x) \geq 0$, то площа *криволінійної трапеції* (рис. 1), обмеженої графіком функції $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ та віссю Ox , обчислюється за формулою



$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Рис. 1

2. Площа фігури (рис. 2), обмеженої знизу графіком функції $y = f_1(x)$, зверху – $y = f_2(x)$ та прямими $x = a$, $x = b$, обчислюється за формулою



$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

Рис. 2

Відрізки, які обмежують зліва та справа фігуру на рис. 2, можуть вироджуватись у точки.

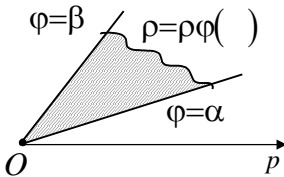
3. Якщо криволінійна трапеція обмежена кривою, заданою параметрично

$\dot{x} = x(t)$,
 $\dot{y} = y(t)$, прямими $x = a$, $x = b$ та віссю Ox , то її площа обчислюється за формулою

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x(t) dt$$

де $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$ і $y(t) \geq 0$.

4. Площа криволінійного сектора (рис. 3), обмеженого у полярній системі координат неперервною кривою $\rho = \rho(\varphi)$ та променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, обчислюється за формулою

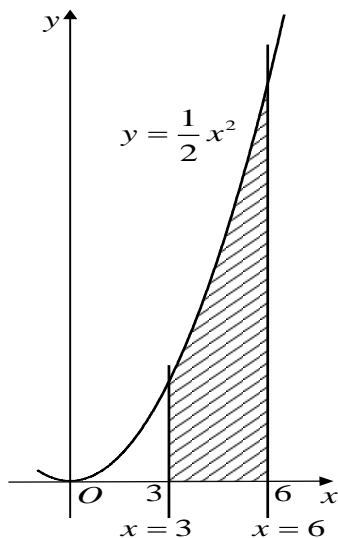


$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

Рис. 3

Приклад 35. Обчислити площу криволінійної трапеції, обмеженої параболою $y = \frac{1}{2}x^2$, прямими $x = 3$, $x = 6$ та віссю Ox .

Криволінійна трапеція позначена на рисунку штрихуванням.



Знайдемо її площу за формулою $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$:

$$S = \int_3^6 \left(\frac{1}{2}x^2 - 0 \right) dx = \frac{1}{2}x^3 \Big|_3^6 = \frac{1}{6}(6^3 - 3^3) = \frac{1}{6}(216 - 27) = \frac{1}{6}(6^3 - 3^3) = \frac{1}{6}(216 - 27) = \frac{63}{2} = 31,5 \text{ (кв. од.)}$$

Приклад 36. Знайти площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = 6 - x^2$, $y = x$.

$y = 6 - x^2$ – парабола, вітки якої направлені вниз. Заповнимо таблицю для зображення параболи:

x	0	$\sqrt{6}$	$-\sqrt{6}$
$y = 6 - x^2$	6	0	0

Для знаходження абсцис ($x_1 = a$, $x_2 = b$) точок перетину параболи з прямою розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = 6 - x^2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow 6 - x^2 = x,$$

$$\text{або } x^2 + x - 6 = 0.$$

$$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25,$$

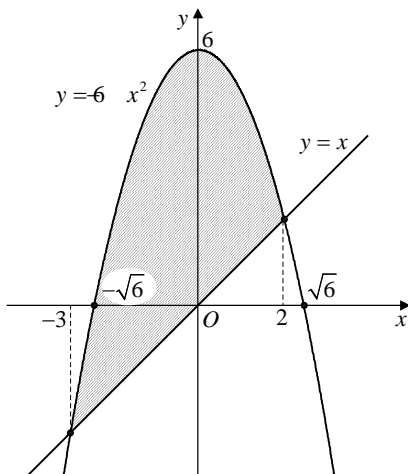
$$x_1 = a = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2} = -3,$$

$$x_2 = b = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2} = 2.$$

Шукана фігура обмежена знизу прямою, а зверху – параболою.

Тому за формулою (8) отримаємо

$$S = \int_{-3}^2 (6 - x^2 - x) dx = \left[6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-3}^2 = \left(6 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} \right) - \left(6 \cdot (-3) - \frac{(-3)^3}{3} - \frac{(-3)^2}{2} \right) = 12 - \frac{8}{3} - 2 + 18 - 9 + \frac{9}{2} = \frac{125}{6} = 20 \frac{5}{6} \text{ (кв. од.). } \quad \square$$



Диференціальні рівняння

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, яке містить незалежну змінну x , невідому функцію $y = y(x)$ та її похідну y' :

$$F(x, y, y') = 0.$$

Диференціальне рівняння виду $y' = f(x) \cdot g(y)$ називають диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними. Права частина рівняння є добутком двох функцій, залежних лише від однієї змінної: перша функція залежить лише від x , а друга – лише від y .

Схема розв'язання диференціального рівняння. Так як $y' = \frac{dy}{dx}$, то маємо

$y' = f(x) \cdot g(y)$, або $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$. Помножимо обидві частини рівності

на вираз $\frac{dx}{g(y)}$ (припускаємо, що $g(y) \neq 0$). Отримаємо рівняння з

відокремленими змінними $\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$.

У лівій частині рівності маємо диференціал деякої функції по змінній y , а у правій – по змінній x .

Інтегруючи рівняння $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C$, отримаємо загальний інтеграл (розв'язок) диференціального рівняння.

Приклад 37. $y' = \frac{y}{x^2}$.

┌ Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:
 $y\phi = \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x^2} \cdot y$. Оскільки $y' = \frac{dy}{dx}$, то запишемо його у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2}.$$

Для відокремлення змінних помножимо дану рівність на dx і поділимо на y . Отримаємо

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2}.$$

Інтегруємо дане рівняння:

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x^2}$, $\ln|y| = -\frac{1}{x} + C$, звідки знаходимо загальний розв'язок

заданого диференціального рівняння – $y = e^{-\frac{1}{x} + C}$. ┘

Приклад 38. $y' = y3^x$.

┌ Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{dx} = y3^x, \quad \frac{dy}{y} = 3^x dx, \quad \int \frac{dy}{y} = \int 3^x dx, \quad \text{звідки знаходимо загальний}$$

$$\text{розв'язок } \ln|y| = \frac{3^x}{\ln 3} + C. \quad \lrcorner$$

Приклад 39. $y\sqrt{1+x^2}y' + x\sqrt{1+y^2} = 0.$

┌ Розв'яжемо задане рівняння відносно $y\phi$:

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+y^2}}{y}.$$

Отже, це диференціальне рівняння з відокремленими змінними.

Підставимо $y\phi = \frac{dy}{dx}$ і відокремимо змінні, помноживши рівняння на

$$\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} dx:$$

$$\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Звідси маємо

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + C, \text{ або}$$

$$\sqrt{1+y^2} = C - \sqrt{1+x^2}. \quad \lrcorner$$

Однорідні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ називають однорідним, якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового виміру, тобто для будь-якого $t > 0$ виконується рівність: $f(tx, ty) = f(x, y)$.

Рівняння можна записати у вигляді $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$.

Для розв'язання рівняння введемо допоміжну невідому функцію $u = u(x)$, поклавши $\frac{y}{x} = u$ або $y = ux$, і перетворимо однорідне рівняння у

рівняння з відокремленими змінними. Звідси, знаходимо $y' = u'x + u$.
Тому задане рівняння запишеться у вигляді

$$u + xu' = g(u), \text{ або } x \frac{du}{dx} = g(u) - u.$$

Відокремимо змінні: $\frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}$.

Проінтегрувавши рівняння, одержимо $\int \frac{du}{g(u) - u} = \ln|x| + C$.

Обчисливши інтеграл у лівій частині і підставивши замість u вираз $\frac{y}{x}$,
отримаємо загальний інтеграл диференціального рівняння.

Приклад 40. $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$.

┌ Права частина рівняння – функція $f(x, y) = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$ є однорідною
функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx, ty) = \frac{ty}{tx} + \sin \frac{ty}{tx} = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x} = f(x, y).$$

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$.

$$u'x + u = \frac{ux}{x} + \sin \frac{ux}{x}, \quad u'x + u = u + \sin u, \quad u'x + u - u = \sin u,$$

$$u'x = \sin u, \quad u' = \sin u \cdot \frac{1}{x}, \quad \frac{du}{dx} = \sin u \cdot \frac{1}{x}, \quad \frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| = \ln C|x|, \quad \operatorname{tg} \frac{u}{2} = Cx,$$

$$\operatorname{tg} \frac{y}{2x} = Cx. \quad \rfloor$$

Приклад 41. $y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$.

┌ Права частина даного рівняння – функція $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$ є
однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx, ty) = \frac{(tx)^2 + (ty)^2}{2(tx)^2} = \frac{t^2(x^2 + y^2)}{2t^2x^2} = \frac{x^2 + y^2}{2x^2} = f(x, y).$$

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$:

$$u'x + u = \frac{x^2 + x^2u^2}{2x^2}, \quad u'x + u = \frac{x^2(1+u^2)}{2x^2}, \quad u'x + u = \frac{1+u^2}{2}, \quad u'x = \frac{1+u^2}{2} - u,$$

$$u'x = \frac{u^2 - 2u + 1}{2}, \quad u'x = \frac{(u-1)^2}{2}, \quad u' = \frac{(u-1)^2}{2} \cdot \frac{1}{x}.$$

Диференціальне рівняння, яке ми отримали – рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$\frac{du}{dx} = \frac{(u-1)^2}{2} \cdot \frac{1}{x}, \quad \frac{2du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{2du}{(u-1)^2} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{-2}{u-1} = \ln|x| + \ln C, \quad \frac{-2}{u-1} = \ln C|x|.$$

Підставимо в отримане рівняння $u = \frac{y}{x}$:

$$\frac{-2}{\frac{y}{x} - 1} = \ln C|x|, \quad \frac{-2x}{y-x} = \ln C|x|, \quad \text{звідки знаходимо загальний}$$

$$\text{розв'язок заданого диференціального рівняння} - y = x - \frac{2x}{\ln C|x|}.$$

Лінійні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad \text{або} \quad y' = -P(x)y + Q(x),$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – неперервні функції на деякому інтервалі (a, b) , називається лінійним диференціальним рівнянням першого порядку.

У випадку, коли $P(x) = \pm Q(x)$ або $Q(x) = 0$, рівняння є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Є кілька методів розв'язання лінійних диференціальних рівнянь. Розглянемо один із них – метод Бернуллі. Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді добутку

$$y = u \cdot v,$$

де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – невідомі функції. Одну з цих функцій можна вибрати довільним чином, а інша визначається згідно з заданим рівнянням.

Знаходимо похідну функції y : $y' = u'v + uv'$. Підставляючи y та y' в задане рівняння, отримаємо

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x),$$

$$u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x).$$

Виберемо функцію v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто

$$v' + P(x)v = 0.$$

Звідси, маємо:
$$\begin{cases} v' + P(x)v = 0 \\ u'v = Q(x) \end{cases}.$$

Знаходимо v з першого рівняння системи, яке є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dv}{dx} = -P(x)v, \quad \frac{dv}{v} = -P(x)dx, \quad \text{звідки } \ln|v| = -\int P(x)dx, \quad \text{або}$$

$v = e^{-\int P(x)dx}$. Під невизначеним інтегралом тут розуміємо одну з первісних функції $P(x)$.

Знаючи v , знаходимо u з другого рівняння системи:

$$v \frac{du}{dx} = Q(x), \quad \frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v} = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx},$$

$$du = Q(x)e^{\int P(x)dx} dx, \quad u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C.$$

Підставляємо знайдені функції u та v у формулу і отримуємо загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння:

$$y = u \cdot v = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right).$$

Приклад 41. $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$.

┌ Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$. Тоді $y' = u'v + uv'$. Підставляємо y та y' у задане рівняння:

$$u'v + uv' - \frac{2uv}{x} = 2x^3,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = 2x^3.$$

Виберемо функцію v так, щоб

$$v' - \frac{2v}{x} = 0.$$

Знаходимо v :

$$v' = \frac{2v}{x}, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = 2 \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dv}{v} = 2 \int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = 2 \ln|x|,$$

$$\ln|v| = \ln x^2, \text{ звідки } v = x^2.$$

Підставляючи знайдену функцію v в отримане рівняння, отримуємо рівняння для знаходження u : $u' \cdot x^2 = 2x^3$, $u' = \frac{2x^3}{x^2}$,

$$\frac{du}{dx} = 2x, \quad du = 2x dx, \quad \int du = \int 2x dx, \quad u = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C, \quad u = x^2 + C.$$

Знаходимо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння – $y = uv = (x^2 + C)x^2$. ┘

Приклад 42. $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x$.

┌ Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$. Тоді $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' + uv \operatorname{tg} x = \cos^2 x,$$

$$u'v + u(v' + v \operatorname{tg} x) = \cos^2 x.$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + v \operatorname{tg} x = 0$. Знаходимо v :

$$v' + v \operatorname{tg} x = 0, \quad \frac{dv}{dx} = -v \operatorname{tg} x, \quad \frac{dv}{v} = -\operatorname{tg} x dx, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \operatorname{tg} x dx,$$

$$\ln|v| = \ln|\cos x|, \text{ звідки } v = \cos x.$$

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння, отримуємо рівняння для знаходження u : $u' \cdot \cos x = \cos^2 x$, $u' = \frac{\cos^2 x}{\cos x}$, $\frac{du}{dx} = \cos x$, $du = \cos x dx$,

$$\int du = \int \cos x dx, \text{ звідки } u = \sin x + C.$$

Знаходимо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння – $y = uv = (\sin x + C)\cos x$. ┘

Диференціальні рівняння другого порядку.

Диференціальним рівнянням другого порядку називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну x , невідому функцію y та першу і другу похідні цієї функції: $F(x, y, y', y'') = 0$,

Загальним розв'язком диференціального рівняння є функція $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, яка перетворює диференціальне рівняння в тотожність при довільних фіксованих значеннях сталих C_1 та C_2 .

Найпростіше диференціальне рівняння другого порядку має вигляд $y'' = f(x)$, де функція $f(x)$ – задана. Розв'яжемо задане рівняння. За

означенням другої похідної $y'' = (y')' = \frac{d(y')}{dx}$. Тоді маємо $\frac{d(y')}{dx} = f(x)$.

Звідси, $d(y') = f(x)dx$ і $y' = \int f(x)dx + C_1$, де C_1 – довільна стала.

Аналогічно знаходимо $\frac{dy}{dx} = \int f(x)dx + C_1$ або $dy = (\int f(x)dx + C_1)dx$,

звідки $y = \int (\int f(x)dx)dx + C_1x + C_2$.

Приклад 42. $y'' = x^2 - 2x$.

┌ Це диференціальне рівняння другого порядку виду $y'' = f(x)$.

Послідовно дістанемо $\frac{d(y')}{dx} = x^2 - 2x$, $d(y') = (x^2 - 2x)dx$,

$$y' = \int (x^2 - 2x)dx = \frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + C_1 = \frac{x^3}{3} - x^2 + C_1.$$

Отже, $y' = \frac{x^3}{3} - x^2 + C_1$, $dy = (\frac{x^3}{3} - x^2 + C_1)dx$,

$$y = \int (\frac{x^3}{3} - x^2 + C_1)dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + C_1x + C_2 = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + C_1x + C_2.$$

Отже, $y = x^4 - x^3 + 4x^2 + C_1x + C_2$. ┘

Приклад 43. $y'' = \sin 5x$, якщо $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

Спочатку знайдемо загальний розв'язок заданого рівняння. Це рівняння виду $y'' = f(x)$. Послідовно дістанемо $\frac{d(y')}{dx} = \sin 5x$,

$$d(y') = \sin 5x dx, \quad y' = \int \sin 5x dx = \frac{1}{5} \int \sin 5x d(5x) = -\frac{1}{5} \cos 5x + C_1.$$

Остаточно маємо $y' = -\frac{1}{5} \cos 5x + C_1$, $dy = \left(-\frac{1}{5} \cos 5x + C_1\right) dx$,

$$y = \int \left(-\frac{1}{5} \cos 5x + C_1\right) dx = -\frac{1}{25} \sin 5x + C_1 x + C_2.$$

Знайдемо розв'язок задачі Коші з умовами $y(0) = 2$ і $y'(0) = -1$:

$$y(0) = -\frac{1}{25} \sin 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 2$$

$$y'(0) = -\frac{1}{5} \cos 0 + C_1 = -1,$$

$$C_2 = 2$$

$$C_2 = 2$$

$$-\frac{1}{5} + C_1 = -1, \quad C_1 = -1 + \frac{1}{5} = -\frac{4}{5}.$$

$$\text{Отже, } y = -\frac{1}{25} \sin 5x - \frac{4}{5}x + 2. \quad \square$$

Диференціальні рівняння другого порядку, які не містять y .

Нехай задано диференціальне рівняння другого порядку виду $F(x, y, y') = 0$, або $y'' = f(x, y')$, яке не містить явно шуканої функції $y = y(x)$. Зробимо заміну $y' = z(x)$, тоді $y'' = z'$. Дістанемо диференціальне рівняння першого порядку

$$F(x, z, z') = 0, \text{ або } z' = f(x, z),$$

Якщо вдається знайти загальний розв'язок $z = z(x, C_1)$ рівняння, то отримаємо диференціальне рівняння першого порядку $y' = z(x, C_1)$. Звідси маємо загальний розв'язок $y = \int z(x, C_1) dx + C_2$.

Приклад 44. $y \phi \ln x = y \phi$.

┌ Дане рівняння запишемо у вигляді $y \phi = \frac{y \phi}{x \ln x}$ і отримаємо диференціальне рівняння другого порядку виду $y \phi = f(x, y \phi)$. Зробимо заміну $y \phi = z$. Тоді $y \phi = z \phi$. Дістанемо рівняння з відокремленими змінними $z \phi = \frac{z}{x \ln x}$. Розв'язуємо його:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x \ln x}, \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x \ln x}, \quad \int \frac{dz}{z} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x}, \quad \ln|z| = \ln|\ln x| + \ln C_1,$$

$$\ln|z| = \ln|C_1 \ln x|, \quad z = C_1 \ln x.$$

Але $z = y \phi$. Тому маємо

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \ln x, \quad dy = C_1 \ln x dx, \quad \int dy = C_1 \int \ln x dx, \quad \text{звідки}$$

$$y = C_1 x (\ln x - 1) + C_2. \quad \rfloor$$

Диференціальні рівняння другого порядку, які не містять x .

Нехай задано диференціальне рівняння другого порядку виду $F(y, y \phi, y \phi \phi) = 0$, або $y \phi = f(y, y \phi)$, яке не містить явно незалежну змінну x . Зробимо заміну $y \phi = p(y)$, де p вважається функцією від y . Тоді $y \phi \phi = (y \phi) \phi = p \phi = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \times \frac{dy}{dx} = p \phi \times y \phi = p \phi \times p = pp \phi$. Тому дістанемо диференціальне рівняння першого порядку

$$F(y, p, pp \phi) = 0, \quad \text{або} \quad pp \phi = f(y, p).$$

Якщо вдається знайти загальний розв'язок рівняння $p = p(y, C_1)$, то отримаємо диференціальне рівняння з відокремленими змінними

$$y \phi = p(y, C_1), \quad \frac{dy}{dx} = p(y, C_1), \quad \frac{dy}{p(y, C_1)} = dx, \quad \int \frac{dy}{p(y, C_1)} = x + C_2.$$

Приклад 45. $y \phi = -\frac{2}{y^5}$, якщо $y(-1) = 1, y \phi(-1) = 1$.

┌ Маємо рівняння виду $y \phi = f(y, y \phi)$. Зробимо заміну $y \phi = p(y)$, $y \phi \phi = pp \phi$. Дістанемо рівняння з відокремленими змінними: $pp \phi = -\frac{2}{y^5}$.

Розв'яжемо його:

$$p \frac{dp}{dy} = -\frac{2}{y^5}, \quad p dp = -\frac{2}{y^5} dy, \quad \int p dp = -2 \int y^{-5} dy, \quad \frac{p^2}{2} = -2 \frac{y^{-4}}{-4} + C_1,$$

$$p^2 = y^{-4} + 2C_1, \quad p^2 = \frac{1}{y^4} + 2C_1, \quad (y\phi)^2 = \frac{1}{y^4} + 2C_1.$$

Так як потрібно знайти тільки такий частинний розв'язок, який задовольняє задані початкові умови, то можливо одразу знайти C_1 (підставляючи в отриману рівність умови $y(-1) = 1$, $y\phi(-1) = 1$):

$$1 = 1 + 2C_1 \quad \hat{\cup} \quad C_1 = 0.$$

Тому маємо $(y\phi)^2 = \frac{1}{y^4}$, звідки $y\phi = \frac{1}{y^2}$ (врахували початкову умову $y\phi(-1) = 1$).

Розв'яжемо диференціальне рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2}, \quad y^2 dy = dx, \quad \int y^2 dy = \int dx,$$

$$\frac{y^3}{3} = x + C_2 \quad \hat{\cup} \quad y^3 = 3x + 3C_2.$$

Підставляємо початкову умову $y(-1) = 1$ і знаходимо: $1^3 = 3(-1) + 3C_2$, $3C_2 = 4$, $C_2 = \frac{4}{3}$. Тоді $y^3 = 3x + 4$. Остаточо маємо $y = \sqrt[3]{3x+4}$. \square

Приклад 46. $y\phi(1+y) - 5(y\phi)^2 = 0$.

\square Маємо рівняння виду $F(y, y\phi, y\phi) = 0$. Зробимо заміну $y' = p(y)$, $y\phi = pp\phi$. Дістанемо рівняння $pp\phi(1+y) - 5p^2 = 0$. Виносимо спільний множник p за дужки:

$$p(p\phi(1+y) - 5p) = 0.$$

Можливі два випадки.

1) $p = 0$, тоді $y' = 0$, $y = \text{const}$.

2) $p\phi(1+y) - 5p = 0$. Це рівняння з відокремленими змінними.

Розв'яжемо його:

$$(1+y) \frac{dp}{dy} = 5p, \quad \frac{dp}{p} = \frac{5dy}{y+1}, \quad \int \frac{dp}{p} = 5 \int \frac{dy}{y+1}, \quad \ln|p| = 5 \ln|y+1| + \ln C_1,$$

$$\ln|p| = \ln|C_1 (y+1)^5|, \quad p = C_1 (y+1)^5, \quad y\phi = C_1 (y+1)^5.$$

Це є диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язуємо його: $\frac{dy}{dx} = C_1(y+1)^5$, $\frac{dy}{(y+1)^5} = C_1 dx$, $\int (y+1)^{-5} dy = C_1 \int dx$,

$$\frac{(y+1)^{-4}}{-4} = C_1 x + C_2, \quad \frac{1}{4(y+1)^4} = C_1 x + C_2, \quad (y+1)^4 = \frac{1}{C_1 x + C_2}.$$

Зауважимо, що розв'язок $y = \text{const}$ дістаємо із загального розв'язку при $C_1 = 0$. \perp

$$y^5 - 5y^4 + 4y = 0.$$

Маємо рівняння виду (30). Запишемо його характеристичне рівняння: $k^2 - 5k + 4 = 0$. Розв'яжемо його:

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 > 0, \text{ тоді } k_1 = \frac{5-3}{2} = 1 \text{ і } k_2 = \frac{5+3}{2} = 4.$$

Маємо перший випадок (корені дійсні та різні). Тому за формулою (32) загальний розв'язок диференціального рівняння – $y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$. \perp

Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Рівняння виду $y'' + py' + qy = 0$, де p і q – дійсні числа, називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Квадратне рівняння $k^2 + pk + q = 0$ називається відповідним характеристичним рівнянням. Загальний розв'язок рівняння залежить від значень коренів характеристичного рівняння. Можливі три випадки.

1. Якщо корені характеристичного рівняння дійсні та різні, тобто $k_1 \neq k_2$, то загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

2. Якщо корені характеристичного рівняння дійсні та рівні, тобто $k_1 = k_2 = k$, то

$$y = e^{kx} (C_1 + C_2 x).$$

3. Якщо корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені ($D = p^2 - 4q < 0$), тобто $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, де $i = \sqrt{-1}$ (уявна

одиниця), $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$, то

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Приклад 47. $y'' + 8y' + 16y = 0$.

┌ Це рівняння виду $y'' + py' + qy = 0$. Його характеристичне рівняння має вигляд $k^2 + 8k + 16 = 0$, або $(k + 4)^2 = 0$. Тому $k_1 = k_2 = -4$, тобто маємо загальний розв'язок диференціального рівняння: $y = e^{-4x} (C_1 + C_2 x)$. ┘

Приклад 48. $y'' + 4y' - 5y = 0$.

┌ Маємо рівняння виду $y'' + py' + qy = 0$. Записуємо відповідне характеристичне рівняння: $k^2 + 4k - 5 = 0$. Розв'язуємо його:
 $D = 4^2 - 4 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36$, $k_1 = \frac{-4 - \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 - 6}{2} = -5$,
 $k_2 = \frac{-4 + \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 + 6}{2} = 1$. тобто маємо загальний розв'язок диференціального рівняння: $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^x$. ┘

Приклад 49. $y'' + 2y' + 10y = 0$.

┌ Маємо рівняння виду $y'' + py' + qy = 0$. Записуємо відповідне характеристичне рівняння: $k^2 + 2k + 10 = 0$. Розв'язуємо його:
 $D = 2^2 - 4 \cdot 10 = 4 - 40 = -36$, $k_1 = \frac{-2 - \sqrt{-36}}{2} = \frac{-2 - 6i}{2} = -1 - 3i$,
 $k_2 = \frac{-2 + \sqrt{-36}}{2} = \frac{-2 + 6i}{2} = -1 + 3i$. Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені. При цьому $\alpha = -1$, $\beta = 3$. Маємо загальний розв'язок диференціального рівняння: $y = e^{-x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$. ┘

Однорідні системи диференціальних рівнянь

Система диференціальних рівнянь
$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$
 де коефіцієнти a_{ij} –

сталі, t – незалежна змінна, $x(t)$, $y(t)$ – невідомі функції, називається однорідною системою двох лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Задача Коші для системи полягає у знаходженні функцій $x(t)$ і $y(t)$, що задовольняють дану систему і задані початкові умови

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0.$$

Розв'язання системи виконують таким чином. Вважаючи, що в першому рівнянні системи $a_{12} \neq 0$, виразимо в ньому y через x :

$$y = \frac{1}{a_{12}} \frac{dx}{dt} - \frac{a_{11}}{a_{12}} x.$$

Продиференціюємо цю рівність по t :
$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{a_{12}} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{a_{11}}{a_{12}} \frac{dx}{dt}.$$

Підставляючи отримані вирази в друге рівняння системи, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{12}} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{a_{11}}{a_{12}} \frac{dx}{dt} &= a_{21}x + a_{22} \left(\frac{1}{a_{12}} \frac{dx}{dt} - \frac{a_{11}}{a_{12}} x \right), \\ \frac{1}{a_{12}} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{a_{11}}{a_{12}} \frac{dx}{dt} + \frac{a_{22}}{a_{12}} \frac{dx}{dt} + \frac{a_{11}}{a_{12}} a_{22} - a_{21} x &= 0, \\ \frac{d^2x}{dt^2} - (a_{11} + a_{22}) \frac{dx}{dt} + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x &= 0. \end{aligned}$$

Рівняння є лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами з незалежною змінною t і невідомою функцією $x(t)$. Розв'язуємо його відносно $x(t)$. Після цього знаходимо функцію $y(t)$ і записуємо остаточну відповідь.

Приклад 50.
$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 5y \\ \dot{y} = x + 3y. \end{cases}$$

□ Маємо систему двох лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. З першого рівняння виражаємо y :

$$\frac{dx}{dt} = -x + 5y, \quad 5y = \frac{dx}{dt} + x, \quad y = \frac{1}{5} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{5} x.$$

Диференціюємо останню рівність по t і отримуємо

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{5} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{5} \frac{dx}{dt}.$$

Підставимо знайдені y та $\frac{dy}{dt}$ в друге рівняння системи:

$$\frac{1}{5} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{5} \frac{dx}{dt} = x + 3 \frac{dx}{dt} + \frac{1}{5} \ddot{x}, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = 5x + 3 \frac{dx}{dt} + 3x,$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} - 8x = 0.$$

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами виду. Коренями його характеристичного рівняння $k^2 - 2k - 8 = 0$ є $k_1 = -2$ і $k_2 = 4$. Тоді загальний розв'язок цього рівняння буде мати вигляд: $x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t}$, де C_1 і C_2 – довільні сталі. Так як

$$\frac{dx}{dt} = -2C_1 e^{-2t} + 4C_2 e^{4t}, \text{ то підставляючи знайдені } x(t) \text{ та } \frac{dx}{dt} \text{ у вираз для } y$$

$$(y = \frac{1}{5} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{5} x), \text{ отримаємо}$$

$$y(t) = \frac{1}{5} (-2C_1 e^{-2t} + 4C_2 e^{4t}) + \frac{1}{5} (C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t}), \quad y(t) = -\frac{1}{5} C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t}.$$

Запишемо тепер загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t} \\ y(t) = -\frac{1}{5} C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t}. \quad \square \end{cases}$$

Таблиця похідних основних елементарних функцій

1. $(c)' = 0$ (c – стале число)

2. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ (n – будь-яке дійсне число)

3. $(a^x)' = a^x \ln a$ ($a > 0, a \neq 1$)

Зокрема, при $a = e$: $(e^x)' = e^x$

4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ ($a > 0, a \neq 1$)

Зокрема, при $a = e$: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

5. $(\sin x)' = \cos x$

6. $(\cos x)' = -\sin x$

7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

12. $(\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Основні правила диференціювання функцій

1°. $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, де c – стала.

2°. $(u \pm v)' = u' \pm v'$, де $u = u(x)$; $v = v(x)$.

Це правило узагальнюється на довільне скінченне число доданків:

$$(u \pm v \pm w \pm \dots \pm z)' = u' \pm v' \pm w' \pm \dots \pm z'.$$

3°. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$

4°. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$

5°. Нехай $y = f[u(x)]$ – складна функція, тобто $y = f(u)$, де $u = u(x)$. Тут u – проміжний аргумент, x – незалежна змінна. Тоді

$$y' = f'(u) \cdot u'(x).$$

Таблиця основних невизначених інтегралів

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1).$$

Зокрема, при $n = 0$: $\int dx = x + C$

Зокрема, при $n = 1$: $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$

Зокрема, при $n = -\frac{1}{2}$: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

$$2. \int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1).$$

Зокрема, при $a = e$: $\int e^x dx = e^x + C.$

$$4. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$8. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$9. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$10. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$$

Зокрема, при $a = 1$: $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C.$

$$11. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a > 0).$$

Зокрема, при $a = 1$: $\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$$

Зокрема, при $a = 1$:
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C \quad (a \neq 0).$$

Зокрема, при $a = 1$:
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 1} \right| + C = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) + C.$$

Властивості невизначеного інтеграла

1°.
$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k - \text{стала, } k \neq 0).$$

2°.
$$\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx.$$

Ця властивість узагальнюється на довільне скінченне число доданків:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_m(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx \pm \dots \pm \int f_m(x) dx.$$

3°. Якщо $\int f(x) dx = F(x) + C$, то для будь-яких сталих k та b ($k \neq 0$)

$$\int f(kx + b) dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C.$$

Частинні випадки властивості 3° (відповідно при $b = 0$ та $k = 1$):

3.1°.
$$\int f(kx) dx = \frac{1}{k} F(kx) + C;$$

3.2°.
$$\int f(x + b) dx = F(x + b) + C.$$