Розділ 10. РЯДИ

1. Числові ряди. Основні поняття

Нехай задано числову послідовність $a_1,\ a_2,\ldots,a_n,\ldots$. Вираз

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

називається *числовим рядом*. Числа $a_1,\ a_2,\ldots$ називають *членами* ряду, a_n – *загальним членом* ряду.

Суми $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, …, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, … називають *частковими сумами* ряду (1).

Якщо існує скінченна границя послідовності $\{S_n\}$ часткових сум

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \qquad (2)$$

то ряд (1) називають *збіжним*, а число S – *сумою* ряду.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує або дорівнює ∞, то ряд (1) називають *розбіжним*.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, тобто загальний член ряду не прямує до нуля, то ряд (1) розбіжний.

1. Дослідити на збіжність ряд $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$.

⌈ Члени цього ряду утворюють геометричну прогресію. За відомою з елементарної математики формулою маємо

$$S_n = 1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}, \text{ якщо } q \neq 1.$$

Розглянемо чотири випадки.

1) $|q| > 1$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ і тому ряд розбіжний.

2) $|q| < 1$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}\cdot\left(1 - \lim\limits_{n\to\infty} q^n\right) = \dfrac{1}{1-q}\cdot(1-0) = \dfrac{1}{1-q}$.

Отже, в цьому випадку ряд збіжний і його сума $S = \dfrac{1}{1-q}$.

3) $q=-1$. Тоді $S_n = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n-\text{парне} \\ 1, & \text{якщо } n-\text{непарне}. \end{cases}$ В цьому випадку $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує і, отже, ряд розбіжний.

4) $q=1$. Тоді маємо ряд $1+1+\ldots$, який, очевидно, розбіжний ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$).

<u>Висновок</u>: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ збіжний при $|q|<1$. ⌋

2. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$.

⌈ Представимо загальний член ряду $\frac{1}{n(n+1)}$ у вигляді

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Запишемо n-ну часткову суму ряду

$$S_n = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

так як усі доданки з другого до передостаннього взаємно знищуються.

Згідно з (2) знаходимо границю: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$. Отже, сума ряду $S=1$. ⌋

3. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \cdots$.

⌈ Цей ряд розбіжний, так як $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$. ⌋

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

4. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$.

5. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

6. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^2+2}$.

Відповіді:

4. $S = \frac{1}{2}$. **5.** $S = \frac{3}{4}$. **6.** Розбіжний.

2. Ознаки збіжності рядів з невід’ємними членами

2.1 Інтегральна ознака

Нехай члени ряду $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ додатні та не зростають: $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$. Припустимо, що на проміжку $[1, +\infty)$ визначена додатна незростаюча функція $f(x)$ така, що $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2, \ldots$, $f(n) = a_n, \ldots$. Тоді невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ та ряд (1) збігаються або розбігаються одночасно.

Дослідити на збіжність ряди.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ − *гармонічний ряд*.

⌐ Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{x}$. Вона задовольняє всі умови інтегральної ознаки при $x \geq 1$. Очевидно, що $f(1) = 1$, $f(2) = \frac{1}{2}, \ldots, f(n) = \frac{1}{n}, \ldots$.

Обчислимо невласний інтеграл (див. розділ 7):

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{a\to\infty} \ln x\Big|_1^a = \lim_{a\to\infty}(\ln a - \ln 1) = \infty .$$

Оскільки невласний інтеграл розбіжний, то за інтегральною ознакою заданий ряд теж розбіжний. ⌟

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ $(\alpha > 0)$ − *узагальнений гармонічний ряд*.

$\ulcorner$ Застосуємо інтегральну ознаку. Відповідна функція $f(x)=\dfrac{1}{x^{\alpha}}$ задовольняє всі умови інтегральної ознаки. Розглянемо невласний інтеграл при $\alpha \neq 1$ (випадок $\alpha = 1$ був розглянутий у прикладі 7):

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \int_1^{+\infty} x^{-\alpha} dx = \lim_{a\to+\infty} \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^a = \lim_{a\to+\infty}\left[\frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\right].$$

1) Якщо $\alpha > 1$, то $1-\alpha<0$ і $a^{1-\alpha}\to 0$ при $a\to+\infty$. Тоді маємо $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{\alpha}}=\dfrac{1}{\alpha-1}$ – інтеграл збіжний, тому і ряд збіжний.

2) Якщо $\alpha<1$, то $1-\alpha>0$ і $a^{1-\alpha}\to\infty$ при $a\to+\infty$. В цьому випадку невласний інтеграл $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{\alpha}}$ розбіжний, тому і ряд розбіжний.

Таким чином, ряд розбіжний при $\alpha\le 1$ і збіжний при $\alpha>1$. $\lrcorner$

<u>Висновок</u>. Узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ $(\alpha>0)$ збіжний при $\alpha>1$ і розбіжний при $\alpha\le 1$. Наприклад, ряди $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$ збіжні, а ряди $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ розбіжні.

9. $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$.

$\ulcorner$ Відповідна функція $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ при $x\ge 2$ задовольняє усі умови інтегральної ознаки. Розглянемо невласний інтеграл:

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{a\to+\infty}\int_2^{a}\frac{dx}{x\ln x}=\left|\begin{array}{l} t=\ln x \\ dt=\dfrac{dx}{x} \\ t_1=\ln 2 \\ t_2=\ln a\end{array}\right|=\lim_{a\to+\infty}\int_{\ln 2}^{\ln a}\frac{dt}{t}=\lim_{a\to+\infty}\ln|t|\Big|_{\ln 2}^{\ln a}=$$

$$=\lim_{a\to+\infty}\left(\ln|\ln a|-\ln|\ln 2|\right)=\infty .$$

Так як інтеграл розбіжний, то даний ряд теж розбіжний. $\lrcorner$

Вправи для самостійного розв'язання

Дослідити на збіжність ряди:

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-4n}$.

Відповіді:

10. Розбіжний.

11. Збіжний.

12. Збіжний.

2.2. Перша ознака порівняння

Розглянемо два ряди з невід'ємними членами

$$a_1 + a_2 + \ldots a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n , \tag{3}$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n . \tag{4}$$

Якщо для усіх n, починаючи з деякого номера n_0, виконується нерівність

$$a_n \le b_n ,$$

то зі збіжності ряду (4) випливає збіжність ряду (3), а з розбіжності ряду (3) випливає розбіжність ряду (4).

Дослідити на збіжність ряди.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^3}$.

⌐ Для порівняння візьмемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, який є збіжним (частинний випадок ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha = 3$, див. приклад 8). Очевидно, що $n+1 > n$, звідки $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ і $\frac{1}{(n+1)^3} < \frac{1}{n^3}$. Тому за ознакою порівняння даний ряд збіжний. ⌋

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{3n-1}$.

⌜ Порівняємо цей ряд з розбіжним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (див. приклад 7). Так як для загальних членів рядів маємо нерівність $\frac{3}{3n-1}>\frac{3}{3n}=\frac{1}{n}$, $n\geq 1$, то за ознакою порівняння даний ряд розбіжний. ⌟

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$.

⌜ Скористаємося, наприклад, нерівністю $\ln n<\sqrt{n}$, $n\geq 1$. Цю нерівність просто отримати з того, що значення функції $p(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ менші за одиницю на проміжку $[1,+\infty)$ (функцію $p(x)$ дослідити на екстремуми). Тоді

$$\frac{\ln n}{n^2}<\frac{\sqrt{n}}{n^2}=\frac{1}{n^{3/2}},\quad n\geq 1.$$

Так як ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ збіжний (приклад 8, $\alpha=\frac{3}{2}$), то за ознакою порівняння заданий ряд збіжний. ⌟

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(2n+1)}$.

⌜ Порівняємо даний ряд зі збіжним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (див. приклад 8, $\alpha=2$). Очевидно для кожного $n\geq 1$ виконуються нерівності $n+3>n$ та $2n+1>n$, почленне множення яких приводить до нерівності $(n+3)(2n+1)>n^2$. Звідси

$$\frac{1}{(n+3)(2n+1)}<\frac{1}{n^2}.$$

Отже, за ознакою порівняння заданий ряд збіжний. ⌟

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+\sin n}{n}$.

⌜ Так як $\sin n\geq -1$, то $2+\sin n\geq 1$. Тому

$$\frac{2+\sin n}{n} \geq \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбіжний, то за ознакою порівняння заданий ряд розбіжний. ⌋

Вправи для самостійного розв’язання.

Дослідити на збіжність ряди:

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+2}}$.

19. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{2n^2}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{4n-3}}$.

Відповіді:

18. Збіжний. **19.** Розбіжний. **20.** Збіжний.
21. Розбіжний.

2.3. Друга ознака порівняння

Розглянемо ряди (3), (4) і припустимо, що $b_n > 0$, $n \geq n_0$. Якщо виконується умова $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, де $0 < k < \infty$, то ряди (3) і (4) одночасно збіжні або розбіжні.

Дослідити на збіжність ряди.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)^3} = \frac{2^2}{3^3} + \frac{3^2}{4^3} + \frac{4^2}{5^3} + \ldots$.

⌈ Порівняємо цей ряд з розбіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (див. приклад 7):

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)^2}{(n+2)^3} : \frac{1}{n}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)^2}{(n+2)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^3} = 1 > 0.$$

Отже, даний ряд розбіжний за другою ознакою порівняння. ⌋

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n\cdot 3^n}$.

⌜ Цей ряд можна порівняти зі збіжним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ ($q=\dfrac{1}{3}<1$, див. приклад 1):

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n+1}{n\cdot 3^n}:\frac{1}{3^n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)}{n}=2>0.$$

Отже, даний ряд збіжний. ⌟

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\dfrac{\pi}{4n}$.

⌜ Порівняємо цей ряд з розбіжним гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ (див. приклад 7). Використовуючи співвідношення $\arcsin x \sim x$ при $x\to 0$ (див. розділ 4), дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\arcsin\frac{\pi}{4n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{4n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4n}\cdot\frac{n}{1}=\frac{\pi}{4}>0.$$

Отже, даний ряд розбіжний за другою ознакою порівняння. ⌟

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{arctg} n}{n^3}$.

⌜ Для порівняння візьмемо збіжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{n^3}:\frac{1}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg} n=\frac{\pi}{2}>0.$$

Отже, заданий ряд збіжний за другою ознакою порівняння. ⌟

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Дослідити на збіжність ряди:

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{(n+2)(n+3)}$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3n}$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1+n^2}{2+n^3}\right)^3$.

Відповіді:

26. Розбіжний. **27.** Збіжний.

28. Розбіжний. **29.** Збіжний.

2.4. Ознака Даламбера

Якщо для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то при $q<1$ даний ряд збіжний, а при $q>1$ – розбіжний. Якщо $q=1$, то потрібно застосувати іншу ознаку.

Дослідити ряди на збіжність за ознакою Даламбера.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{2^n}$.

⌐ $a_n = \frac{3n+1}{2^n}$; $a_{n+1} = \frac{3(n+1)+1}{2^{n+1}} = \frac{3n+4}{2^{n+1}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n+4}{2^{n+1}}}{\frac{3n+1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+4)\cdot 2^n}{2^n\cdot 2\cdot(3n+1)} =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+4}{2(3n+1)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} < 1$. Отже, за ознакою Даламбера даний ряд збіжний. ⌋

31. $\frac{1}{5}+\frac{1\cdot 3}{5^2\cdot 2!}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{5^3\cdot 3!}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{5^n\cdot n!}+\ldots$.

⌐ $a_n = \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{5^n\cdot n!}$; $a_{n+1} = \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)}{5^{n+1}\cdot(n+1)!}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)}{5^{n+1}\cdot(n+1)!} : \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{5^n\cdot n!}\right] =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)\cdot 5^n\cdot 5!}{5^n\cdot 5\cdot n!(n+1)\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{5(n+1)} = \frac{2}{5} < 1$. Тому за ознакою Даламбера ряд збіжний. ⌋

32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-1)!}{(2n-1)!}$.

⌈ $a_n=\dfrac{(3n-1)!}{(2n-1)!}$; $a_{n+1}=\dfrac{[3(n+1)-1]!}{[2(n+1)-1]!}=\dfrac{(3n+2)!}{(2n+1)!}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+2)!}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{(3n-1)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-1)!\,3n\cdot(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(2n-1)!}{(2n-1)!\,2n\cdot(2n+1)\cdot(3n-1)!}=$$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3(3n+1)(3n+2)}{2(2n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\left(3+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)}{2\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\infty>1$. Тому за ознакою Даламбера даний ряд розбіжний. ⌋

33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6^n}{n!}$.

⌈ $a_n=\dfrac{6^n}{n!}$; $a_{n+1}=\dfrac{6^{n+1}}{(n+1)!}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{6^n\cdot 6}{n!\,(n+1)}\cdot\dfrac{n!}{6^n}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6}{n+1}=0<1$. За ознакою Даламбера ряд збіжний. ⌋

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Дослідити на збіжність ряди:

34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n+1)!}$.

35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{3^n}$.

36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{3^n}$.

37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{2\cdot 6\cdot\ldots\cdot(4n-1)}$.

38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n^3}$.

39. $\sum n^2\cdot\sin\dfrac{\pi}{4^n}$.

Відповіді:

34. Збіжний. **35.** Збіжний. **36.** Збіжний.
37. Збіжний. **38.** Розбіжний. **39.** Збіжний.

2.5. Ознака Коші

Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з невід'ємними членами існує границя $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$, то при $q<1$ ряд збіжний, а при $q>1$ – розбіжний. Якщо $q=1$, то потрібно застосувати іншу ознаку.

Дослідити на збіжність ряди.

40. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$.

⌐ Застосуємо ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}<1.$$

Тому ряд збіжний. ⌟

41. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{\pi}{n}\right)^n$.

⌐ Знаходимо границю: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\arcsin\frac{\pi}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\arcsin\frac{\pi}{n}=$

$=\arcsin 0=0<1$. За ознакою Коші ряд збіжний. ⌟

42. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}}{2^n}$.

⌐ Обчислимо границю $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n+2}{n}\right)^n}{2}=$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}\cdot 2}=\frac{1}{2}\cdot e^2\approx 3,69>1$. За ознакою Коші цей ряд розбіжний. Ми скористались другою визначною границею (див. розділ 4). ⌟

Вправи для самостійного розв'язання

Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки Коші:

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^n}$. **44.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{\pi}{n} \right)^n$.

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left[\ln(n+2) \right]^n}$. **46.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{3+n^2} \right)^n$.

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+3}{n} \right)^{n^2}}{3^n}$.

Відповіді:

43. Збіжний. **44.** Збіжний. **45.** Збіжний.
46. Збіжний. **47.** Розбіжний.

3. Знакозмінні ряди

3.1. Знакопереміжні ряди

Ряд $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, де $a_n \geq 0$, називається *знакопереміжним*. Для дослідження таких рядів на збіжність застосовують *ознаку Лейбніца*: знакопереміжний ряд збіжний, якщо

1) $a_n \geq a_{n+1}$, $n \geq 1$;

2) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

При цьому його сума S задовольняє нерівність $0 \leq S \leq a_1$.

Дослідити ряди на збіжність за ознакою Лейбніца.

48. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$.

⌈ 1) Так як $n+1 > n$, то $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, тобто $a_n \geq a_{n+1}$.

2) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Отже, за ознакою Лейбніца ряд збіжний. ⌋

49. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}=\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{10}-\frac{1}{13}+\ldots$.

$\ulcorner$ 1) З нерівності $3(n+1)>3n$ одержимо $3(n+1)+1>3n+1$, тому

$$\frac{1}{3n+1}>\frac{1}{3(n+1)+1}\Leftrightarrow a_n\geq a_{n+1}.$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3n+1}=0$.

Отже, ряд збіжний і його сума $S\leq\frac{1}{4}$. $\lrcorner$

50. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$.

$\ulcorner$ 1) Так як функція $\ln x$ зростає, то $\ln(n+2)>\ln(n+1)$, звідки

$$\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{\ln(n+2)}\Leftrightarrow a_n\geq a_{n+1}.$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0$.

Отже, ряд збіжний. $\lrcorner$

3.2. Ряди з довільним розподілом знаків

Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ містить нескінченну кількість як додатних, так і від'ємних членів.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, складений з модулів членів даного ряду, збіжний, то даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ також збіжний. Це достатня ознака збіжності знакозмінного ряду.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ називається *абсолютно збіжним*, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ збіжний.

У випадку, коли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ розбіжний, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *умовно збіжним*.

Дослідити ряди на абсолютну та умовну збіжність.

51. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

⌈ Для дослідження ряду на абсолютну збіжність побудуємо ряд з модулів членів: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Утворений ряд розбіжний (див. приклад 7).

За теоремою Лейбніца заданий ряд збіжний (див. приклад 48).

Отже, ряд умовно збіжний. ⌋

52. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

⌈ Цей ряд абсолютно збіжний, оскільки ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ є частинним випадком узагальненого гармонічного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha = 2 > 1$ (див. приклад 8). ⌋

53. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n^3}$.

⌈ Даний ряд містить нескінченну кількість як додатних, так і від'ємних членів. Дослідимо ряд з модулів його членів

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n\pi/2)|}{n^3}. \qquad (*)$$

Застосуємо першу ознаку порівняння. Так як $|\sin(n\pi/2)| \le 1$, то $\frac{|\sin(n\pi/2)|}{n^3} \le \frac{1}{n^3}$. Звідси маємо, що ряд (*) збіжний, оскільки збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Отже, заданий ряд є абсолютно збіжним. ⌋

Вправи для самостійного розв'язання

Дослідити ряди на абсолютну та умовну збіжність:

54. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)2^n}$.

55. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

56. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$.

57. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n^3}}$.

58. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n^2)}{n^2}$.

59. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^{4/3}}$.

60. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(n+2)}{3n+2}$.

Відповіді:

54. Абсолютно збіжний.

55. Умовно збіжний.

56. Умовно збіжний.

57. Абсолютно збіжний.

58. Абсолютно збіжний.

59. Абсолютно збіжний.

60. Розбіжний.

4. Функціональні ряди

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots, \tag{5}$$

члени якого є функціями від x, називається *функціональним рядом*.

Зауважимо, що при фіксованому значенні x ряд (5) – числовий. Тому при одних значеннях x він збіжний, а при інших – розбіжний.

Сукупність тих значень x, при яких функціональний ряд збіжний, називають *областю збіжності* ряду.

Якщо існує збіжний числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (*мажорантний* ряд) такий, що $|u_n(x)|\le a_n$, $x\in D$, то ряд (5) є абсолютно збіжним в D.

Знайти області збіжності функціональних рядів.

61. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{10^n}$.

Γ Застосуємо ознаку Коші до ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x^n}{10^n}\right|$, складеного з модулів членів даного ряду:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{10^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{10^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{10}=\frac{|x|}{10}.$$

Ряд збіжний, якщо $\frac{|x|}{10}<1$, тобто $|x|<10$ або $x\in(-10,\,10)$.

Перевіримо заданий ряд на збіжність при $x=\pm 10$:

1) при $x=10$ маємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{10^n}=\sum_{n=1}^{\infty}1$, який розбіжний ($\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$);

2) при $x=-10$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, який теж розбіжний.

Отже, областю збіжності ряду є інтервал $(-10,\,10)$. ⌋

62. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n^3}}$.

⌈ Розглянемо збіжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ (приклад 8, $\alpha=\frac{3}{2}>1$). З нерівності $\frac{|\sin nx|}{\sqrt{n^3}}\le\frac{1}{n^{3/2}}$, $x\in(-\infty,\,+\infty)$ випливає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ є мажорантним для заданого.

Отже, областю збіжності ряду є інтервал $(-\infty,\,+\infty)$. ⌋

63. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^n x=\ln x+\ln^2 x+\ln^3 x+\ldots+\ln^n x+\ldots$.

⌈ Застосуємо ознаку Коші до ряду, складеного з модулів членів даного ряду – $\sum_{n=1}^{\infty}|\ln^n x|$:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\ln^n x|}=\lim_{n\to\infty}|\ln x|=|\ln x|.$$

Ряд буде збіжним, якщо виконується умова

$$|\ln x|<1,\quad -1<\ln x<1,\quad \ln e^{-1}<\ln x<\ln e,$$

$$e^{-1}<x<e,\ \text{або}\quad \frac{1}{e}<x<e.$$

Дослідимо ряд на збіжність в точках $x = e$ та $x = \frac{1}{e}$.

1) при $x = e$ маємо числовий ряд $\ln e + \ln^2 e + \ln^3 e + \ldots = 1+1+1+\ldots$, який є розбіжним, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$;

2) при $x = \frac{1}{e} = e^{-1}$ маємо числовий ряд $\ln e^{-1} + \left(\ln e^{-1}\right)^2 + \left(\ln e^{-1}\right)^3 + \ldots = -1+1-1+1-\ldots$, який теж розбіжний тому, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

Таким чином, областю збіжності ряду є інтервал $\left(\frac{1}{e}, e\right)$. ⌋

64. $\frac{x}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^4} + \ldots + \frac{x^n}{1+x^{2n}} + \ldots$.

⌈ Застосуємо ознаку Даламбера до ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right|$:

$$v_n = \left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right|, \quad v_{n+1} = \left|\frac{x^{n+1}}{1+x^{2(n+1)}}\right|;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}\left(1+x^{2n}\right)}{\left(1+x^{2n+2}\right)x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x\left(1+x^{2n}\right)}{1+x^{2n+2}}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1+x^{2n}}{1+x^{2n+2}} = k .$$

Можливі випадки:

1) Якщо $|x| < 1$, то $x^{2n} \to 0$ і $x^{2n+2} \to 0$ при $n \to \infty$, звідки $k = \left|\frac{x(1+0)}{1+0}\right| = |x| < 1$ згідно з припущенням і, отже, ряд збіжний при $x \in (-1, 1)$;

2) якщо $|x| > 1$, то

$$k = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+x^{2n}\right)}{1+x^{2n+2}} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{x^{2n}}+1\right)}{\frac{1}{x^{2n}}+x^2} = |x| \frac{0+1}{0+x^2} = \frac{1}{|x|} < 1 \qquad \left(\frac{1}{x^{2n}} \to 0\right.$$

при $n \to \infty$) згідно з припущенням і, отже, ряд збіжний при $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$;

3) при $x=1$ маємо числовий ряд $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$, який є розбіжним ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$);

4) при $x=-1$ маємо ряд $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\ldots$, який є розбіжним ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$).

Таким чином, область збіжності даного ряду має вигляд

$$(-\infty, -1)\cup(-1, 1)\cup(1, +\infty). \quad \lrcorner$$

65. $\frac{x}{e^x}+\frac{2x}{e^{2x}}+\ldots+\frac{nx}{e^{nx}}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{e^{nx}}$.

$\ulcorner$ Застосуємо ознаку Даламбера до ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{nx}{e^{nx}}\right|$:

$$v_n=\left|\frac{nx}{e^{nx}}\right|; \quad v_{n+1}=\left|\frac{(n+1)x}{e^{(n+1)x}}\right|;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x\cdot e^{nx}}{e^{(n+1)x}\,nx}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)e^{nx}}{e^{nx}\cdot e^x\cdot n}\right|=\frac{1}{e^x}.$$

Ряд збіжний, якщо $\frac{1}{e^x}<1$, $e^{-x}<e^0$, $-x<0$, звідки $x>0$.

При $x=0$ маємо збіжний ряд $0+0+\cdots$.

Отже, областю збіжності ряду є проміжок $[0, +\infty)$. $\lrcorner$

<u>Вправи для самостійного розв’язання.</u>

Знайти область збіжності рядів:

66. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n^2}$.

67. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$.

68. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

69. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(x+1)^n}$.

Відповіді:

66. $x\in(-1, 1)$.

67. $x\in(-\infty,-1)\cup(1, +\infty)$.

68. $x\in[-1, 1]$.

69. $x\in(-\infty,-3]\cup(1, +\infty)$.

5. Степеневі ряди

5.1. Загальні поняття

Степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

є частинним випадком функціонального ряду (5). Він, очевидно, збіжний при $x = 0$.

Число $R > 0$ називається *радіусом збіжності* степеневого ряду, якщо при $|x| < R$ ряд збіжний, а при $|x| > R$ ряд розбіжний. *Інтервал збіжності* $(-R,\ R)$ може вироджуватись у точку нуль.

Для знаходження радіуса збіжності можна використати, наприклад, ознаку Даламбера, звідки

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Степеневий ряд можна почленно диференціювати в довільній точці інтервалу збіжності та почленно інтегрувати на будь-якому відрізку, який лежить в інтервалі збіжності. При цьому інтервал збіжності ряду не зміниться.

Знайти області збіжності степеневих рядів.

70. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5x)^n}{n} = \frac{5x}{1} + \frac{5^2x^2}{2} + \frac{5^3x^3}{3} + \ldots.$

⌈ У даному прикладі $a_n = \dfrac{5^n}{n}$, $a_{n+1} = \dfrac{5^{n+1}}{n+1}$.

Радіус збіжності ряду: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{5^n}{n} : \dfrac{5^{n+1}}{n+1}\right| = \dfrac{1}{5}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{1}{5}$. Отже, інтервал збіжності – $x \in \left(-\dfrac{1}{5};\ \dfrac{1}{5}\right)$. Дослідимо ряд на збіжність на кінцях інтервалу:

1) при $x = \dfrac{1}{5}$ маємо числовий ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(5\cdot\frac{1}{5}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонічний ряд, який розбіжний;

2) при $x=-\frac{1}{5}$ маємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-5\cdot\frac{1}{5}\right)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, який збіжний за ознакою Лейбніца (див. приклад 48).

Таким чином, областю збіжності даного ряду є проміжок $\left[-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$. $\lrcorner$

71. $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$.

$\ulcorner$ $a_n=n!,\ \ a_{n+1}=(n+1)!$.

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,$$

тобто ряд є збіжним лише у точці $x=0$ і сума такого ряду $S=0$. $\lrcorner$

Вправи для самостійного розв’язання

Знайти області збіжності рядів:

72. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n$.

73. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$.

74. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$.

75. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$.

Відповіді:

72. $x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

73. $x\in(-3,\,3)$.

74. $x\in[-1,\,1]$.

75. $x\in[-1,\,1)$.

5.2. Розвинення функцій у степеневі ряди

Якщо функція $f(x)$ в деякому околі точки x_0 має похідні довільного порядку , то функцію можна розвинути в околі точки x_0 у степеневий ряд

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots, \qquad (6)$$

який називають *рядом Тейлора*.

При $x_0=0$ з (6) одержуємо *ряд Маклорена*

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}+\ldots. \qquad (7)$$

Наведемо розклади деяких елементарних функцій у ряд Маклорена:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\quad x\in(-\infty,+\infty); \qquad (8)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\quad x\in(-\infty,+\infty); \qquad (9)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\quad x\in(-\infty,+\infty);$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots,\quad x\in(-1,1); \qquad (10)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots,\quad x\in(-1,1]. \qquad (11)$$

Розкласти функції в ряд Маклорена:

76. $f(x)=e^{3x}$.

⌈ Підставимо $3x$ у формулу (8) замість x і отримаємо ряд $e^{3x}=1+3x+\frac{9x^2}{2!}+\ldots+\frac{3^n x^n}{n!}+\ldots$, інтервал збіжності якого $(-\infty,+\infty)$. ⌋

77. $f(x)=\cos^2 x$.

Γ Запишемо $\cos^2 x$ як $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$. Тоді за формулою (9) отримаємо

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4\cdot x^2}{2!}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2^4\cdot x^4}{4!}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2^6\cdot x^6}{6!}+\ldots=$$

$$=1-\frac{2x^2}{2!}+\frac{2^3x^4}{4!}-\frac{2^5x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n-1}\cdot x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\quad x\in(-\infty,+\infty).\ \lrcorner$$

78. $f(x)=\sqrt{1-x^2}=\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Γ Використаємо *біноміальний* ряд (10) при $m=\frac{1}{2}$:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3+\ldots,$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2^2\cdot 2!}x^2+\frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4\cdot 4!}x^4+\ldots+$$

$$+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2^n\cdot n!}x^n+\ldots.$$

Далі в цей ряд підставимо $\left(-x^2\right)$ замість x:

$$\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\cdot\left(-x^2\right)-\frac{1\cdot\left(-x^2\right)^2}{2^2\cdot 2!}+\frac{1\cdot 3\cdot\left(-x^2\right)^3}{2^3\cdot 3!}-$$

$$-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\left(-x^2\right)^4}{2^4\cdot 4!}+\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n-3)\left(-x^2\right)^n}{2^n\cdot n!}+\ldots,$$ звідки

$$\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{2^2\cdot 2!}-\frac{1\cdot 3x^6}{2^3\cdot 3!}-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^8}{2^4\cdot 4!}-\ldots-$$

$$-\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2^n\cdot n!}x^{2n}\ldots,\quad x\in(-1,1).\ \lrcorner$$

79. $f(x)=\operatorname{arctg} x$.

⌈ Розглянемо ряд (10) при $m=-1$:

$$(1+x)^{-1}=1-x+\frac{-1\cdot(-2)}{2!}x^2+\frac{-1\cdot(-2)\cdot(-3)}{3!}x^3+\ldots, \text{ або}$$

$$(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots.$$

Підставляючи x^2 замість x, одержимо

$$\left(1+x^2\right)^{-1}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots.$$

Виконаємо почленне інтегрування даного ряду на відрізку $[0, x]$, $x\in(-1, 1)$:

$$\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x\left(1-t^2+t^4-t^6+\ldots+(-1)^n t^{2n}+\ldots\right)dt ,$$

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,\ x\in(-1, 1). \quad (11)$$

З допомогою додаткових міркувань можна показати, що формула (11) залишається вірною і для відрізка $[-1, 1]$. ⌋

80. $f(x)=\arcsin x$.

⌈ Візьмемо біноміальний ряд (10) при $m=-\frac{1}{2}$.

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\cdot 2}x^2+\frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots$$

$$+\frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n+\ldots=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^2-$$

$$-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^3+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^n+\ldots.$$

Підставимо в цей ряд $\left(-x^2\right)$ замість x:

$$\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^6+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}+\ldots.$$

Знаючи, що степеневий ряд можна почленно інтегрувати в інтервалі збіжності, візьмемо інтеграл від обох частин отриманої рівності ($x \in (-1, 1)$):

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^6 + \ldots\right)dx,$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!\cdot 5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!\cdot 7}x^7 + \ldots + \qquad (12)$$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n\cdot n!(2n+1)}x^{2n+1} + \ldots .$$

Якщо добуток $2^n\cdot n!$ переписати у вигляді

$$\underbrace{2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2}_{n}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n = 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot 2n,$$

то ряд (12) матиме наступний вигляд:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \ldots + \qquad (12')$$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n\cdot (2n+1)}x^{2n+1} + \ldots, \quad x \in (-1, 1).$$

За допомогою додаткових міркувань можна показати, що формула (12') залишається вірною і для відрізка $[-1, 1]$. $\lrcorner$

6. Ряди Фур'є

1°. *Ряд Фур'є* періодичної функції $f(x)$ з періодом 2π, заданої на відрізку $[-\pi; \pi]$, має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad (13)$$

де

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad (14)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $[-l, l]$, де l – довільне додатне число, то ряд Фур'є для такої функції має вигляд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{15}$$

де

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx;\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$
$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \tag{16}$$

Зрозуміло, що ряд (13) є частинним випадком ряду (15), а формули (14) є частинними випадками формул (16) при $l=\pi$.

Збіжність ряду (15) визначається теоремою Діріхле. Ряд (15) збіжний, якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[-l, l]$ або має на ньому скінченну кількість точок розриву 1-го роду. При цьому сума $S(x)$ в точках неперервності дорівнює значенню функції в цих точках. Якщо x_0 – точка розриву 1-го роду, то суму ряду (15) можна знайти за формулою

$$S(x_0)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_0-0}f(x)+\lim_{x\to x_0+0}f(x)\right].$$

На кінцях відрізка $[-l, l]$ сума ряду (15):

$$S(-l)=S(l)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to -l+0}f(x)+\lim_{x\to l-0}f(x)\right].$$

2°. Якщо функція $f(x)$ парна, то в формулах (13) – (16) коефіцієнти $b_n=0$ і ряд Фур'є має вигляд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,\ \text{при}\ x\in[-\pi, \pi], \tag{17}$$

де $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx,\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx;$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ \text{при}\ x\in[-l, l], \tag{18}$$

де $a_0=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)dx,\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx.$

Ряди (17) та (18) називають рядами *косинусів* функції $f(x)$.

3°. Якщо задана функція $f(x)$ <u>непарна</u>, то в формулах (13) – (16) коефіцієнти $a_n = 0$, $a_0 = 0$. Залишаються лише $b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$ при $x \in [-\pi, \pi]$ або $b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$ при $x \in [-l, l]$.

4°. Якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $[a, b]$, то маємо безліч способів розвинути її в ряд Фур'є. Достатньо довизначити функцію на інтервалі $[-b, a)$.

81. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x) = \pi + x$, задану на проміжку $(-\pi, \pi]$ з періодом 2π.

⌈ Знаходимо коефіцієнти ряду Фур'є за формулами (14):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\pi\cdot dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\,dx = \frac{\pi}{\pi}\cdot x\Big|_{-\pi}^{\pi} + 0 = 2\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\underset{\text{парна}}{\pi\cos nx\,dx} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\underbrace{x\cos nx}_{\text{непарна}}dx =$$

$$= \frac{\pi}{\pi}\cdot 2\int\limits_0^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{2}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}(\sin n\pi - \sin 0) = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)\sin nx\,dx = \frac{\pi}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\underset{\text{непарна}}{\pi\sin nx\,dx} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\underbrace{x\sin nx}_{\text{парна}}dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}x\sin nx\,dx = \begin{vmatrix} u = x, & dv = \sin nx\,dx \\ du = dx, & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int\limits_0^{\pi}\cos nx\,dx\right] = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n}\cdot 0\cdot\cos 0 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}(\sin n\pi - \sin 0)\right] = -\frac{2}{n}\cos n\pi =$$

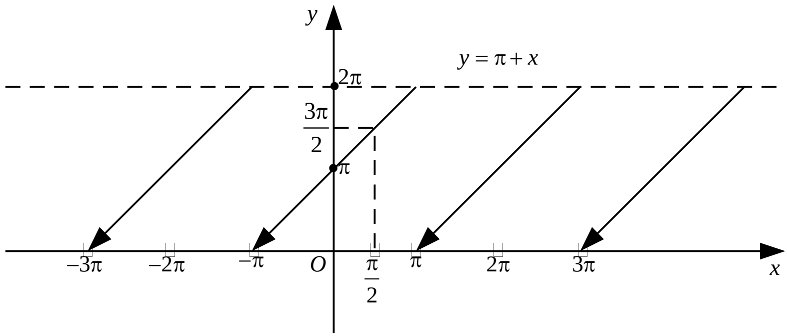
$$= -\frac{2}{n}\cdot(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

Таким чином, за формулою (13) ряд Фур'є для заданої функції має вигляд

$$f(x)=\frac{2\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx=\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx \text{ , або}$$

$$f(x)=\pi+2\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\ldots\right).$$

Побудуємо графік даної періодичної функції $y=\pi+x$.



Сума ряду Фур'є в точках неперервності функції дорівнює її значенню. Наприклад, в точці $x_0=0$ сума ряду $S(x_0)=\pi+0=\pi$. В точці $x_0=\frac{\pi}{2}$ сума ряду $S\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$.

В точках розриву, наприклад, в точці $x_0=\pi$ сума ряду

$$S(\pi)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to\pi-0}f(x)+\lim_{x\to\pi+0}f(x)\right]=\frac{1}{2}(2\pi+0)=\pi \text{ . } \lrcorner$$

82. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $y=x^2$, задану на відрізку $[-2, 2]$ з періодом $T=4$.

$\ulcorner$ Дана функція парна. Тому треба застосувати формулу (18) при $l=2$.

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2=\frac{8}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\left|\begin{array}{ll} u=x^2, & dv=\cos\frac{n\pi x}{2}dx \\ du=2xdx, & v=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{2}{n\pi}x^2\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2-\frac{4}{n\pi}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx=\left|\begin{matrix}u=x, & dv=\sin\frac{n\pi x}{2}dx\\ du=dx, & v=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{8}{n\pi}\underset{0}{\sin n\pi}-0-\frac{4}{n\pi}\left[-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2+\frac{2}{n\pi}\cdot\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2\right]=$$

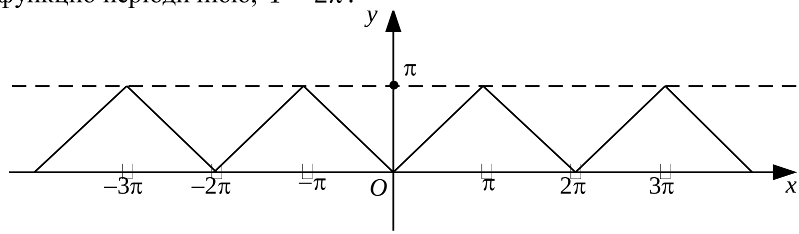
$$=\frac{8}{n^2\pi^2}\left(2\cos n\pi-0\right)=\frac{16\cos n\pi}{n^2\pi^2}=\frac{16\cdot\left(-1\right)^n}{n^2\pi^2}.$$

Ряд Фур'є заданої функції має вигляд

$$f\left(x\right)=\frac{4}{3}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}. \quad \lrcorner$$

83. Функція $f\left(x\right)=x$ задана на проміжку $\left(0,\ \pi\right]$. Розвинути її в ряд косинусів.

⌜ Дану функцію потрібно довизначити на відрізку $\left[-\pi,\ 0\right]$ так, щоб вона була парною. Покладемо $y=-x$ при $x\in\left[-\pi,\ 0\right]$. Вважаємо функцію періодичною, $T=2\pi$.



Функція неперервна на всій осі.

Коефіцієнти ряду знаходимо за формулами (17):

$$b_n=0,\quad a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{\pi}=\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\left|\begin{matrix}u=x, & dv=\cos nx\,dx\\ du=dx, & v=\frac{1}{n}\sin nx\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\underbrace{\frac{x}{n}\sin nx\bigg|_0^{\pi}}_{0}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right]=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\cos nx\big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}\left[\cos n\pi-\cos 0\right]=\frac{2}{\pi n^2}\left[\cos n\pi-1\right].$$

Запишемо ряд Фур'є:

$$f\left(x\right)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(\cos n\pi-1\right)}{\pi n^2}\cos nx,$$

$$f\left(x\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\left(-\frac{2\cos x}{1}-\frac{2\cos 3x}{9}-\frac{2\cos 5x}{5^2}-\cdots\right),\text{ або}$$

$$f\left(x\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(2n-1\right)x}{\left(2n-1\right)^2}.\quad \lrcorner$$

84. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $y=\begin{cases}1 & \text{при } x\in\left[0,\,\pi\right),\\ -1 & \text{при } x\in\left[-\pi,\,0\right),\end{cases}$ задану на проміжку $\left[-\pi,\,\pi\right)$.

$\ulcorner$ $a_0=0$, $a_n=0$,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}1\cdot\sin nx\,dx=-\frac{2}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}=-\frac{2}{n\pi}\left(\cos n\pi-\cos 0\right)=$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\left[\left(-1\right)^n-1\right]=\left[\begin{array}{ll}0, & n-\text{парне},\\ \dfrac{4}{n\pi}, & n-\text{непарне}.\end{array}\right.$$

Запишемо ряд Фур'є:

$$f\left(x\right)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(-1\right)^n-1\right]\frac{\sin nx}{n},\text{ або}$$

$$f\left(x\right)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots\right)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(2n-1\right)x}{2n-1}.\quad \lrcorner$$

85. Функцію $y=\cos 2x$ $\left(T=\frac{\pi}{2};\ x\in\left(0,\,\frac{\pi}{4}\right)\right)$ розвинути в ряд синусів.

$\ulcorner$ Довизначимо функцію на інтервал $\left(-\frac{\pi}{4},\,0\right)$ так, щоб вона була непарною, тобто $y=-\cos 2x$ при $x\in\left(-\frac{\pi}{4},\,0\right)$; $l=\frac{\pi}{4}$; $a_0=0$; $a_n=0$.

$$b_n=\frac{2\cdot 4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\cdot\sin\frac{n\pi x\cdot 4}{\pi}\,dx=\frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\sin 4nx\,dx=$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin(4n+2)x+\sin(4n-2)x\right]dx=\frac{4}{\pi}\left[-\frac{\cos(4n+2)x}{4n+2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\cos(4n-2)x}{4n-2}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos\left[(4n+2)\frac{\pi}{4}\right]}{4n+2}+\frac{\cos\left[(4n-2)\frac{\pi}{4}\right]}{4n-2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n-2}\right]=-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)}{4n+2}+\frac{\cos\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)}{4n-2}-\frac{8n}{(4n+2)(4n-2)}\right]=$$

$$=-\frac{4}{\pi}\left[-\frac{\sin n\pi}{4n+2}+\frac{\sin n\pi}{4n-2}-\frac{8n}{(4n+2)(4n-2)}\right]=\frac{32n}{\pi(4n+2)(4n-2)}=$$

$$=\frac{8n}{\pi(2n+1)(2n-1)}.$$

Запишемо ряд Фур'є:

$$f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+1)(2n-1)}\sin 4nx=\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin 4x}{3\cdot 1}+\frac{\sin 8x}{5\cdot 3}+\frac{\sin 12x}{7\cdot 5}+\cdots\right). \quad \lrcorner$$

86. $f(x)=x+2,\ x\in[1,2]$.

$\ulcorner$ Можна покласти $f(x)=0$ при $x\in(-1,1)$ і $f(x)=-(x+2)$ при $x\in[-2,-1]$. Тоді функція $f(x)$ непарна і коефіцієнти ряду Фур'є обчислюються за формулами $a_0=0$, $a_n=0$, $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$ при $l=2$.

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\int_0^1 0\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\int_1^2(x+2)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=x+2, & dv=\sin\frac{n\pi x}{2}dx \\ du=dx, & v=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\end{vmatrix}=-\frac{2(x+2)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_1^2+$$

$$+\frac{2}{n\pi}\cdot\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_1^2=-\frac{8}{n\pi}\cos n\pi+\frac{6}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\left(\sin n\pi-\sin\frac{n\pi}{2}\right)=$$

$$= \frac{8(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{6}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Ряд Фур'є для заданої функції має вигляд

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4(-1)^{n+1}}{n} + \frac{3}{n}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{2}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right]\sin\frac{n\pi x}{2}. \quad \lrcorner$$

Вправи для самостійного розв'язання

87. Розвинути в ряд Фур'є функцію $y = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x \in (-\pi, 0], \\ 0, & \text{якщо } x \in (0, \pi). \end{cases}$

88. Розвинути в ряд синусів функцію $y = x^2$, $x \in (0, \pi)$.

89. Розвинути в ряд косинусів функцію $y = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in (0, 1], \\ 2, & \text{якщо } x \in (1, 2). \end{cases}$

90. Розвинути в ряд косинусів функцію $y = \sin 2x$, $x \in (0, \pi)$.

91. Розвинути в ряд Фур'є функцію $y = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Відповіді:

87. $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}$.

88. $f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\left\{\frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3}\left[(-1)^n - 1\right]\right\}\sin nx$.

89. $f(x) = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi x}{2}$.

90. $f(x) = \frac{8}{\pi}\left[\frac{\cos x}{3} + \frac{\cos 3x}{-5} + \cdots + \frac{\cos(2n-1)x}{4-(2n-1)^2} + \cdots\right]$.

91. $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left[(2n+1)x\right]}{(2n+1)^2}$.