Розділ 9. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1. Основні поняття

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, яке містить незалежну змінну x, невідому функцію $y = y(x)$ та її похідну y':

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Розв'язавши рівняння (1) відносно y' (якщо це можливо), приходимо до диференціального рівняння

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

яке називають *розв'язаним відносно похідної*.

Розв'язком рівняння (1) (або (2)) на інтервалі (a, b) називають диференційовну на цьому інтервалі функцію $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння перетворює його в тотожність при всіх x з інтервалу (a, b).

Загальним розв'язком рівняння (1) (або (2)) називають функцію $y = \varphi(x, C)$, яка є розв'язком даного рівняння при будь-якому фіксованому значенні сталої C і для довільної *початкової умови* $y(x_0) = y_0$ існує єдине значення $C = C_0$, при якому розв'язок $y = \varphi(x, C_0)$ задовольняє початкову умову. Розв'язок $y = \varphi(x, C_0)$ називають *частинним* або *розв'язком задачі Коші*.

Співвідношення $G(x, y, C) = 0$, яким загальний розв'язок $y = \varphi(x, C)$ рівняння (1) задається неявно, називають *загальним інтегралом* рівняння (1). При конкретному значенні $C = C_0$ співвідношення $G(x, y, C_0) = 0$ називають *частинним інтегралом*.

Найпростіше диференціальне рівняння першого порядку

$$y' = f(x) \tag{3}$$

зводиться до обчислення невизначеного інтеграла. Так як $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то маємо $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$, або $dy = f(x)dx$. Інтегруємо $\int dy = \int f(x)dx + C$ і отримуємо $y = \int f(x)\,dx + C$. Тут під невизначеним інтегралом розуміємо одну з первісних функції $f(x)$.

Розв'язати диференціальні рівняння:

1. $y' = x^2 + 4x - 7$.

$\ulcorner$ Це рівняння виду (3). Розв'яжемо його за наведеною вище схемою:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 4x - 7, \quad dy = \left(x^2 + 4x - 7\right)dx,$$

$$\int dy = \int \left(x^2 + 4x - 7\right)dx, \quad y = \frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} - 7x + C, \text{ або}$$

$y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 7x + C$ – загальний розв'язок заданого диференціального рівняння. $\lrcorner$

2. $y' = 8^x$.

$\ulcorner$ $\frac{dy}{dx} = 8^x$, $dy = 8^x\,dx$, $\int dy = \int 8^x\,dx$, звідки знаходимо загальний розв'язок $y = \frac{8^x}{\ln 8} + C$. $\lrcorner$

3. $y' = \cos x$, якщо $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$.

$\ulcorner$ Спочатку знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' = \cos x, \quad \frac{dy}{dx} = \cos x, \quad dy = \cos x\,dx,$$

$\int dy = \int \cos x\,dx$, $y = \sin x + C$ – загальний розв'язок.

Тепер знайдемо розв'язок задачі Коші. За умовою задачі $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$. Тому, підставляючи в загальний розв'язок $y = 3$ та $x = \frac{\pi}{2}$, маємо $3 = \sin\frac{\pi}{2} + C$, $3 = 1 + C$, $C = 3 - 1 = 2$. Підставивши $C = 2$ в загальний розв'язок, знаходимо частинний розв'язок $y = \sin x + 2$. $\lrcorner$

Вправи для самостійного розв'язання

Розв'язати диференціальні рівняння:

4. $y' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

5. $y' = x^3 - 5x^2 + 4$.

6. $y' = \operatorname{arctg} x$.

7. $y' = \dfrac{1}{x^2}$, якщо $y(-1) = 5$.

Відповіді:

4. $y = -\operatorname{ctg} x + C$.

5. $y' = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{5}{2}x^2 + 4x + C$.

6. $y = \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2 + 1\right) + C$.

7. $y = -\dfrac{1}{x} + 4$.

2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння виду

$$y' = f(x)\cdot g(y) \tag{4}$$

називають *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними*. Права частина рівняння (4) є добутком двох функцій, залежних лише від однієї змінної: перша функція залежить лише від x, а друга – лише від y.

Подамо схему розв'язання диференціального рівняння (4). Так як $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то маємо $y' = f(x)\cdot g(y)$, або $\dfrac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$.

Помножимо обидві частини рівності на вираз $\dfrac{dx}{g(y)}$ (припускаємо, що $g(y) \neq 0$). Отримаємо рівняння з *відокремленими змінними*

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx. \tag{5}$$

У лівій частині рівності (5) маємо диференціал деякої функції по змінній y, а у правій – по змінній x.

Інтегруючи рівняння (5)

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C, \tag{6}$$

отримаємо загальний інтеграл (розв’язок) диференціального рівняння (4).

Диференціальне рівняння

$$f_1(x)g_1(y)dy + f_2(x)g_2(y)dx = 0 \qquad (7)$$

зводиться до диференціального рівняння (4). Поділимо ліву і праву частини рівняння (7) на добуток функцій $f_1(x)\cdot g_2(y) \neq 0$ і перенесемо вираз, який містить диференціал dx, вправо:

$$\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = -\frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx.$$

Інтегруючи ліву частину за змінною y, а праву – за змінною x, дістанемо загальний інтеграл диференціального рівняння (7):

$$\int\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = -\int\frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx + C.$$

Розв’язати диференціальні рівняння:

8. $y' = \dfrac{y}{x}$.

⌈ Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними: $y' = \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x}\cdot y$. Оскільки $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то запишемо його у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Для відокремлення змінних помножимо дану рівність на dx і поділимо на y. Отримаємо

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруємо дане рівняння:

$\displaystyle\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x}$, $\quad \ln|y| = \ln|x| + \ln C$, $\quad \ln|y| = \ln|Cx|$, звідки знаходимо загальний розв’язок заданого диференціального рівняння – $y = Cx$. ⌋

9. $\dfrac{dy}{dx} = 3\sqrt{\dfrac{x}{y}}$, якщо $y(1) = 9$.

┌ Так як $\dfrac{dy}{dx} = 3\sqrt{\dfrac{x}{y}} = 3\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{y}}$, то це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Помноживши рівняння на $\sqrt{y}\,dx$, дістанемо

$$\sqrt{y}\,dy = 3\sqrt{x}\,dx .$$

Інтегруємо дане рівняння:

$\int\sqrt{y}\,dy = 3\int\sqrt{x}\,dx$, $\int y^{\frac{1}{2}}\,dy = 3\int x^{\frac{1}{2}}\,dx$, $\dfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = 3\dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$, звідки знаходимо загальний інтеграл $y^{\frac{3}{2}} = 3x^{\frac{3}{2}} + \dfrac{3}{2}C$, або

$$y^{\frac{3}{2}} = 3x^{\frac{3}{2}} + C . \qquad (8)$$

Знайдемо частинний інтеграл. За умовою задачі $y = 9$ при $x = 1$. Підставляючи вказані значення y та x у формулу (8), знаходимо сталу C:

$$9^{\frac{3}{2}} = 3\cdot 1^{\frac{3}{2}} + C ,\quad 27 = 3 + C ,\quad C = 24 .$$

Підставивши знайдене значення $C = 24$ у формулу (8), дістаємо частинний інтеграл заданого диференціального рівняння – $y^{\frac{3}{2}} = 3x^{\frac{3}{2}} + 24$. ┘

10. $\left(1+e^{2x}\right)y^2 y' = e^x$.

┌ Розв’яжемо задане рівняння відносно y':

$$y' = \frac{e^x}{\left(1+e^{2x}\right)y^2} .$$

Отже, це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Підставимо $y' = \dfrac{dy}{dx}$ і відокремимо змінні, помноживши рівняння на $y^2 dx$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{\left(1+e^{2x}\right)y^2} ,\quad y^2\,dy = \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx .$$

Звідси маємо

$\int y^2\,dy = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$, $\qquad \int y^2 dy = \int \frac{e^x dx}{1+\left(e^x\right)^2}$, $\qquad \frac{y^3}{3} = \operatorname{arctg} e^x + C$,

$y^3 = 3\operatorname{arctg} e^x + C$, звідки маємо загальний розв’язок $y = \sqrt[3]{3\operatorname{arctg} e^x + C}$. $\lrcorner$

11. $y\sqrt{1+x^2}\,y' + x\sqrt{1+y^2} = 0$, якщо $y\left(\sqrt{3}\right) = 0$.

$\ulcorner$ Розв’яжемо задане рівняння відносно y¢:

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+y^2}}{y}.$$

Отже, це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Підставимо y¢$= \frac{dy}{dx}$ і відокремимо змінні, помноживши рівняння на $\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dx$:

$$\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Звідси маємо

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + C \text{, або}$$

$$\sqrt{1+y^2} = C - \sqrt{1+x^2}. \qquad (*)$$

Знайдемо частинний інтеграл. За умовою задачі $y = 0$ при $x = \sqrt{3}$. Тому, підставляючи вказані значення y та x у формулу ($*$), знаходимо сталу C:

$$\sqrt{1+0^2} = C - \sqrt{1+3}, \quad 1+2 = C, \quad C = 3.$$

Отже, частинний інтеграл заданого рівняння має вигляд $\sqrt{1+y^2} = 3 - \sqrt{1+x^2}$. $\lrcorner$

12. $x^2\left(y^3+5\right)dx + \left(x^3+5\right)y^2 dy = 0$, якщо $y(0) = 1$.

$\ulcorner$ Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними виду (7).

$$\frac{y^2}{y^3+5}dy = -\frac{x^2}{x^3+5}dx, \quad \int \frac{y^2}{y^3+5}dy = -\int \frac{x^2}{x^3+5}dx,$$

$$\frac{1}{3}\ln\left|y^3+5\right| = -\frac{1}{3}\ln\left|x^3+5\right| + \frac{1}{3}\ln C\,, \quad \ln\left|y^3+5\right| = -\ln\left|x^3+5\right| + \ln C\,,$$

$$\ln\left|y^3+5\right| + \ln\left|x^3+5\right| = \ln C\,, \quad \ln\left|\left(y^3+5\right)\cdot\left(x^3+5\right)\right| = \ln C\,,$$

$$\left(y^3+5\right)\left(x^3+5\right) = C\,.$$

За умовою задачі $y=1$ при $x=0$. Тому маємо $C=\left(1^3+5\right)\left(0^3+5\right)=30$. Отже, частинний інтеграл рівняння – $\left(y^3+5\right)\left(x^3+5\right)=30$. ⌋

13. $\left(x^2+1\right)y'+2xy^2=0$, якщо $y(0)=1$.

⌈ $y'=-\dfrac{2xy^2}{x^2+1}$, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2xy^2}{x^2+1}$, $\dfrac{dy}{y^2}=-\dfrac{2x}{x^2+1}dx$,

$$\int\frac{dy}{y^2}=-\int\frac{2x}{x^2+1}dx\,, \quad \frac{-1}{y}=-\ln\left|x^2+1\right|+C\,,$$

$$\frac{1}{y}=\ln\left(x^2+1\right)+C\,,\ \text{звідки}\quad y=\frac{1}{\ln\left(x^2+1\right)+C}\,.$$

За умовою задачі $y=1$ при $x=0$. Тому

$$1=\frac{1}{\ln\left(0^2+1\right)+C}\,, \quad 1=\frac{1}{C}\,, \quad C=1.$$

Частинний розв’язок рівняння – $y=\dfrac{1}{\ln\left(x^2+1\right)+1}$. ⌋

Вправи для самостійного розв’язання

Розв’язати диференціальні рівняння:

14. $x^2y'+y=0$.

15. $y'=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y$.

16. $yy'=\dfrac{1-2x}{y}$.

17. $y'\left(x^2+1\right)=2xy$, якщо $y(0)=1$.

18. $y=2y'\sqrt{x}$, якщо $y(4)=1$.

19. $y'=(2y+1)\operatorname{ctg}x$, якщо $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Відповіді:

14. $y = Ce^{\frac{1}{x}}$.

15. $\sin y = \dfrac{C}{\cos x}$.

16. $y = \sqrt[3]{3\left(x - x^2 + C\right)}$.

17. $y = x^2 + 1$.

18. $y = e^{\sqrt{x}-2}$.

19. $y = \dfrac{1}{2}\left(4\sin^2 x - 1\right)$.

3. Однорідні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння $y' = f\left(x,\ y\right)$ називають *однорідним*, якщо функція $f\left(x,\ y\right)$ є *однорідною функцією нульового виміру*, тобто для будь-якого $t > 0$

$$f\left(tx,\ ty\right) = f\left(x,\ y\right). \tag{9}$$

Покладемо $t = \dfrac{1}{x}$: $f\left(tx,\ ty\right) = f\left(1,\ \dfrac{y}{x}\right) = g\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Тоді, з урахуванням (9), рівняння (2) запишеться у вигляді

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right). \tag{10}$$

Для розв’язання рівняння (10) введемо допоміжну невідому функцію $u = u\left(x\right)$, поклавши

$$\frac{y}{x} = u \quad \text{або}$$

$$y = ux, \tag{11}$$

і перетворимо однорідне рівняння у рівняння з відокремлюваними змінними. З (11) знаходимо $y' = u'x + u$. Тому рівняння (10) запишеться у вигляді

$$u + xu' = g\left(u\right), \quad \text{або} \quad x\frac{du}{dx} = g\left(u\right) - u.$$

Відокремимо змінні:

$$\frac{du}{g\left(u\right) - u} = \frac{dx}{x}. \tag{12}$$

Проінтегрувавши рівняння (12), одержимо $\int \frac{du}{g(u)-u} = \ln|x| + C$. Обчисливши інтеграл у лівій частині і підставивши замість u вираз $\frac{y}{x}$, отримаємо загальний інтеграл диференціального рівняння.

Розв’язати диференціальні рівняння:

20. $y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$.

⌈ Права частина даного рівняння – функція $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx, ty) = \frac{(tx)^2 + (ty)^2}{2(tx)^2} = \frac{t^2(x^2 + y^2)}{2t^2x^2} = \frac{x^2 + y^2}{2x^2} = f(x, y),$$

тобто має місце рівність (9).

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$:

$$u'x + u = \frac{x^2 + x^2u^2}{2x^2}, \quad u'x + u = \frac{x^2(1+u^2)}{2x^2}, \quad u'x + u = \frac{1+u^2}{2},$$

$$u'x = \frac{1+u^2}{2} - u, \qquad u'x = \frac{u^2 - 2u + 1}{2}, \qquad u'x = \frac{(u-1)^2}{2},$$

$$u' = \frac{(u-1)^2}{2} \cdot \frac{1}{x}. \tag{$*$}$$

Диференціальне рівняння $(*)$ – рівняння з відокремлюваними змінними. Розв’яжемо його:

$$\frac{du}{dx} = \frac{(u-1)^2}{2} \cdot \frac{1}{x}, \qquad \frac{2du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{2du}{(u-1)^2} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{-2}{u-1} = \ln|x| + \ln C, \quad \frac{-2}{u-1} = \ln C|x|.$$

Підставимо в отримане рівняння $u = \frac{y}{x}$:

$\frac{-2}{\frac{y}{x} - 1} = \ln C|x|$, $\quad \frac{-2x}{y - x} = \ln C|x|$, звідки знаходимо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння – $y = x - \dfrac{2x}{\ln C|x|}$. ⌋

21. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

⌈ Права частина рівняння – функція $f(x,\, y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx,\, ty) = \frac{tx+ty}{tx-ty} = \frac{t(x+y)}{t(x-y)} = \frac{x+y}{x-y} = f(x,\, y),$$

тобто має місце рівність (9).

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$.

$$u'x + u = \frac{x+ux}{x-ux}, \qquad u'x + u = \frac{x(1+u)}{x(1-u)}, \qquad u'x + u = \frac{1+u}{1-u},$$

$$u'x = \frac{1+u}{1-u} - u, \qquad u'x = \frac{1+u-u+u^2}{1-u}, \qquad u'x = \frac{u^2+1}{1-u},$$

$$u' = \frac{u^2+1}{1-u}\cdot\frac{1}{x}, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{u^2+1}{1-u}\cdot\frac{1}{x}, \qquad \frac{1-u}{u^2+1}\,du = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{1-u}{u^2+1}du = \int\frac{dx}{x}, \qquad \int\frac{du}{u^2+1} - \int\frac{udu}{u^2+1} = \int\frac{dx}{x},$$

$$\operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\ln\left|u^2+1\right| = \ln|x| + \ln C, \qquad \operatorname{arctg} u = \ln C|x| + \ln\sqrt{u^2+1},$$

$$\operatorname{arctg} u = \ln\left(C|x|\sqrt{u^2+1}\right), \qquad \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\left(C|x|\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1}\right),$$

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\left(C|x|\cdot\sqrt{\frac{y^2+x^2}{x^2}}\right), \text{ або } \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln C\sqrt{y^2+x^2}.$$ ⌋

22. $(x+y)dx - xdy = 0$.

⌈ $xdy = (x+y)dx$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x}$, $y' = \dfrac{x+y}{x}$.

Права частина рівняння – функція $f(x,\, y) = \dfrac{x+y}{x}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx,\ ty)=\frac{tx+ty}{tx}=\frac{t(x+y)}{tx}=\frac{x+y}{x}=f(x,\ y).$$

Застосуємо підстановку $y=ux$, $y'=u'x+u$.

$$u'x+u=\frac{x+ux}{x},\quad u'x+u=\frac{x(1+u)}{x},\quad u'x+u=1+u,\quad u'x=1,\quad u'=\frac{1}{x},$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x},\quad du=\frac{dx}{x},\quad \int du=\int\frac{dx}{x},\quad u=\ln|x|+\ln C,\quad u=\ln C|x|,$$

$\frac{y}{x}=\ln C|x|$, звідки маємо загальний розв'язок $y=x\ln C|x|$. ⌟

23. $\left(x^2-xy\right)dy+y^2dx=0$.

⌜ $\left(x^2-xy\right)dy=-y^2dx$, $\quad\frac{dy}{dx}=\frac{-y^2}{x^2-xy}$, $\quad y'=\frac{-y^2}{x^2-xy}$.

Права частина рівняння – функція $f(x,\ y)=\frac{-y^2}{x^2-xy}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx,\ ty)=\frac{-(ty)^2}{(tx)^2-txty}=\frac{-t^2y^2}{t^2\left(x^2-y^2\right)}=\frac{-y^2}{x^2-y^2}=f(x,\ y).$$

Застосуємо підстановку $y=ux$, $y'=u'x+u$.

$$u'x+u=\frac{-u^2x^2}{x^2-x\cdot ux},\quad u'x+u=\frac{-u^2x^2}{x^2(1-u)},\quad u'x+u=\frac{-u^2}{1-u},$$

$$u'x=\frac{-u^2}{1-u}-u,\quad u'x=\frac{-u^2-u+u^2}{1-u},\quad u'x=\frac{-u}{1-u},\quad u'x=\frac{u}{u-1},$$

$$u'=\frac{u}{u-1}\cdot\frac{1}{x},\quad \frac{du}{dx}=\frac{u}{u-1}\cdot\frac{1}{x},\quad \frac{u-1}{u}\cdot du=\frac{dx}{x},\quad \int\frac{u-1}{u}du=\int\frac{dx}{x},$$

$$\int du-\int\frac{du}{u}=\int\frac{dx}{x},\quad u-\ln|u|=\ln|x|+\ln C,\quad u=\ln C|x|+\ln|u|,$$

$u=\ln\left(C|xu|\right)$, $\frac{y}{x}=\ln\left(C\left|x\cdot\frac{y}{x}\right|\right)$, звідки $y=x\ln C|y|$. ⌟

24. $\left(2\sqrt{xy}-x\right)dy+ydx=0$.

⌜ $\left(2\sqrt{xy}-x\right)dy=-y\,dx$, $\quad\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{2\sqrt{xy}-x}$, $\quad y'=\frac{-y}{2\sqrt{xy}-x}$.

Права частина рівняння – функція $f\left(x,\, y\right)=\dfrac{-y}{2\sqrt{xy}-x}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f\left(tx,\, ty\right)=\frac{-ty}{2\sqrt{tx\,ty}-tx}=\frac{-ty}{2t\sqrt{xy}-tx}=\frac{-ty}{t\left(2\sqrt{xy}-x\right)}=\frac{-y}{2\sqrt{xy}-x}=$$

$$=f\left(x,\, y\right).$$

Застосуємо підстановку $y=ux$, $y'=u'x+u$.

$$u'x+u=\frac{-ux}{2\sqrt{x\cdot ux}-x},\quad u'x+u=\frac{-ux}{2x\sqrt{u}-x},\quad u'x+u=\frac{-ux}{x\left(2\sqrt{u}-1\right)},$$

$$u'x+u=\frac{-u}{2\sqrt{u}-1},\qquad u'x=\frac{-u}{2\sqrt{u}-1}-u,\qquad u'x=\frac{-u-2u\sqrt{u}+u}{2\sqrt{u}-1},$$

$$u'x=\frac{-2u\sqrt{u}}{2\sqrt{u}-1},\qquad u'=\frac{-2u\sqrt{u}}{2\sqrt{u}-1}\cdot\frac{1}{x},\qquad \frac{du}{dx}=\frac{-2u\sqrt{u}}{2\sqrt{u}-1}\cdot\frac{1}{x},$$

$$\frac{2\sqrt{u}-1}{-2u\sqrt{u}}du=\frac{dx}{x},\qquad \int\frac{2\sqrt{u}-1}{-2u\sqrt{u}}du=\int\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{2\sqrt{u}}{-2u\sqrt{u}}du+\int\frac{du}{2u\sqrt{u}}=\int\frac{dx}{x},\qquad -\int\frac{du}{u}+\frac{1}{2}\int u^{-\frac{3}{2}}du=\int\frac{dx}{x},$$

$$-\ln|u|-\frac{1}{\sqrt{u}}=\ln C|x|,\qquad \frac{-1}{\sqrt{u}}=\ln C|x\cdot u|,\qquad -\sqrt{\frac{x}{y}}=\ln C\left|x\cdot\frac{y}{x}\right|,$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}}+\ln C|y|=0.\quad ⌟$$

25. $y'=\dfrac{y}{x}+\sin\dfrac{y}{x}$.

⌜ Права частина рівняння – функція $f\left(x,\, y\right)=\dfrac{y}{x}+\sin\dfrac{y}{x}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f\left(tx,\, ty\right)=\frac{ty}{tx}+\sin\frac{ty}{tx}=\frac{y}{x}+\sin\frac{y}{x}=f\left(x,\, y\right).$$

Застосуємо підстановку $y=ux$, $y'=u'x+u$.

$$u'x+u=\frac{ux}{x}+\sin\frac{ux}{x},\qquad u'x+u=u+\sin u,\qquad u'x+u-u=\sin u,$$

$$u'x=\sin u\,,\qquad u'=\sin u\cdot\frac{1}{x}\,,\qquad \frac{du}{dx}=\sin u\cdot\frac{1}{x}\,,\qquad \frac{du}{\sin u}=\frac{dx}{x}\,,$$

$$\int\frac{du}{\sin u}=\int\frac{dx}{x}\,,\qquad \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right|=\ln C|x|\,,\qquad \operatorname{tg}\frac{u}{2}=Cx\,,$$

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2x}=Cx\,. \quad \lrcorner$$

Вправи для самостійного розв’язання

Розв’язати диференціальні рівняння:

26. $y'=\dfrac{y}{x}+5\cos^2\dfrac{y}{x}$.

27. $y'+\sqrt{4-\dfrac{y^2}{x^2}}=\dfrac{y}{x}$.

28. $xy'-y=\sqrt{y^2+2x^2}$.

29. $y'=\dfrac{y}{x}+\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$.

30. $\left(x^2+3xy+y^2\right)dx-x^2dy=0$.

31. $xy'=y\ln\dfrac{y}{x}$, якщо $y(1)=1$.

Відповіді:

26. $\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}=\ln C\left|x^5\right|$.

27. $\arcsin\dfrac{y}{2x}+\ln C|x|=0$.

28. $y=\dfrac{Cx^2}{2}-\dfrac{1}{C}$.

29. $\sin\dfrac{y}{x}=Cx$.

30. $y=-x\left(1+\dfrac{1}{\ln C|x|}\right)$.

31. $y=xe^{1-x}$.

4. Лінійні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння виду

$$y'+P(x)y=Q(x) \quad \text{або} \quad y'=-P(x)y+Q(x)\,, \tag{13}$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – неперервні функції на деякому інтервалі $(a,\,b)$, називається *лінійним диференціальним рівнянням першого порядку*.

У випадку, коли $P(x)=\pm Q(x)$ або $Q(x)=0$, рівняння (13) є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Є кілька методів розв'язання рівняння (13). Розглянемо один із них – *метод Бернуллі*. Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді добутку

$$y = u \cdot v\,, \tag{14}$$

де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – невідомі функції. Одну з цих функцій можна вибрати довільним чином, а інша визначається згідно з рівнянням (13).

Знаходимо похідну функції y: $y' = u'v + uv'$. Підставляючи y та y' в рівняння (13), отримаємо

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x),$$

$$u'v + u\left(v' + P(x)v\right) = Q(x)\,. \tag{15}$$

Виберемо функцію v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто

$$v' + P(x)v = 0\,. \tag{16}$$

Знаходимо v з рівняння (16), яке є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними:

$\dfrac{dv}{dx} = -P(x)v$, $\quad \dfrac{dv}{v} = -P(x)dx$, $\quad$ звідки $\ln|v| = -\int P(x)dx$, $\quad$ або

$v = e^{-\int P(x)dx}$. Під невизначеним інтегралом тут розуміємо одну з первісних функції $P(x)$.

Знаючи v, знаходимо u з рівняння $u'v = Q(x)$, яке випливає з (15) та (16):

$$v\frac{du}{dx} = Q(x), \qquad \frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v} = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx},$$

$$du = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\,, \qquad u = \int Q(x)e^{\int P(x)}dx + C\,.$$

Підставляємо знайдені функції u та v у формулу (14) і отримуємо загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння:

$$y = u \cdot v = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right). \tag{17}$$

При розв'язуванні конкретних задач простіше виконувати вказаний вище алгоритм, аніж застосовувати готову формулу (17).

Розв'язати диференціальні рівняння:

32. $y' - \dfrac{2}{x}y = 2x^3$.

Γ Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$ (див. формулу (14)). Тоді $y' = u'v + uv'$. Підставляємо y та y' у задане рівняння:

$$u'v + uv' - \frac{2uv}{x} = 2x^3,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = 2x^3. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб

$$v' - \frac{2v}{x} = 0. \qquad (**)$$

Знаходимо v:

$$v' = \frac{2v}{x}, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x}, \quad \int\frac{dv}{v} = 2\int\frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = 2\ln|x|,$$

$\ln|v| = \ln x^2$, звідки $v = x^2$.

Зауважимо, що оскільки в якості функції v ми вибираємо один з розв'язків рівняння $(**)$, то тут і надалі у методі Бернуллі, після інтегрування диференціального рівняння для знаходження v, покладаємо $C = 0$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u' \cdot x^2 = 2x^3$, $u' = \dfrac{2x^3}{x^2}$,

$$\frac{du}{dx} = 2x, \quad du = 2x\,dx, \quad \int du = \int 2x\,dx, \quad u = 2\cdot\frac{x^2}{2} + C, \quad u = x^2 + C.$$

За формулою (14) знаходимо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння – $y = uv = \left(x^2 + C\right)x^2$. $\lrcorner$

33. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x$.

Γ Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$. Тоді $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' + uv\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x,$$

$$u'v + u\left(v' + v\,\mathrm{tg}\,x\right) = \cos^2 x. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + v\,\mathrm{tg}\,x = 0$. Знаходимо v:

$$v' + v\,\mathrm{tg}\,x = 0, \quad \frac{dv}{dx} = -v\,\mathrm{tg}\,x, \quad \frac{dv}{v} = -\mathrm{tg}\,x\,dx, \quad \int\frac{dv}{v} = -\int\mathrm{tg}\,x\,dx,$$

$\ln|v| = \ln|\cos x|$, звідки $v = \cos x$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u'\cdot\cos x = \cos^2 x$, $u' = \dfrac{\cos^2 x}{\cos x}$,

$\dfrac{du}{dx} = \cos x$, $du = \cos x\,dx$, $\int du = \int\cos x\,dx$, звідки $u = \sin x + C$.

За формулою (14) маємо $y = uv = (\sin x + C)\cos x$. ⌋

34. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin 2x}{x}$.

⌈ Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$. Тоді $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{\sin 2x}{x},$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{\sin 2x}{x}. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + \dfrac{v}{x} = 0$. Знаходимо v:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \quad \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = -\ln|x|, \quad \ln|v| = \ln\frac{1}{|x|},$$

звідки $v = \dfrac{1}{x}$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u'\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{\sin 2x}{x}$, $u' = \dfrac{\sin 2x}{x}\cdot x$,

$\dfrac{du}{dx} = \sin 2x$, $du = \sin 2x\,dx$, $\int du = \int\sin 2x\,dx$, звідки $u = -\dfrac{1}{2}\cos 2x + C$.

За формулою (14) маємо $y = uv = \left(C - \dfrac{1}{2}\cos 2x\right)\dfrac{1}{x}$. ⌋

35. $xy' - y = x^2\cos x$.

⌈ Задане рівняння запишемо як $y' - \frac{y}{x} = x\cos x$. Отже, це лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$.

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x\cos x,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = x\cos x. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' - \frac{v}{x} = 0$. Знаходимо v:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = \ln|x|, \text{ звідки } v = x.$$

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u:

$$u'x = x\cos x, \quad u' = x\cos x \cdot \frac{1}{x},$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x, \quad du = \cos x\, dx, \quad \int du = \int \cos x\, dx, \quad u = \sin x + C.$$

За формулою (14) маємо $y = uv = (\sin x + C)x$. ⌋

36. $x^2 y' + 5xy + 4 = 0$.

⌈ $y' + \frac{5xy}{x^2} = -\frac{4}{x^2}$, $y' + \frac{5y}{x} = -\frac{4}{x^2}$, і, отже, маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$.

$$u'v + uv' + \frac{5uv}{x} = -\frac{4}{x^2},$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{5v}{x}\right) = -\frac{4}{x^2}. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + \frac{5v}{x} = 0$. Знаходимо v:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{5v}{x}, \qquad \frac{dv}{v} = -5\frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{dv}{v} = -5\int \frac{dx}{x}, \qquad \ln|v| = -5\ln|x|,$$

$\ln|v| = \ln \dfrac{1}{|x^5|}$, звідки $v = \dfrac{1}{x^5}$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u' \cdot \dfrac{1}{x^5} = -\dfrac{4}{x^2}$, $u' = -\dfrac{4}{x^2} \cdot x^5$, $\dfrac{du}{dx} = -4x^3$,

$$du = -4x^3 dx\,,\ \int du = -4\int x^3 dx\,,\ u = -4 \cdot \frac{x^4}{4} + C\,,\ u = -x^4 + C\,.$$

Отже, $y = uv = \dfrac{C - x^4}{x^5}$. $\lrcorner$

37. $y' - \dfrac{2x}{x^2+1} y = x\sqrt{x^2+1}$, якщо $y(0) = 2$.

$\ulcorner$ Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$.

$$u'v + uv' - \frac{2x}{x^2+1} uv = x\sqrt{x^2+1}\,,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{2x}{x^2+1} v \right) = x\sqrt{x^2+1}\,. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' - \dfrac{2xv}{x^2+1} = 0$. Знаходимо v:

$\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{2xv}{x^2+1}$, $\dfrac{dv}{v} = \dfrac{2x}{x^2+1} dx$, $\displaystyle\int \frac{dv}{v} = \int \frac{2x}{x^2+1} dx$, $\ln|v| = \ln\left|x^2+1\right|$, $v = x^2 + 1$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u'\left(x^2+1\right) = x\sqrt{x^2+1}$,

$$u' = x\sqrt{x^2+1} \cdot \frac{1}{x^2+1}\,,\quad \frac{du}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,,\quad du = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx\,,$$

$$\int du = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx\,,\quad u = \sqrt{x^2+1} + C\,.$$

Отже, $y = uv = \left(\sqrt{x^2+1} + C\right) \cdot \left(x^2+1\right)$.

Знайдемо частинний розв'язок. За умовою задачі $y = 2$ при $x = 0$. Тоді отримаємо $2 = (1 + C) \cdot 1$, $C = 1$. Отже, частинний розв'язок

$$y=\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(x^2+1\right), \quad y=\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}+x^2+1,$$

або $y=\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}+x^2+1$. ⌋

Вправи для самостійного розв'язання

Розв'язати диференціальні рівняння:

38. $y'-y\operatorname{ctg}x=\sin x$.

39. $\left(x^2+1\right)y'+4xy=3$.

40. $y'-y=e^x$.

41. $y'-\dfrac{y}{x\ln x}=x\ln x$.

42. $y'+y\operatorname{tg}x=\dfrac{1}{\cos x}$, якщо $y(0)=0$.

43. $\left(1-x^2\right)y'+xy=1$, якщо $y(0)=1$.

Відповіді:

38. $y=(C+x)\sin x$.

39. $y=\dfrac{x^3+3x+C}{x^2+1}$.

40. $y=e^x(C+x)$.

41. $y=\left(\dfrac{x^2}{2}+C\right)\cdot\ln x$.

42. $y=\dfrac{x}{\cos x}$.

43. $y=x+\sqrt{1-x^2}$.

5. Диференціальне рівняння Бернуллі

Рівняння виду

$$y'+P(x)y=Q(x)\cdot y^{\alpha} \text{ або } y'=-P(x)y+Q(x)\cdot y^{\alpha}, \qquad (18)$$

де функції $P(x)$ та $Q(x)$ неперервні на деякому інтервалі (a, b), $\alpha\in R$, причому $\alpha\neq 0$ і $\alpha\neq 1$, називається *рівнянням Бернуллі*.

При $\alpha=0$ рівняння (18) перетворюється в лінійне диференціальне рівняння $y'+P(x)y=Q(x)$, розглянуте раніше, а при $\alpha=1$ – в рівняння з відокремлюваними змінними $y'=\left(Q(x)-P(x)\right)y$.

Розв'язок рівняння Бернуллі зручно шукати у вигляді $y=u\cdot v$.

Розв'язати диференціальні рівняння:

44. $x^2y^2\dfrac{dy}{dx}+xy^3=a^2$ (a – стала).

⌜ $x^2y^2y'+xy^3=a^2$, $y^2y'+\dfrac{xy^3}{x^2}=\dfrac{a^2}{x^2}$, $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{a^2}{x^2y^2}$. Отже, це рівняння Бернуллі. Зробимо заміну $y=uv$.

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=\frac{a^2}{x^2u^2v^2},$$

$$u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=\frac{a^2}{x^2u^2v^2}. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v'+\dfrac{v}{x}=0$. Знаходимо v:

$$\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x},\ \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x},\ \ln|v|=-\ln|x|,\ v=\frac{1}{x}.$$

Підставляючи v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $\dfrac{du}{dx}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{a^2}{x^2\cdot u^2\,\dfrac{1}{x^2}}$, $\dfrac{du}{dx}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{a^2}{u^2}$, $u^2du=a^2xdx$,

$$\int u^2du=a^2\int x\,dx,\ \frac{u^3}{3}=a^2\left(\frac{x^2}{2}+C\right),\ u=\sqrt[3]{3a^2\left(\frac{x^2}{2}+C\right)}.$$

$$y=uv=\frac{1}{x}\sqrt[3]{3a^2\left(\frac{x^2}{2}+C\right)},\ \text{або}\ \ y^3=\frac{3}{2}\frac{a^2}{x}+\frac{C}{x^3}.\ ⌟$$

45. $y'+xy=3xy^3$.

⌜ Це рівняння Бернуллі. Зробимо заміну $y=uv$, $y'=u'v+uv'$.

$$u'v+uv'+xuv=3x(uv)^3,$$

$$u'v+u(v'+xv)=3x\cdot(vu)^3. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v'+xv=0$. Знаходимо v:

$$\frac{dv}{dx}=-xv,\ \frac{dv}{v}=-xdx,\ \int\frac{dv}{v}=-\int xdx,\ \ln|v|=-\frac{x^2}{2},\ v=e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Підставляючи v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u'e^{-\frac{x^2}{2}}=3xu^3\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^3$, $\dfrac{du}{dx}=3xe^{-x^2}u^3$;

$$\frac{du}{u^3}=3xe^{-x^2}dx\,,\qquad \int\frac{du}{u^3}=3\int xe^{-x^2}dx\,.$$

1) $\int\frac{du}{u^3}=\int u^{-3}du=-\frac{u^{-2}}{2}+C=-\frac{1}{2u^2}+C$;

2) $\int xe^{-x^2}dx=\begin{vmatrix} t=-x^2 \\ dt=-2xdx \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\int e^t dt=-\frac{1}{2}e^t+C=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$.

Отже, $\frac{1}{u^2}=\frac{3}{e^{x^2}}+C$, $\frac{1}{u^2}=3e^{-x^2}+C$, $u^2=\frac{e^{x^2}}{3+Ce^{x^2}}$, $u=\pm\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{3+Ce^{x^2}}}$.

$$y=uv=\pm\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{3+Ce^{x^2}}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}},\ \text{або}\quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{3+Ce^{x^2}}}\,.\ \lrcorner$$

Вправи для самостійного розв’язання

Розв’язати диференціальні рівняння:

46. $y'-\frac{1}{x}y=-y^2$.

47. $y'+\frac{2y}{x}=y^2x$.

48. $y'+2xy=2y^3x^3$.

Відповіді:

46. $y=\frac{2x}{x^2+C}$.

47. $y=\frac{-1}{x^2\ln C|x|}$.

48. $\frac{1}{y^2}=Ce^{2x^2}+x^2+\frac{1}{2}$.

6. Класифікація диференціальних рівнянь першого порядку

При розв’язанні диференціальних рівнянь першого порядку найпершим (і принциповим) кроком є визначення типу рівняння. Від цього у великій мірі залежить можливість розв’язання диференціального рівняння. Тому слід запам’ятати основні типи диференціальних рівнянь першого порядку, які класифіковано у наступній таблиці:

№ п/п	*Вид рівняння*	*Назва диференціального рівняння*
I	$y' = f(x)$	Найпростіше рівняння
II	$y' = f(x) \cdot g(y)$	Рівняння з відокремлюваними змінними
III	$y' = f(x, y)$, де $f(x, y)$ – однорідна функція нульового виміру	Однорідне рівняння
IV	$y' = -P(x)y + Q(x)$	Лінійне рівняння
V	$y' = -P(x)y + Q(x)y^{\alpha}$	Рівняння Бернуллі

Зручно звести диференціальне рівняння першого порядку до виду $y' = f(x, y)$, а потім за даною класифікацією визначити тип рівняння і тільки після цього розв'язувати його відповідним методом.

Диференціальне рівняння може належати одночасно до кількох типів. Наприклад, рівняння $y' = \frac{y}{x}$ відноситься до усіх типів, крім першого. Але найпростіше його розв'язувати як диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними (див. приклад **8**).

Розв'язати диференціальні рівняння.

49. $y' = 5\sqrt{y}$, якщо $y(0) = 25$.

⌜ Це рівняння виду II – рівняння з відокремлюваними змінними. Так як $y' = \frac{dy}{dx}$, то маємо $\frac{dy}{dx} = 5\sqrt{y}$, $\frac{dy}{\sqrt{y}} = 5dx$, $\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = 5\int dx$,

$$2\sqrt{y} = 5(x + C), \text{ або } \sqrt{y} = \frac{5}{2}(x + C).$$

Знайдемо частинний інтеграл. За умовою задачі $y = 25$ при $x = 0$. Тому

$$\sqrt{25} = \frac{5}{2}(0 + C), \quad C = 2.$$

Отже, маємо частинний інтеграл $\sqrt{y} = \frac{5}{2}(x + 2)$.. ⌟

50. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

$\ulcorner$ Маємо рівняння виду IV – лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$, $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' + 2uvx = 2xe^{-x^2},$$

$$u'v + u\left(v' + 2vx\right) = 2xe^{-x^2}. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + 2vx = 0$. Знаходимо v:

$$\frac{dv}{dx} = -2vx, \quad \frac{dv}{v} = -2x\,dx, \quad \int\frac{dv}{v} = -2\int x\,dx, \quad \ln|v| = -x^2, \quad v = e^{-x^2}.$$

Підставляючи v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u'v = 2xe^{-x^2}$, $\dfrac{du}{dx}e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}$, $du = \dfrac{2xe^{-x^2}dx}{e^{-x^2}}$,

$$\int du = 2\int x\,dx, \quad u = 2\frac{x^2}{2} + C, \quad u = x^2 + C.$$

$$y = uv = \left(x^2 + C\right)e^{-x^2}. \quad \lrcorner$$

51. $y' = \dfrac{4}{x^2 + 9}$.

$\ulcorner$ Це рівняння виду I – найпростіше рівняння. Так як $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то маємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x^2 + 9}, \quad dy = \frac{4}{x^2 + 9}dx, \quad \int dy = 4\int\frac{dx}{x^2 + 3^2},$$

$$y = \frac{4}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C. \quad \lrcorner$$

52. $\left(x^2 + 2xy\right)dx + xydy = 0$.

$\ulcorner$ $xy\,dy = -\left(x^2 + 2xy\right)dx$, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\left(x^2 + 2xy\right)}{xy}$, $y' = \dfrac{-x\left(x + 2y\right)}{xy}$,

$$y' = \frac{-\left(x + 2y\right)}{y}.$$

Це рівняння виду III – однорідне диференціальне рівняння. Дійсно, права частина рівняння – функція $f\left(x,\, y\right) = -\dfrac{\left(x + 2y\right)}{y}$ є однорідною функцією нульового виміру:

$$f\left(tx,\,ty\right)=-\frac{\left(tx+2ty\right)}{ty}=\frac{-t\left(x+2y\right)}{ty}=\frac{-\left(x+2y\right)}{y}=f\left(x,\,y\right).$$

Застосуємо підстановку $y=ux$, $y'=u'x+u$.

$$u'x+u=-\frac{\left(x+2ux\right)}{ux},\quad u'x+u=-\frac{x\left(1+2u\right)}{ux},\quad u'x+u=-\frac{\left(1+2u\right)}{u},$$

$$u'x=\frac{-\left(1+2u\right)}{u}-u,\quad u'x=-\frac{\left(1+2u\right)+u^2}{u},\quad x\frac{du}{dx}=-\frac{\left(u^2+2u+1\right)}{u},$$

$$\frac{u\,du}{-\left(u+1\right)^2}=\frac{dx}{x},\quad -\int\frac{u\,du}{\left(u+1\right)^2}=\int\frac{dx}{x},\quad -\int\frac{u+1-1}{\left(u+1\right)^2}du=\int\frac{dx}{x},$$

$$-\int\frac{u+1}{\left(u+1\right)^2}du+\int\frac{du}{\left(u+1\right)^2}=\int\frac{dx}{x},\quad -\ln\left|u+1\right|-\frac{1}{u+1}=\ln C\left|x\right|,$$

$$\ln\left|\frac{y}{x}+1\right|+\frac{1}{\frac{y}{x}+1}=-\ln C\left|x\right|,\ \text{або}\ \ln\left|\frac{y+x}{x}\right|+\frac{x}{y+x}=-\ln C\left|x\right|.\ \lrcorner$$

53. $y'=\dfrac{y+5}{\sqrt{16-x^2}}$.

⌐ Це рівняння виду як II $\left(y'=\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}\left(y+5\right)\right)$, так і III $\left(y'=\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}y+\dfrac{5}{\sqrt{16-x^2}}\right)$. Але простіше його розв'язувати як рівняння з відокремлюваними змінними. Так як $y'=\dfrac{dy}{dx}$, то маємо

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+5}{\sqrt{16-x^2}},\quad \frac{dy}{y+5}=\frac{dx}{\sqrt{4^2-x^2}},\quad \int\frac{dy}{y+5}=\int\frac{dx}{\sqrt{4^2-x^2}},$$

$\ln\left|y+5\right|=\arcsin\dfrac{x}{4}+C$, $\quad y+5=\pm e^{\arcsin\frac{x}{4}+C}$, звідки маємо загальний розв'язок $\quad y=Ce^{\arcsin\frac{x}{4}}-5$. $\lrcorner$

54. $xy'-y\left(2y\ln x-1\right)=0$.

Γ Запишемо задане рівняння як $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{2\ln x}{x} \cdot y^2$. Маємо рівняння виду V – рівняння Бернуллі. Зробимо заміну $y = uv$, $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{2\ln x}{x}(uv)^2,$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{2\ln x}{x}(uv)^2. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + \dfrac{v}{x} = 0$. Знаходимо v:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = -\ln|x|, \quad v = \frac{1}{x}.$$

Підставляючи v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $\dfrac{du}{dx}\dfrac{1}{x} = \dfrac{2\ln x}{x}u^2\dfrac{1}{x^2}$, $\dfrac{du}{u^2} = \dfrac{2\ln x}{x^2}dx$,

$$\int \frac{du}{u^2} = 2\int \frac{\ln x}{x^2}dx, \quad -\frac{1}{u} = 2\int \frac{\ln x}{x^2}dx.$$

Обчислимо інтеграл:

$$\int \frac{\ln x}{x^2}dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \dfrac{dx}{x^2}, & v = -\dfrac{1}{x} \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x}\frac{dx}{x} = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.$$

Отже, $-\dfrac{1}{u} = -2\left(\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{x} + C\right)$, звідки $u = \dfrac{1}{\dfrac{2\ln x}{x} + \dfrac{2}{x} + C}$.

Запишемо загальний розв’язок

$$y = uv = \frac{1}{\dfrac{2\ln x}{x} + \dfrac{2}{x} + C}\,\frac{1}{x}, \text{ або } \quad y = \frac{1}{2\ln x + Cx + 2}. \quad \lrcorner$$

55. $xy' - 4y = x^2 \cdot \sqrt{y}$.

Γ Запишемо задане рівняння як $y' - \dfrac{4y}{x} = x\sqrt{y}$. Маємо рівняння виду V – рівняння Бернуллі з $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Зробимо заміну $y = uv$.

$$u'v + uv' - \frac{4uv}{x} = x\sqrt{uv} \,,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{4v}{x}\right) = x\sqrt{uv} \,. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{4v}{x}$. Знаходимо v :

$\dfrac{dv}{v} = \dfrac{4dx}{x}$, $\displaystyle\int \frac{dv}{v} = 4\int \frac{dx}{x}$, $\ln|v| = 4\ln|x|$, звідки $v = x^4$.

Підставляючи v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u : $\dfrac{du}{dx} \cdot x^4 = x\sqrt{u} \cdot \sqrt{x^4}$, $\dfrac{du}{\sqrt{u}} = \dfrac{x^3dx}{x^4}$, $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int \frac{dx}{x}$,

$2\sqrt{u} = \ln|x| + \ln C$, $2\sqrt{u} = \ln C|x|$, $\sqrt{u} = \dfrac{1}{2}\ln C|x|$.

Отже, $\sqrt{y} = \sqrt{u}\,\sqrt{v} = \dfrac{1}{2}x^2 \ln C|x|$. $\lrcorner$

56. $\left(1 + x^2\right)dy + y\,dx = 0$, якщо $y(0) = 1$.

Γ $\left(1 + x^2\right)\dfrac{dy}{dx} + y = 0$, $\left(1 + x^2\right) \cdot y' = -y$, $y' = -\dfrac{y}{1 + x^2}$. Це рівняння виду II – з відокремлюваними змінними. Маємо

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{1 + x^2}$, $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{1 + x^2}$, $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{1 + x^2}$, $\ln|y| = -\mathrm{arctg}\, x + C$,

звідки $y = \pm e^{-\mathrm{arctg}\, x + C}$, або $y = Ce^{-\mathrm{arctg}\, x}$ – загальний розв'язок заданого диференціального рівняння.

Знайдемо частинний розв'язок. За умовою задачі $y = 1$ при $x = 0$: $1 = Ce^{-\mathrm{arctg}\, 0}$, $C = 1$. Отже, маємо частинний розв'язок $y = e^{-\mathrm{arctg}\, x}$. $\lrcorner$

57. $y' = \dfrac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}$.

Γ Це диференціальне рівняння виду III. Дійсно, права частина даного рівняння є однорідною функцією нульового виміру:

$$f\left(tx,\, ty\right)=\frac{txty-t^2y^2}{t^2x^2-2txty}=\frac{t^2\left(xy-y^2\right)}{t^2\left(x^2-2xy\right)}=\frac{xy-y^2}{x^2-2xy}=f\left(x,\, y\right).$$

Застосувавши підстановку $y=ux$, $y'=u'x+u$, дістанемо

$$u'x+u=\frac{xux-u^2x^2}{x^2-2xux},\quad u'x+u=\frac{x^2\left(u-u^2\right)}{x^2\left(1-2u\right)},\quad u'x+u=\frac{u-u^2}{1-2u},$$

$$u'x=\frac{u-u^2}{1-2u}-u,\quad u'x=\frac{u-u^2-u+2u^2}{1-2u},\quad \frac{du}{dx}x=\frac{u^2}{1-2u},$$

$$\frac{1-2u}{u^2}du=\frac{dx}{x},\quad \int\frac{1-2u}{u^2}du=\int\frac{dx}{x},\quad \int\frac{du}{u^2}-2\int\frac{du}{u}=\int\frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{u}-2\ln|u|=\ln|x|-\ln C,\quad \frac{1}{u}+2\ln|u|=\ln\frac{C}{|x|},\quad \frac{1}{u}=\ln\frac{C}{xu^2},$$

$$\frac{x}{y}=\ln\frac{Cx}{y^2}.\quad \lrcorner$$

58. $dy-e^{-x}dx+y\,dx-x\,dy=xy\,dx$, якщо $y\left(0\right)=\ln 5$.

Γ Перетворимо рівняння, виділивши похідну:

$$dy-x\,dy=xy\,dx+e^{-x}dx-y\,dx,$$

$$\left(1-x\right)dy=\left(xy+e^{-x}-y\right)dx.$$

Помноживши обидві частини рівняння на $\dfrac{1}{\left(1-x\right)dx}$, одержимо

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy+e^{-x}-y}{1-x},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y\left(x-1\right)+e^{-x}}{1-x},\quad \frac{dy}{dx}=-y+\frac{e^{-x}}{1-x},$$

$$y'+y=\frac{e^{-x}}{1-x}.$$

Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку (рівняння виду IV).

Використаємо підстановку $y=uv$, $y'=u'v+uv'$.

$$u'v+uv'+uv=\frac{e^{-x}}{1-x},$$

$$u'v + u\left(v' + v\right) = \frac{e^{-x}}{1-x}. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + v = 0$. Знаходимо v:

$\frac{dv}{v} = -dx$, $\int \frac{dv}{v} = -\int dx$, $\ln|v| = -x$, $v = e^{-x}$.

Підставляючи функцію v в рівняння $(*)$, одержимо рівняння для знаходження u: $\frac{du}{dx} e^{-x} = \frac{e^{-x}}{1-x}$, $du = \frac{dx}{1-x}$, $\int du = \int \frac{dx}{1-x}$,

$u = -\ln|1-x| + \ln C$, $u = \ln \frac{C}{|1-x|}$.

Тоді $y = uv = e^{-x} \ln \frac{C}{|1-x|}$ – загальний розв’язок рівняння.

Знайдемо частинний розв’язок, підставивши в загальний розв’язок початкову умову $y = \ln 5$ при $x = 0$. Таким чином, матимемо $\ln 5 = \frac{1}{e} \ln \frac{C}{1-0}$, $\ln 5 = \ln C$, $C = 5$. Частинним розв’язком буде

$y = e^{-x} \ln \frac{5}{|1-x|}$. ⌋

59. $y' = 2\sqrt{y} \ln x$, якщо $y(e) = 1$.

⌈ Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними (рівняння виду II).

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} \ln x, \quad \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \ln x \, dx, \quad \int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int \ln x \, dx.$$

Обчислимо $\int \ln x \, dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, \ du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx, \ v = x \end{vmatrix} = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C$.

Враховуючи, що $\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \sqrt{y} + C$, маємо загальний інтеграл $\sqrt{y} = x \ln x - x + C$.

Знайдемо частинний розв’язок. За умовою задачі $y = 1$ при $x = e$. Тому $1 = e \ln e - e + C$, $1 = e - e + C$, звідки $C = 1$. Отже , частинний інтеграл – $\sqrt{y} = x \ln x - x + 1$. ⌋

60. $y' - 3x^2 y - x^2 e^{x^3} = 0$, якщо $y(0) = 0$.

⌈ $y' - 3x^2 y = x^2 e^{x^3}$. Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку (рівняння виду IV). Використовуючи підстановку $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, одержимо

$$u'v + uv' - 3x^2 uv = x^2 e^{x^3},$$

$$u'v + u\left(v' - 3x^2 v\right) = x^2 e^{x^3}. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' - 3x^2 v = 0$. Визначаємо v:

$\frac{dv}{dx} = 3x^2 v$, $\frac{dv}{v} = 3x^2 dx$, $\int \frac{dv}{v} = 3\int x^2 dx$, $\ln|v| = x^3$, $v = e^{x^3}$.

Підставляючи v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для визначення u: $\frac{du}{dx} e^{x^3} = x^2 e^{x^3}$, $\frac{du}{dx} = x^2$, $du = x^2 dx$,

$$\int du = \int x^2 dx, \quad u = \frac{x^3}{3} + C.$$

Тоді $y = uv = \left(\frac{x^3}{3} + C\right) e^{x^3}$.

Підставимо початкову умову $y = 0$ при $x = 0$ у загальний розв'язок рівняння: $0 = (0 + C)e^0$, звідки $C = 0$. Отже, частинний розв'язок заданого диференціального рівняння – $y = \left(\frac{x^3}{3} + 0\right) e^{x^3}$, або $y = \frac{x^3}{3} e^{x^3}$. ⌋

61. $\left(x^2 + y^2\right) dx + 4xy\, dy = 0$.

⌈ $4xy\, dy = -\left(x^2 + y^2\right) dx$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + y^2}{4xy}$, $y' = -\frac{x^2 + y^2}{4xy}$. Маємо однорідне диференціальне рівняння (рівняння виду III). Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$. Тоді

$$u'x + u = -\frac{x^2 + u^2 x^2}{4xux}, \quad u'x + u = -\frac{x^2\left(1 + u^2\right)}{x^2 4u}, \quad u'x + u = -\frac{1 + u^2}{4u},$$

$$u'x = -\frac{1+u^2}{4u} - u\,,\quad u'x = -\frac{1+5u^2}{4u}\,,\quad \frac{du}{dx}x = -\frac{1+5u^2}{4u}\,,$$

$$\frac{4u\,du}{5u^2+1} = -\frac{dx}{x},\quad 4\int\frac{u\,du}{5u^2+1} = -\int\frac{dx}{x},\quad \frac{4}{10}\int\frac{d\left(5u^2+1\right)}{5u^2+1} = -\ln|x| + \ln C\,,$$

$$\frac{2}{5}\ln\left|5u^2+1\right| = \ln\frac{C}{|x|},\quad \ln\left|5u^2+1\right|^{\frac{2}{5}} = \ln\frac{C}{|x|},\quad \left(5u^2+1\right)^{\frac{2}{5}} = \frac{C}{x},\ \text{або}$$

$$\left(5\frac{y^2}{x^2}+1\right)^{\frac{2}{5}} = \frac{C}{x}\,.\quad \lrcorner$$

62. $\left(x+1\right)y' + y = x^3 + x^2$, якщо $y\left(0\right) = 0$.

$$\ulcorner \qquad y' + \frac{y}{x+1} = \frac{x^3+x^2}{x+1}\,,\qquad y' + \frac{y}{x+1} = \frac{x^2\left(x+1\right)}{x+1}\,,\qquad y' + \frac{y}{x+1} = x^2\,.$$

Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку (рівняння виду IV). Використаємо підстановку $y = uv$.

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x+1} = x^2\,,$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x+1}\right) = x^2\,. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + \dfrac{v}{x+1} = 0$. Визначаємо v:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x+1},\qquad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x+1},\qquad \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x+1}\,,\qquad \ln|v| = -\ln|x+1|\,,$$

$$\ln|v| = \ln\frac{1}{|x+1|}\,,\quad v = \frac{1}{x+1}\,.$$

Підставляючи v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для визначення u: :

$$\frac{du}{dx}\frac{1}{x+1} = x^2\,,\quad du = \left(x+1\right)x^2dx\,,\quad \int du = \int\left(x^3+x^2\right)dx\,,$$

$$u = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C\,.$$

Тоді $y = uv = \left(\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} + C\right)\dfrac{1}{x+1}$ – загальний розв’язок рівняння.

Підставимо початкову умову $y=0$ при $x=0$ у загальний розв'язок рівняння: $0=\left(\frac{0^4}{4}+\frac{0^3}{3}+C\right)\frac{1}{0+1}$, $C=0$.

Отже, маємо частинний розв'язок

$$y=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right)\frac{1}{x+1}, \text{ або } y=\frac{3x^4+4x^3}{12(x+1)}. \quad \lrcorner$$

63. $\sec^2 x\operatorname{tg} y\,dx+\sec^2 y\operatorname{tg} x\,dy=0$.

$\ulcorner$ $\sec^2 y\operatorname{tg} x dy=-\sec^2 x\operatorname{tg} y\,dx$, $\sec^2 y\operatorname{tg} x\frac{dy}{dx}=-\sec^2 x\operatorname{tg} y$,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sec^2 x\cdot\operatorname{tg} y}{\sec^2 y\cdot\operatorname{tg} x}, \quad y'=-\frac{\sec^2 x\cdot\operatorname{tg} y}{\sec^2 y\cdot\operatorname{tg} x}.$$

Це рівняння виду II – рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sec^2 x\cdot\operatorname{tg} y}{\sec^2 y\cdot\operatorname{tg} x}, \quad \frac{\sec^2 y}{\operatorname{tg} y}dy=-\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}dx.$$

Враховуючи, що $\sec^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$, $\sec^2 y=\frac{1}{\cos^2 y}$, дістанемо

$$\frac{dy}{\operatorname{tg} y\cdot\cos^2 y}=-\frac{dx}{\operatorname{tg} x\cdot\cos^2 x}, \quad \int\frac{dy}{\operatorname{tg} y\cdot\cos^2 y}=-\int\frac{dx}{\operatorname{tg} x\cdot\cos^2 x},$$

$$\ln|\operatorname{tg} y|=-\ln|\operatorname{tg} x|+\ln C, \ \ln|\operatorname{tg} y\operatorname{tg} x|=\ln C, \text{ або } \operatorname{tg} y\operatorname{tg} x=C. \quad \lrcorner$$

64. $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}+1$.

$\ulcorner$ Це однорідне диференціальне рівняння (рівняння виду III). Дійсно,

$$f(tx,\,ty)=e^{\frac{ty}{tx}}+\frac{ty}{tx}+1=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}+1=f(x,\,y).$$

Застосуємо підстановку $y=ux$, $y'=u'x+u$:

$$u'x+u=e^{\frac{ux}{x}}+\frac{ux}{x}+1, \ u'x+u=e^u+u+1, \ u'x=e^u+1,$$

$$\frac{du}{dx}x=e^u+1, \ \frac{du}{e^u+1}=\frac{dx}{x}, \ \int\frac{du}{e^u+1}=\int\frac{dx}{x}, \ \int\frac{e^u+1-e^u}{e^u+1}du=\int\frac{dx}{x},$$

$$\int du-\int\frac{e^u du}{e^u+1}=\int\frac{dx}{x},\quad u-\ln\left|e^u+1\right|=\ln|x|+\ln C,$$

$$\frac{y}{x}-\ln\left(e^{y/x}+1\right)=\ln C|x|. \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Розв’язати диференціальні рівняння:

65. $\left(1+e^{3y}\right)xdx=e^{3y}dy$.

66. $y'=\dfrac{\cos^2 y}{x^2+4}$.

67. $y'-\dfrac{y}{x+2}=x^2+4x+5$, якщо $y(-1)=\dfrac{3}{2}$.

68. $\left(y^2-2xy\right)dx+x^2dy=0$.

69. $xy^2y'=x^2+y^3$.

70. $y'=e^{x^2}x\left(1+y^2\right)$.

71. $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{y^2}{x^2}e^{\frac{x}{y}}$.

72. $y'=\dfrac{\sqrt{16-y^2}}{2x+3}$.

73. $y'-2xy=1-2x^2$, якщо $y(0)=2$.

74. $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x^2}{y}$.

75. $y'\sin x=y\cos x+2\cos x$.

76. $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}$.

77. $x^2y'+xy+1=0$.

78. $y'\sqrt{1-x^2}-\cos^2 y=0$.

79. $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$.

80. $xy'+y=\ln x+1$.

Відповіді:

65. $\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{1}{3}\ln\left(1+e^{3y}\right)+C$.

66. $\operatorname{tg} y=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}+C$.

67. $y=(x+2)+\dfrac{(x+2)^3}{2}+(x+2)\ln(x+2)$.

68. $\dfrac{y}{x-y}=Cx$.

69. $y^3=Cx^3-3x^2$.

70. $\operatorname{arctg} y = C + \frac{1}{2} e^{x^2}$.

71. $y = -\frac{x}{\ln \ln C|x|}$.

72. $\arcsin \frac{y}{4} = \frac{1}{2} \ln|2x+3| + C$.

73. $y = 2e^{x^2} + x$.

74. $y = x\sqrt{2x+C}$.

75. $y = C \sin x - 2$.

76. $y = -x \ln \ln C|x|$.

77. $y = \frac{1}{x}\left(C - \ln|x|\right)$.

78. $\operatorname{tg} y = \arcsin x + C$.

79. $\arcsin \frac{y}{x} = \ln C|x|$.

80. $y = \ln|x| + \frac{C}{x}$.

7. Диференціальні рівняння другого порядку. Основні поняття

Диференціальним рівнянням другого порядку називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну x, невідому функцію y та першу і другу похідні цієї функції:

$$F\left(x, y, y', y''\right) = 0, \tag{19}$$

або

$$y'' = f\left(x, y, y'\right). \tag{20}$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння (19) (або (20)) є функція $y = \varphi\left(x, C_1, C_2\right)$, яка перетворює диференціальне рівняння в тотожність при довільних фіксованих значеннях сталих C_1 та C_2.

Будь-який *частинний розв'язок* диференціального рівняння другого порядку одержується із загального розв'язку накладанням на нього *початкових умов задачі Коші* у точці x_0:

$$y\left(x_0\right) = y_0 \quad \text{і} \quad y'\left(x_0\right) = y'_0. \tag{21}$$

При цьому сталі C_1 і C_2 будуть мати конкретні значення C_1^0 і C_2^0.

Найпростіше диференціальне рівняння другого порядку має вигляд

$$y'' = f\left(x\right), \tag{22}$$

де функція $f\left(x\right)$ – задана.

Розв'яжемо рівняння (22). За означенням другої похідної

$y'' = (y')' = \frac{d(y')}{dx}$. Тоді маємо $\frac{d(y')}{dx} = f(x)$. Звідси $d(y') = f(x)dx$ і $y' = \int f(x)dx + C_1$, де C_1 – довільна стала. Аналогічно знаходимо

$\frac{dy}{dx} = \int f(x)dx + C_1$ або $dy = \left(\int f(x)dx + C_1\right)dx$, звідки

$$y = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1x + C_2. \qquad (23)$$

Це і є загальний розв'язок диференціального рівняння (22).

Розв'язати диференціальні рівняння.

81. $y'' = 12x^2 - 6x + 8$.

⌐ Маємо рівняння виду (22). Послідовно дістанемо $\frac{d(y')}{dx} = 12x^2 - 6x + 8$, $d(y') = (12x^2 - 6x + 8)dx$,

$$y' = \int(12x^2 - 6x + 8)dx = 12\frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} + 8x + C_1 = 4x^3 - 3x^2 + 8x + C_1.$$

Отже, $y' = 4x^3 - 3x^2 + 8x + C_1$, $dy = (4x^3 - 3x^2 + 8x + C_1)dx$,

$$y = \int(4x^3 - 3x^2 + 8x + C_1)dx = 4\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 8\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2.$$

Отримали розв'язок виду (23).

Отже, $y = x^4 - x^3 + 4x^2 + C_1x + C_2$. ⌟

82. $y'' = \sin 5x$, якщо $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

⌐ Спочатку знайдемо загальний розв'язок заданого рівняння. Це рівняння виду (22). Послідовно дістанемо $\frac{d(y')}{dx} = \sin 5x$,

$$d(y') = \sin 5x\,dx, \quad y' = \int \sin 5x\,dx = \frac{1}{5}\int \sin 5x\,d(5x) = -\frac{1}{5}\cos 5x + C_1.$$

Остаточно маємо $y' = -\frac{1}{5}\cos 5x + C_1$, $dy = \left(-\frac{1}{5}\cos 5x + C_1\right)dx$,

$$y = \int\left(-\frac{1}{5}\cos 5x + C_1\right)dx = -\frac{1}{25}\sin 5x + C_1x + C_2.$$

Знайдемо розв'язок задачі Коші з умовами $y(0) = 2$ і $y'(0) = -1$:

$$\begin{cases} y(0) = -\frac{1}{25}\sin 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 2 \\ y'(0) = -\frac{1}{5}\cos 0 + C_1 = -1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = 2 \\ -\frac{1}{5} + C_1 = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} C_2 = 2 \\ C_1 = -1 + \frac{1}{5} = -\frac{4}{5}. \end{cases}$$

Отже, $y = -\frac{1}{25}\sin 5x - \frac{4}{5}x + 2$. ┘

Вправи для самостійного розв'язання

Розв'язати диференціальні рівняння:

83. $y'' = 120x^4 + 4$, якщо $y(1) = -10$, $y'(1) = 3$.

84. $y'' = \dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

85. $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Відповіді:

83. $y = 4x^6 + 2x^2 - 25x + 9$. **84.** $y = \arcsin x + C_1 x + C_2$.

85. $y = -\ln|\cos x| + C_1 x + C_2$.

8. Диференціальні рівняння другого порядку, які допускають пониження порядку

Одним із методів розв'язування диференціальних рівнянь другого порядку є метод пониження порядку. Він полягає в тому, що за допомогою відповідної заміни змінної дане диференціальне рівняння зводиться до диференціального рівняння першого порядку.

Розглянемо два типи таких диференціальних рівнянь.

1°. Нехай задано диференціальне рівняння другого порядку виду

$$F(x, y', y'') = 0, \tag{24}$$

або

$$y'' = f(x, y'), \tag{25}$$

яке не містить явно шуканої функції $y = y(x)$.

Зробимо заміну $y' = z(x)$, тоді $y'' = z'$. Дістанемо диференціальне рівняння першого порядку

$$F(x, z, z') = 0, \text{ або } \quad z' = f(x, z), \qquad (26)$$

Якщо вдається знайти загальний розв'язок $z = z(x, C_1)$ рівняння (26), то отримаємо диференціальне рівняння першого порядку $y' = z(x, C_1)$. Звідси маємо загальний розв'язок $y = \int z(x, C_1)\,dx + C_2$.

Розв'язати диференціальні рівняння:

86. $y'' = -\dfrac{4}{x}y' + \dfrac{1}{x^6}$, якщо $y(-1) = \dfrac{1}{4}$, $y'(-1) = 4$.

Γ Маємо рівняння виду (25). Зробимо заміну $y' = z$. Тоді $y'' = z'$. Дістанемо рівняння $z' = -\dfrac{4}{x}z + \dfrac{1}{x^6}$. Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Розв'язуємо його за методом Бернуллі: $z = u(x)\cdot v(x)$, $z' = u'v + uv'$. Тоді

$$u'v + uv' + \frac{4}{x}uv = \frac{1}{x^6},$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{4}{x}v\right) = \frac{1}{x^6}. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, $v' + \dfrac{4}{x}v = 0$. Знаходимо v:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{4}{x}v, \ \frac{dv}{v} = -\frac{4}{x}dx, \ \int\frac{dv}{v} = -4\int\frac{dx}{x}, \ \ln|v| = -4\ln|x|,$$

$$\ln|v| = \ln\frac{1}{x^4}, \ v = \frac{1}{x^4}.$$

Підставляючи функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u:

$$u'\cdot\frac{1}{x^4} = \frac{1}{x^6}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2}, \quad du = \frac{dx}{x^2}, \quad u = \int\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C_1.$$

Тоді $z = u\cdot v = \dfrac{1}{x^4}\cdot\left(-\dfrac{1}{x} + C_1\right) = \dfrac{C_1}{x^4} - \dfrac{1}{x^5}$.

Але $z = y'$. Тому маємо: $\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{x^4} - \frac{1}{x^5}$, $dy = \left(\frac{C_1}{x^4} - \frac{1}{x^5}\right)dx$,

$$y = \int\left(\frac{C_1}{x^4} - \frac{1}{x^5}\right)dx = C_1\int x^{-4}dx - \int x^{-5}dx = C_1 \cdot \frac{x^{-3}}{-3} - \frac{x^{-4}}{-4} + C_2 = \frac{1}{4x^4} - \frac{C_1}{3x^3} + C_2 .$$

Маємо загальний розв’язок рівняння $y = \frac{1}{4x^4} - \frac{C_1}{3x^3} + C_2$.

Знайдемо частинний розв’язок. З умови задачі Коші $y(-1) = \frac{1}{4}$, $y'(-1) = 4$:

$$\begin{cases} y(-1) = \frac{1}{4} + \frac{C_1}{3} + C_2 = \frac{1}{4} \\ y'(-1) = C_1 + 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + C_2 = 0 \\ C_1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

Отже, маємо частинний розв’язок $y = \frac{1}{4x^4} - \frac{1}{x^3} - 1$. ┘

87. $y''x\ln x = y'$.

┌ Дане рівняння запишемо у вигляді $y'' = \frac{y'}{x\ln x}$ і отримаємо рівняння виду (25). Зробимо заміну $y' = z$. Тоді $y'' = z'$. Дістанемо рівняння з відокремлюваними змінними $z' = \frac{z}{x\ln x}$. Розв’язуємо його:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x\ln x},\ \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x\ln x},\ \int\frac{dz}{z} = \int\frac{d(\ln x)}{\ln x},\ \ln|z| = \ln|\ln x| + \ln C_1,$$
$$\ln|z| = \ln|C_1 \ln x|,\ z = C_1 \ln x .$$

Але $z = y'$. Тому маємо

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \ln x,\ dy = C_1 \ln x\,dx,\ \int dy = C_1\int \ln x\,dx,\ \text{звідки}$$
$$y = C_1 x(\ln x - 1) + C_2 .\ ┘$$

2º. Нехай задано диференціальне рівняння другого порядку виду

$$F(y, y', y'') = 0, \qquad (27)$$

або

$$y'' = f(y, y'), \qquad (28)$$

яке не містить явно незалежну змінну x.

Зробимо заміну $y' = p(y)$, де p вважається функцією від y. Тоді $y'' = (y')' = p'_x = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'_y \cdot y'_x = p'_y \cdot p = pp'_y$. Тому дістанемо диференціальне рівняння першого порядку

$$F\left(y, p, pp'_y\right) = 0, \text{ або } \quad pp'_y = f\left(y, p\right). \qquad (29)$$

Якщо вдається знайти загальний розв'язок рівняння (29) $p = p(y, C_1)$, то отримаємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$y' = p(y, C_1), \quad \frac{dy}{dx} = p(y, C_1), \quad \frac{dy}{p(y, C_1)} = dx, \quad \int \frac{dy}{p(y, C_1)} = x + C_2 .$$

Обчисливши невизначений інтеграл, отримаємо загальний інтеграл (розв'язок) рівняння (27) або (28).

Розв'язати диференціальні рівняння.

88. $y'' = -\frac{2}{y^5}$, якщо $y(-1) = 1$, $y'(-1) = 1$.

Г Маємо рівняння виду (28). Зробимо заміну $y' = p(y)$, $y'' = pp'_y$. Дістанемо рівняння виду (31) з відокремлюваними змінними: $pp'_y = -\frac{2}{y^5}$.

Розв'яжемо його:

$$p\frac{dp}{dy} = -\frac{2}{y^5}, \quad p\,dp = -\frac{2}{y^5}dy, \quad \int p\,dp = -2\int y^{-5}dy, \quad \frac{p^2}{2} = -2\frac{y^{-4}}{-4} + C_1,$$

$$p^2 = y^{-4} + 2C_1, \quad p^2 = \frac{1}{y^4} + 2C_1, \quad (y')^2 = \frac{1}{y^4} + 2C_1 .$$

Так як потрібно знайти тільки такий частинний розв'язок, який задовольняє задані початкові умови, то можливо одразу знайти C_1 (підставляючи в отриману рівність умови $y(-1) = 1$, $y'(-1) = 1$):

$$1 = 1 + 2C_1 \Leftrightarrow C_1 = 0 .$$

Тому маємо $(y')^2 = \frac{1}{y^4}$, звідки $y' = \frac{1}{y^2}$ (врахували початкову умову $y'(-1) = 1$).

Розв'язуємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y^2},\ y^2dy=dx,\ \int y^2dy=\int dx,$$

$$\frac{y^3}{3}=x+C_2 \Leftrightarrow y^3=3x+3C_2.$$

Підставляємо початкову умову $y(-1)=1$ і знаходимо: $1^3=3\cdot(-1)+3C_2$, $3C_2=4$, $C_2=\frac{4}{3}$. Тоді $y^3=3x+4$. Остаточно маємо $y=\sqrt[3]{3x+4}$. ⌋

89. $y''(1+y)-5(y')^2=0$.

⌈ Маємо рівняння виду (27). Зробимо заміну $y'=p(y)$, $y''=pp'_y$. Дістанемо рівняння $pp'_y(1+y)-5p^2=0$. Виносимо спільний множник p за дужки:

$$p\left(p'_y(1+y)-5p\right)=0.$$

Можливі два випадки.

1) $p=0$, тоді $y'=0$, $y=\text{const}$.

2) $p'_y(1+y)-5p=0$. Це рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язуємо його:

$$(1+y)\frac{dp}{dy}=5p,\ \frac{dp}{p}=\frac{5dy}{y+1},\ \int\frac{dp}{p}=5\int\frac{dy}{y+1},\ \ln|p|=5\ln|y+1|+\ln C_1,$$

$$\ln|p|=\ln\left|C_1\cdot(y+1)^5\right|,\ p=C_1(y+1)^5,\ y'=C_1(y+1)^5.$$

Це є диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язуємо його: $\frac{dy}{dx}=C_1(y+1)^5$, $\frac{dy}{(y+1)^5}=C_1dx$,

$$\int(y+1)^{-5}dy=C_1\int dx,\quad \frac{(y+1)^{-4}}{-4}=C_1x+C_2,\quad \frac{1}{4(y+1)^4}=C_1x+C_2,$$

$$(y+1)^4=\frac{1}{C_1x+C_2}.$$

Зауважимо, що розв'язок $y=\text{const}$ дістаємо із загального розв'язку при $C_1=0$. ⌋

Вправи для самостійного розв'язання

Розв'язати диференціальні рівняння:

90. $2xy'' - y' = 0$, якщо $y(4) = 10$, $y'(4) = 3$.

91. $yy'' - (y')^2 - y^2 y' = 0$.

92. $3yy'' + (y')^2 = 0$.

93. $y'' + \dfrac{y'}{x} = x^2$.

Відповіді:

90. $y = \sqrt{x^3} + 2$.

91. $\dfrac{y}{y + C_1} = e^{C_1(x + C_2)}$.

92. $y = (C_1 x + C_2)^{\frac{3}{4}}$.

93. $y = \dfrac{x^4}{16} + C_1 \ln x + C_2$.

9. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Рівняння виду

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{30}$$

де p і q – дійсні числа, називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.*

Квадратне рівняння

$$k^2 + pk + q = 0 \tag{31}$$

називається відповідним *характеристичним рівнянням*.

Загальний розв'язок рівняння (30) залежить від значень коренів характеристичного рівняння. Можливі три випадки.

1. Якщо корені характеристичного рівняння (31) дійсні та різні, тобто $k_1 \neq k_2$, то загальний розв'язок диференціального рівняння (31) має вигляд:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{32}$$

2. Якщо корені характеристичного рівняння дійсні та рівні, тобто $k_1 = k_2 = k$, то

$$y = e^{kx}\left(C_1 + C_2 x\right). \qquad (33)$$

3. Якщо корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені $\left(D = p^2 - 4q < 0\right)$, тобто $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, де $i = \sqrt{-1}$ (*уявна одиниця*), $\alpha = -\dfrac{p}{2}$, $\beta = \dfrac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$, то

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right). \qquad (34)$$

У формулах $(32)-(34)$ C_1 і C_2 довільні сталі.

Розв'язати диференціальні рівняння.

94. $y'' - 5y' + 4y = 0$.

$\ulcorner$ Маємо рівняння виду (30). Запишемо його характеристичне рівняння: $k^2 - 5k + 4 = 0$. Розв'яжемо його: $D = (-5)^2 - 4\cdot 4\cdot 1 = 25 - 16 = 9 > 0$, тоді $k_1 = \dfrac{5-3}{2} = 1$ і $k_2 = \dfrac{5+3}{2} = 4$.

Маємо перший випадок (корені дійсні та різні). Тому за формулою (32) загальний розв'язок диференціального рівняння – $y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$. $\lrcorner$

95. $y'' + 8y' + 16y = 0$.

$\ulcorner$ Це рівняння виду (30). Його характеристичне рівняння має вигляд $k^2 + 8k + 16 = 0$, або $(k+4)^2 = 0$. Тому $k_1 = k_2 = -4$, тобто маємо другий випадок. Тоді за формулою (33) записуємо загальний розв'язок диференціального рівняння: $y = e^{-4x}\left(C_1 + C_2 x\right)$. $\lrcorner$

96. $y'' + 2y' + 10y = 0$.

$\ulcorner$ Маємо рівняння виду (30). Записуємо відповідне характеристичне рівняння: $k^2 + 2k + 10 = 0$. Розв'язуємо його: $D = 2^2 - 4\cdot 1\cdot 10 = 4 - 40 = -36$, $k_1 = \dfrac{-2-\sqrt{-36}}{2} = \dfrac{-2-6i}{2} = -1-3i$, $k_2 = \dfrac{-2+\sqrt{-36}}{2} = \dfrac{-2+6i}{2} = -1+3i$. Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені. Це третій випадок. При цьому $\alpha = -1$, $\beta = 3$.

Тому за формулою (34) записуємо загальний розв'язок рівняння: $y = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$. $\lrcorner$

97. $y'' + 25y = 0$.

$\ulcorner$ Характеристичне рівняння має вигляд $k^2 + 25 = 0$. Розв'язуємо його: $k^2 = -25$, $k = \pm\sqrt{-25} = \pm 5i$. Тоді $k_1 = -5i$, а $k_2 = 5i$. Маємо третій випадок. При цьому $\alpha = 0$, $\beta = 5$. Тому за формулою (34) загальний розв'язок заданого диференціального рівняння такий: $y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$. $\lrcorner$

98. $y'' - 2y' + 1 = 0$, якщо $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$.

$\ulcorner$ Характеристичне рівняння для заданого диференціального рівняння має вигляд $k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow (k-1)^2 = 0$. Його корені $k_1 = k_2 = 1$ дійсні та рівні. Тоді за формулою (33) записуємо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння: $y = e^x (C_1 + C_2 x)$.

Знайдемо частинний розв'язок. З умови задачі Коші $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$. Знайдемо похідну:

$$y' = \left(e^x (C_1 + C_2 x)\right)' = \left(e^x\right)'(C_1 + C_2 x) + e^x \cdot (C_1 + C_2 x)' =$$
$$= e^x (C_1 + C_2 x) + e^x \cdot C_2 = e^x (C_1 + C_2 x + C_2),$$
$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 2 \\ y'(0) = C_1 + C_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 5. \end{cases}$$

Отже, маємо частинний розв'язок $y = e^x (2 + 5x)$. $\lrcorner$

99. $y'' - y' - 6y = 0$, якщо $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$.

$\ulcorner$ Характеристичне рівняння $k^2 - k - 6 = 0$ має дійсні корені $k_1 = -2$, $k_2 = 3$. Тоді за формулою (32) записуємо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$.

Знайдемо частинний розв'язок. З умови задачі Коші $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$. Знайдемо похідну загального розв'язку:

$y' = -2C_1e^{-2x} + 3C_2e^{3x}$. Підставляємо умови Коші і отримаємо систему

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 3 \\ y'(0) = -2C_1 + 3C_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 3 - C_2 \\ -2(3 - C_2) + 3C_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 3 - C_2 \\ 5C_2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2 \end{cases}.$$

Отже, маємо частинний розв'язок $y = e^{-2x} + 2e^{3x}$. ┘

100. $y'' - 16y = 0$.

┌ Характеристичне рівняння $k^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (k-4)(k+4) = 0$ має дійсні корені $k_1 = -4$ і $k_2 = 4$. Тоді за формулою (32) записуємо загальний розв'язок диференціального рівняння: $y = C_1e^{-4x} + C_2e^{4x}$. ┘

101. $y'' - 4y' + 5y = 0$.

┌ Характеристичне рівняння: $k^2 - 4k + 5 = 0$. Розв'язуємо його: $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4$. Тоді: $k_1 = \frac{4 - \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i$, $k_2 = \frac{4 + \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i$. Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені. При цьому $\alpha = 2$ і $\beta = 1$. Тоді за формулою (35) записуємо загальний розв'язок рівняння: $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. ┘

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Розв'язати диференціальні рівняння:

102. $y'' - 9y' = 0$.

103. $y'' + 3y' + 2y = 0$.

104. $y'' - 4y' + 29y = 0$.

105. $y'' + 6y' + 34y = 0$, якщо $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$.

106. $y'' - 12y' + 36y = 0$, якщо $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$.

107. $y'' + 5y' - 6y = 0$, якщо $y(0) = 3$, $y'(0) = -4$.

Відповіді:

102. $y = C_1 + C_2e^{9x}$. **103.** $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$.

104. $y = e^{2x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$. **105.** $y = e^{-3x}(3\cos 5x + 2\sin 5x)$.

106. $y = e^{6x}(2-5x)$. **107.** $y = e^{-6x} + 2e^{x}$.

10. Однорідні системи диференціальних рівнянь

Система диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y, \end{aligned} \qquad (35)$$

де коефіцієнти a_{ij} – сталі, t – незалежна змінна, $x(t)$, $y(t)$ – невідомі функції, називається *однорідною системою двох лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.*

Задача Коші для системи (35) полягає у знаходженні функцій $x(t)$ і $y(t)$, що задовольняють дану систему і задані початкові умови

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0. \qquad (36)$$

Розв'язання системи (35) виконують таким чином. Вважаючи, що в першому рівнянні системи $a_{12} \neq 0$, виразимо в ньому y через x:

$$y = \frac{1}{a_{12}}\frac{dx}{dt} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x. \qquad (37)$$

Продиференціюємо цю рівність по t:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{a_{12}}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{a_{11}}{a_{12}}\frac{dx}{dt}. \qquad (38)$$

Підставляючи вирази (37) і (38) в друге рівняння системи (35), отримаємо

$$\frac{1}{a_{12}}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{a_{11}}{a_{12}}\frac{dx}{dt} = a_{21}x + a_{22}\left(\frac{1}{a_{12}}\frac{dx}{dt} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x\right),$$

$$\frac{1}{a_{12}}\frac{d^2x}{dt^2} - \left(\frac{a_{11}}{a_{12}} + \frac{a_{22}}{a_{12}}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{a_{11}}{a_{12}}a_{22} - a_{21}\right)x = 0,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (a_{11} + a_{22})\frac{dx}{dt} + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = 0. \qquad (39)$$

Рівняння (39) є лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами виду (30) з незалежною змінною t і невідомою функцією $x(t)$. Розв'язуємо його відносно

$x(t)$. Після цього за формулою (37) знаходимо функцію $y(t)$ і записуємо остаточну відповідь.

Зауваження. Якщо в першому рівнянні системи (35) коефіцієнт $a_{12} = 0$, то це рівняння матиме вигляд

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x .$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язавши його, підставимо знайдену функцію $x(t)$ в друге рівняння системи (35) і отримаємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно $y(t)$. Розв'язуємо його і записуємо остаточну відповідь.

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

108. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

Γ Маємо систему виду (35). З першого рівняння виражаємо y:

$$\frac{dx}{dt} = -x + 5y, \quad 5y = \frac{dx}{dt} + x, \quad y = \frac{1}{5}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{5}x .$$

Диференціюємо останню рівність по t і отримуємо

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{5}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{5}\frac{dx}{dt} .$$

Підставимо знайдені y та $\dfrac{dy}{dt}$ в друге рівняння системи:

$$\frac{1}{5}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{5}\frac{dx}{dt} = x + 3\left(\frac{1}{5}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{5}x\right), \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = 5x + 3\frac{dx}{dt} + 3x ,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 8x = 0 .$$

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами виду (30). Коренями його характеристичного рівняння $k^2 - 2k - 8 = 0$ є $k_1 = -2$ і $k_2 = 4$. Тоді загальний розв’язок цього рівняння буде мати вигляд: $x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t}$, де C_1 і C_2 – довільні сталі. Так як $\dfrac{dx}{dt} = -2C_1 e^{-2t} + 4C_2 e^{4t}$, то підставляючи знайдені $x(t)$ та $\dfrac{dx}{dt}$ у вираз для y ($y = \dfrac{1}{5}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{1}{5}x$), отримаємо

$$y(t) = \frac{1}{5}\left(-2C_1 e^{-2t} + 4C_2 e^{4t}\right) + \frac{1}{5}\left(C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t}\right),\ y(t) = -\frac{1}{5}C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t}.$$

Запишемо тепер загальний розв’язок системи:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t} \\ y(t) = -\dfrac{1}{5}C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t}. \end{cases}$$ ⌟

109. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 8y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y. \end{cases}$$

⌜ Маємо систему виду (35). З першого рівняння виражаємо y: $\dfrac{dx}{dt} = 2x + 8y$, $8y = \dfrac{dx}{dt} - 2x$, $y = \dfrac{1}{8}\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{1}{4}x$. Диференціюємо останню рівність по t і отримуємо: $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{8}\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{1}{4}\dfrac{dx}{dt}$.

Підставляємо останні дві рівності в друге рівняння системи:

$$\frac{1}{8}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{4}\frac{dx}{dt} = x + 4\left(\frac{1}{8}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{4}x\right),\ \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} = 8x + 4\frac{dx}{dt} - 8x,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} = 0.$$

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами виду (31). Коренями його характеристичного рівняння $k^2 - 6k = 0$ є $k_1 = 0$ і $k_2 = 6$. Тоді загальний розв'язок цього рівняння буде мати вигляд:

$x(t) = C_1 + C_2 e^{6t}$, де C_1 і C_2 довільні сталі. Так як $\frac{dx}{dt} = 6C_2 e^{6t}$, то підставивши ці вирази у вираз для y ($y = \frac{1}{8}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{4}x$), отримаємо

$$y(t) = \frac{1}{8} \cdot 6C_2 e^{6t} - \frac{1}{4}\left(C_1 + C_2 e^{6t}\right) = -\frac{1}{4}C_1 + \frac{1}{2}C_2 e^{6t}.$$

Запишемо загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 + C_2 e^{6t} \\ y(t) = -\frac{1}{4}C_1 + \frac{1}{2}C_2 e^{6t}. \end{cases} \quad \lrcorner$$

110. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y \\ \frac{dy}{dt} = 8x + y, \end{cases}$

якщо $x(0) = 4$, $y(0) = 2$.

$\ulcorner$ Маємо систему виду (35). З першого рівняння виражаємо y: $\frac{dx}{dt} = 3x + y$, $y = \frac{dx}{dt} - 3x$. Диференціюємо останню рівність по t і отримуємо $\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt}$.

Підставляємо останні дві рівності в друге рівняння системи:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} = 8x + \frac{dx}{dt} - 3x, \quad \frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} - 5x = 0.$$

Це рівняння виду (30). Коренями його характеристичного рівняння $k^2 - 4k - 5 = 0$ є $k_1 = -1$ і $k_2 = 5$. Тоді загальний розв'язок цього рівняння буде мати вигляд: $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}$. Так як $\frac{dx}{dt} = -C_1 e^{-t} + 5C_2 e^{5t}$, то підставляючи ці вирази у вираз для y $\left(y = \frac{dx}{dt} - 3x\right)$, отримаємо

$$y(t) = -C_1 e^{-t} + 5C_2 e^{5t} - 3\left(C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}\right) = -4C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{5t}.$$

Запишемо загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t} \\ y(t) = -4C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{5t}. \end{cases}$$

Знайдемо розв'язок задачі Коші з початковими умовами виду (36) $x(0) = 4$, $y(0) = 2$:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ -4C_1 + 2C_2 = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 3. \end{cases}$$

Записуємо частинний розв'язок системи, підставляючи в загальний розв'язок знайдені значення $C_1 = 1$ і $C_2 = 3$:

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t} + 3e^{5t} \\ y(t) = -4e^{-t} + 6e^{5t}. \end{cases} \lrcorner$$

Вправи для самостійного розв'язання

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

111. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$

112. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y, \end{cases}$ якщо $x(0) = 8$, $y(0) = 1$.

113. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 3y, \end{cases}$ якщо $x(0) = 7$, $y(0) = 5$.

Відповіді:

111. $\begin{cases} x(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{7t} \\ y(t) = -C_1 e^{t} + \dfrac{1}{2} C_2 e^{7t}. \end{cases}$ **112.** $\begin{cases} x(t) = 5e^{t} + 3e^{4t} \\ y(t) = -5e^{t} + 6e^{4t}. \end{cases}$

113. $\begin{cases} x(t) = 8e^{-7t} - e^{-t} \\ y(t) = 4e^{-7t} + e^{-t}. \end{cases}$