Розділ 7. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1. Формула Ньютона-Лейбніца. Безпосереднє обчислення визначених інтегралів

Визначений інтеграл функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ – це число, яке позначають $\int_a^b f(x)dx$. Тут $f(x)$ – підінтегральна функція; $[a,b]$ – відрізок інтегрування; a та b – відповідно нижня та верхня межі інтегрування.

Визначений інтеграл обчислюється за *формулою Ньютона-Лейбніца*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$. Для знаходження первісної доцільно використати відповідний невизначений інтеграл – $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Властивості визначеного інтеграла: а) сталий множник можна виносити з-під знака визначеного інтеграла; б) визначений інтеграл суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) визначених інтегралів кожної з цих функцій.

Обчислити визначені інтеграли:

1. $\int_1^2 x^2 dx$.

⌈ З таблиці невизначених інтегралів $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$. Тому, застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, дістанемо

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}. \ ⌋$$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$.

⌈ З таблиці невизначених інтегралів $\int \cos x\, dx = \sin x + C$. Тому, застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, дістанемо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1. \quad \lrcorner$$

3. $\int_0^1 \left(4x^3 - 3x^2 + 5x + 7\right)dx$.

$\ulcorner$ Знайшовши первісну підінтегральної функції та застосувавши формулу Ньютона-Лейбніца, дістанемо

$$\int_0^1 \left(4x^3 - 3x^2 + 5x + 7\right)dx = \left(4\cdot\frac{x^4}{4} - 3\cdot\frac{x^3}{3} + 5\cdot\frac{x^2}{2} + 7x\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \left(x^4 - x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 7x\right)\Bigg|_0^1 = \left(1^4 - 1^3 + \frac{5}{2}\cdot 1^2 + 7\cdot 1\right) - \left(0^4 - 0^3 + \frac{5}{2}\cdot 0^2 + 7\cdot 0\right) =$$

$$= 1 - 1 + \frac{5}{2} + 7 - 0 = 2{,}5 + 7 = 9{,}5. \quad \lrcorner$$

4. $\int_1^2 \left(\frac{5}{x} + \frac{2}{x^3} - 1\right)dx$.

$$\ulcorner \quad \int_1^2 \left(\frac{5}{x} + \frac{2}{x^3} - 1\right)dx = \int_1^2 \left(5\cdot\frac{1}{x} + 2\cdot x^{-3} - 1\right)dx = \left(5\ln|x| + 2\cdot\frac{x^{-3+1}}{-3+1} - x\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \left(5\ln|x| - x^{-2} - x\right)\Big|_1^2 = \left(5\ln|x| - \frac{1}{x^2} - x\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \left(5\ln 2 - \frac{1}{2^2} - 2\right) - \left(5\ln 1 - \frac{1}{1^2} - 1\right) = 5\ln 2 - \frac{1}{4} - 2 - 5\cdot 0 + 1 + 1 =$$

$$= 5\ln 2 - \frac{1}{4}. \quad \lrcorner$$

5. $\int_0^1 \left(5e^x - 10x^4 + \frac{1}{1+x^2}\right)dx$.

$$\ulcorner \quad \int_0^1 \left(5e^x - 10x^4 + \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \left(5\cdot e^x - 10\cdot\frac{x^5}{5} + \operatorname{arctg} x\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \left(5\cdot e^x - 2x^5 + \operatorname{arctg} x\right)\Big|_0^1 = \left(5\cdot e^1 - 2\cdot 1^5 + \operatorname{arctg} 1\right) - \left(5\cdot e^0 - 2\cdot 0^5 + \operatorname{arctg} 0\right) =$$

$$= 5e - 2 + \frac{\pi}{4} - \left(5 - 0 + 0\right) = 5e + \frac{\pi}{4} - 7. \quad \lrcorner$$

6. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}}$.

$\ulcorner$ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = 2\operatorname{tg}0 - 2\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0 + 2 = 2$. $\lrcorner$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Обчислити визначені інтеграли:

7. $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

8. $\displaystyle\int_{0}^{1} \left(2x - 3x^2 - \frac{1}{3}\right) dx$.

9. $\displaystyle\int_{2}^{5} \frac{dx}{x+1}$.

10. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin 2x \, dx$.

Відповіді:

7. 2.

8. $-\frac{1}{3}$.

9. $\ln 2$.

10. $-0,5$.

2. Заміна змінної у визначеному інтегралі

Якщо у визначеному інтегралі $\int_a^b f(x)\,dx$ вводиться нова змінна $\begin{cases} t = t(x) \\ dt = t'(x)\,dx, \end{cases}$ то слід змінити межі інтегрування. Нижня межа інтегрування t_1 визначається як значення введеної змінної в точці $x = a$, а верхня межа t_2 – в точці $x = b$, тобто $\begin{cases} t_1 = t(a) \\ t_2 = t(b). \end{cases}$

11. $\int\limits_0^2 \frac{2x\,dx}{x^2+1}$.

⌈ Введемо нову змінну $t = x^2 + 1$. Тоді $dt = \left(x^2+1\right)' dx = 2x\,dx$.

Обчислимо нові межі інтегрування: $\begin{cases} t_1 = t(0) = 0^2 + 1 = 1 \\ t_2 = t(2) = 2^2 + 1 = 5. \end{cases}$ Маємо

$$\int\limits_0^2 \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \int\limits_1^5 \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_1^5 = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5 - 0 = \ln 5. \quad ⌋$$

12. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x\,dx$.

⌈ Введемо нову змінну $t = \sin x$, тоді $dt = (\sin x)' dx = \cos x\,dx$.

Нові межі інтегрування: $\begin{cases} t_1 = t(0) = \sin 0 = 0 \\ t_2 = t\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1. \end{cases}$ Маємо

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x\,dx = \int\limits_0^1 t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}. \quad ⌋$$

13. $\int\limits_0^2 x e^{x^2}\,dx$.

⌈ Нехай $t = x^2$. Тоді $dt = \left(x^2\right)' dx = 2x\,dx$ або $x\,dx = \frac{1}{2}dt$,

$\begin{cases} t_1 = t(0) = 0^2 = 0 \\ t_2 = t(2) = 2^2 = 4. \end{cases}$

Маємо $\int\limits_0^2 x e^{x^2}\,dx = \int\limits_0^2 e^{x^2} \cdot x\,dx = \int\limits_0^4 e^t \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 e^t\,dt = \frac{1}{2}e^t\Big|_0^4 =$

$$= \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(e^4 - 1\right). \quad ⌋$$

14. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^2dx}{x^6+1}$.

⌐ Нехай $t=x^3$. Тоді $dt=3x^2dx$ або $x^2dx=\frac{1}{3}dt$,

$\begin{cases} t_1=t(-1)=(-1)^3=-1 \\ t_2=t(1)=1^3=1. \end{cases}$ Маємо

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^2dx}{x^6+1}=\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^2dx}{\left(x^3\right)^2+1}=\int\limits_{-1}^{1}\frac{\frac{1}{3}dt}{t^2+1}=\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}t\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}t\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{3}\left(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}(-1)\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{6}.$$ ⌟

Якщо у визначеному інтегралі робимо заміну: $\begin{cases} x=x(t) \\ dx=x'(t)dt, \end{cases}$ то для встановлення меж нової змінної t потрібно з рівняння $x=x(t)$ виразити $t=t(x)$. Тоді нові межі інтегрування $\begin{cases} t_1=t(a) \\ t_2=t(b). \end{cases}$

15. $\int\limits_{4}^{9}\frac{1}{\sqrt{x}+1}dx$.

⌐ Покладемо $\sqrt{x}=t$. Тоді $x=t^2$, $dx=2t\,dt$. Межі інтегрування нової змінної: $\begin{cases} t_1=\sqrt{4}=2 \\ t_2=\sqrt{9}=3. \end{cases}$ Маємо

$$\int\limits_{4}^{9}\frac{1}{\sqrt{x}+1}dx=\int\limits_{2}^{3}\frac{1}{t+1}2t\,dt=2\int\limits_{2}^{3}\frac{t}{t+1}dx=2\int\limits_{2}^{3}\frac{t+1-1}{t+1}dx=$$

$$=2\int\limits_{2}^{3}\left(\frac{t+1}{t+1}-\frac{1}{t+1}\right)dt==2\int\limits_{2}^{3}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=2\left(t-\ln|t+1|\right)\Big|_{2}^{3}=$$

$$=2\left(3-\ln|3+1|\right)-2\left(2-\ln|2+1|\right)==6-2\ln 4-4+2\ln 3=$$

$$=2+2\left(\ln 3-\ln 4\right)=2+2\ln\frac{3}{4}.\ \lrcorner$$

16. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$

┌ Нехай $x=\sin t$, тоді $dx=\left(\sin t\right)'dt=\cos t\,dt$. Нові межі інтегрування знаходимо за формулою $t=\arcsin x$:

$\begin{cases} t_1=\arcsin 0=0 \\ t_2=\arcsin 1=\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$ Маємо

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 t}\cdot\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\cos t\,dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\left(1+\cos 2t\right)dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2t\right)dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(0+\frac{\sin 2\cdot 0}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 0}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{0}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{0}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

(в ході розв’язання скористались формулою $\cos^2 t=\dfrac{1}{2}\left(1+\cos 2t\right)$). ┘

17. $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,dx.$

┌ Для того щоб позбутися ірраціональності в підінтегральній функції, тобто кубічного і квадратного коренів, потрібно зробити підстановку $\sqrt[6]{x}=t$. Тоді $x=t^6$, $dx=\left(t^6\right)'dt=6t^5dt$. Межі інтегрування нової змінної:

$\begin{cases} t_1 = \sqrt[6]{0} = 0 \\ t_2 = \sqrt[6]{1} = 1. \end{cases}$ Маємо

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{t^2+t^3}\cdot 6t^5\,dt = 6\int_0^1 \frac{t^5}{t^2+t^3}\,dt = 6\int_0^1 \frac{t^3}{t+1}\,dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l|l} \;\; t^3 & \; t+1 \\ -\underline{t^3+t^2} & \overline{t^2-t+1} \\ \qquad -t^2 & \\ \quad -\underline{-t^2-t} & \\ \qquad\quad t & \\ \quad\;\; -\underline{t+1} & \\ \qquad\quad -1 & \end{array} \right| = 6\int_0^1 \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 6\left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 1 - \ln|1+1|\right) - 6\left(\frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2} + 0 - \ln|0+1|\right) =$$

$$= 6\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2\right) - 6\left(0 - 0 + 0 - \ln 1\right) = 2 - 3 + 6 - 6\ln 2 + 6\cdot 0 =$$

$$= 5 - 6\ln 2 .$$

Зауважимо, що використаний у прикладі прийом виділення цілої частини раціонально дробу $\frac{t^3}{t+1}$ є стандартним. В даному прикладі це можна було б зробити ще й так:

$$\frac{t^3}{t+1} = \frac{t^3+1-1}{t+1} = \frac{t^3+1^3}{t+1} - \frac{1}{t+1} = \frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1} - \frac{1}{t+1} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}. \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Обчислити визначені інтеграли:

18. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$.

19. $\int_4^9 \frac{2}{\sqrt{x}+3}\,dx$.

20. $\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}$.

21. $\int_1^e \frac{4\ln^3 x}{x}\,dx$.

22. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x+1}$.

Відповіді:

18. $\frac{1}{2}$. **19.** $4-\ln\frac{36}{25}$. **20.** $\frac{\pi}{12}$. **21.** 1. **22.** $\frac{\pi}{4}$.

3. Інтегрування частинами

Обчислення визначених інтегралів методом інтегрування частинами полягає у використанні формули

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du .$$

23. $\int\limits_0^1 xe^x dx$.

⌈ Нехай $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} du = (x)' dx = 1\cdot dx = dx \\ v = \int dv = \int e^x dx = e^x. \end{cases}$ Маємо

$$\int\limits_0^1 xe^x dx = x\cdot e^x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x dx = \left(1\cdot e^1 - 0\cdot e^0\right) - e^x\Big|_0^1 = e - \left(e^1 - e^0\right) =$$

$$= e - e + 1 = 1. \ ⌋$$

24. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$.

⌈ Нехай $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} du = x' dx = dx \\ v = \int \cos x\,dx = \sin x. \end{cases}$ Маємо

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = x\cdot\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0\cdot\sin 0\right) + \cos x\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot 1 + \left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{\pi}{2} + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1. \ ⌋$$

25. $\int_1^e x^2\ln x\,dx$.

⌐ Нехай $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=x^2dx \end{cases}$. Тоді $\begin{cases} du=(\ln x)'dx \\ v=\int x^2dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{1}{x}dx \\ v=\frac{x^3}{3}. \end{cases}$

$$\int_1^e x^2\ln x\,dx=\frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx=\left(\frac{e^3}{3}\ln e-\frac{1^3}{3}\ln 1\right)-\frac{1}{3}\int_1^e x^2dx=$$

$$=\left(\frac{e^3}{3}\cdot 1-\frac{1}{3}\cdot 0\right)-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^e=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right)=\frac{e^3}{3}-\frac{e^3}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2e^3}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2e^3+1}{9}.\ \lrcorner$$

26. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}dx$.

⌐ Нехай $\begin{cases} u=x \\ dv=\frac{1}{\cos^2 x}dx \end{cases}$. Тоді $\begin{cases} du=(x)'dx \\ v=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=\operatorname{tg} x. \end{cases}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx=x\cdot\operatorname{tg} x\Big|_0^{\pi/4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg} x\,dx=\left(\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-0\cdot\operatorname{tg} 0\right)+\ln|\cos x|\Big|_0^{\pi/4}=$$

$$=\frac{\pi}{4}\cdot 1+\ln\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)-\ln(\cos 0)=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\ln 1=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-0=$$

$$=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}.\ \lrcorner$$

27. $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$.

⌐ Нехай: $\begin{cases} u=\operatorname{arctg} x \\ dv=dx. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} du=(\operatorname{arctg} x)'dx=\frac{1}{x^2+1}dx \\ v=\int dx=x. \end{cases}$ Маємо

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 x\frac{1}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{xdx}{x^2+1}.$$

Обчислимо інтеграл $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+1}$. Нехай $t = x^2+1$, тоді $dt = \left(x^2+1\right)' dx = 2xdx$ або $xdx = \frac{1}{2}dt$. Нові межі інтегрування: $\begin{cases} t_1 = t(0) = 0^2+1 = 1 \\ t_2 = t(1) = 1^2+1 = 2. \end{cases}$ Маємо

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+1} = \int_1^2 \frac{\frac{1}{2}dt}{t} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\ln|t|\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Отже, $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$. ⌋

Вправи для самостійного розв’язання

Обчислити визначені інтеграли:

28. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\sin x\,dx$.

29. $\int_0^1 (4x-2)e^x dx$.

30. $\int_0^1 \arcsin x\,dx$.

31. $\int_1^2 x^4 \ln x\,dx$.

32. $\int_0^1 x\operatorname{arctg} x\,dx$.

Відповіді:

28. 3.

29. 4.

30. $\frac{\pi}{2} - 1$.

31. $\frac{32}{5}\ln 2 - \frac{31}{25}$.

32. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

4. Невласні інтеграли

4.1. Невласні інтеграли I роду

За означенням *невласні інтеграли I роду* обчислюються за формулами:

1) $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$; $\quad(1)$

2) $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$; $\quad(2)$

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^0 f(x)dx + \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^b f(x)dx$. $\quad(3)$

Якщо вказані границі існують і скінченні, то відповідні невласні інтеграли дорівнюють значенню цих границь, а у випадку **3)** сумі значень двох границь. При цьому невласні інтеграли називають *збіжними*.

Якщо ж вказані границі дорівнюють нескінченності або не існують (для випадку **3)** хоча б одна з двох границь), то відповідні невласні інтеграли називають *розбіжними*.

Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

33. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^4}dx$.

⌈ Згідно з формулою (1) маємо

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^4}dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{1}{x^4}dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b x^{-4}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{-3}}{-3}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{3x^3}\Bigg|_1^b\right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{3b^3}+\frac{1}{3\cdot1^3}\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{3b^3}\right)+\frac{1}{3} = 0+\frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$ ⌋

34. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

⌈ $$\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(2\sqrt{x}\right)\Big|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(2\sqrt{b}-2\sqrt{1}\right).$$

Так як $\lim\limits_{b\to+\infty}\sqrt{b}=+\infty$, то $\lim\limits_{b\to+\infty}\left(2\sqrt{b}-2\right)=+\infty$ (див. розділ 4).

Отже, заданий інтеграл розбіжний. $\lrcorner$

35. $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$.

$$\ulcorner\quad \int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} xe^{-x^2}dx=\left|\begin{array}{l} t=-x^2\\ dt=\left(-x^2\right)'dx=-2xdx\\ xdx=-\dfrac{1}{2}dt\\ \textit{межі}:\\ t_1=-0^2=0\\ t_2=-b^2\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{-b^2}\left(-\frac{1}{2}e^t\right)dt=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{-b^2}e^t dt\right)=-\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(e^t\right)\Big|_0^{-b^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-b^2}-e^0\right)=-\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{b^2}}-1\right)=-\frac{1}{2}\left(\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{b^2}}-1\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}(0-1)=\frac{1}{2}.\quad\lrcorner$$

36. $\int\limits_{2}^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln x}$.

$$\ulcorner\quad \int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{2}^{b}\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}dx=\left|\begin{array}{l} t=\ln x\\ dt=\dfrac{1}{x}dx\\ \textit{межі}:\\ t_1=\ln 2,\ \ t_2=\ln b\end{array}\right|=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{\ln 2}^{\ln b}\frac{1}{t}dt=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\ln|t|\Big|_{\ln 2}^{\ln b}=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln|\ln b|-\ln|\ln 2|\right).$$

Так як $\lim\limits_{b\to+\infty}\ln b=+\infty$, то $\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\ln|\ln b|-\ln\ln|2|\right)=+\infty$ (див. розділ 4).

Отже, заданий інтеграл розбіжний. $\lrcorner$

37. $\int\limits_{2}^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln^2 x}$.

$$⌜\ \int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_2^{b}\frac{1}{\ln^2 x}\,\frac{1}{x}\,dx=\left|\begin{array}{l} t=\ln x\\ dt=\dfrac{1}{x}\,dx\\ межі:\\ t_1=\ln 2\\ t_2=\ln b\end{array}\right|=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{\ln 2}^{\ln b}\frac{1}{t^2}\,dt=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{\ln 2}^{\ln b}t^{-2}dt==\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{t^{-1}}{-1}\right)\Bigg|_{\ln 2}^{\ln b}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{t}\right)\Bigg|_{\ln 2}^{\ln b}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln b}+\frac{1}{\ln 2}\right)=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln b}\right)+\frac{1}{\ln 2}=0+\frac{1}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}.\ ⌟$$

38. $\int\limits_0^{+\infty}\cos x\,dx$.

$$⌜\ \int\limits_0^{+\infty}\cos x\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b}\cos x\,dx=\lim_{b\to+\infty}\sin x\Big|_0^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\sin b-\sin 0\right)=\lim_{b\to+\infty}\sin b.$$

Отримана границя не існує (див. розділ 4, рис. 4).

Отже, заданий невласний інтеграл I роду розбіжний. ⌟

39. $\int\limits_{-\infty}^{1}\frac{x\,dx}{x^4+1}$.

⌜ Відповідно до формули (2) маємо

$$\int\limits_{-\infty}^{1}\frac{x\,dx}{x^4+1}=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^{1}\frac{x\,dx}{\left(x^2\right)^2+1}=\left|\begin{array}{l} t=x^2,\ dt=2x\,dx,\\ x\,dx=\dfrac{1}{2}\,dt\\ межі:\\ t_1=a^2,\ t_2=1^2=1\end{array}\right|=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a^2}^{1}\frac{\frac{1}{2}dt}{t^2+1}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\int\limits_{a^2}^{1}\frac{1}{t^2+1}\,dt=\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}t\Big|_{a^2}^{1}=\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}a^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}a^2\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{8},$$

оскільки $\lim\limits_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}a^2=\frac{\pi}{2}$ (див. розділ 4, рис. 5). ⌟

40. $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x dx$.

⌈ Використаємо формулу інтегрування частинами $\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du$. Нехай $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} du = dx \\ v = \int e^x dx = e^x. \end{cases}$

Маємо $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\left(xe^x\Big|_a^0 - \int\limits_a^0 e^x dx\right) = \lim\limits_{a\to-\infty}\left(0\cdot e^0 - a\cdot e^a - e^x\Big|_a^0\right) =$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{-a}{e^{-a}} - \left(e^0 - e^a\right)\right) = \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{-a}{e^{-a}} - 1 + e^a\right).$$

Оскільки $\lim\limits_{a\to-\infty} e^a = 0$ (див. розділ 4, рис. 2) то потрібно обчислити границю $\lim\limits_{a\to-\infty}\frac{-a}{e^{-a}}$. Так як $\begin{cases} \lim\limits_{a\to-\infty}(-a) = +\infty \\ \lim\limits_{a\to-\infty} e^{-a} = +\infty \end{cases}$ (див. розділ 4, рис. 2), то для обчислення цієї границі можна скористатися правилом Лопіталя (див. розділ 5): $\lim\limits_{a\to-\infty}\frac{-a}{e^{-a}} = \lim\limits_{a\to-\infty}\frac{(-a)'_a}{\left(e^{-a}\right)'_a} = \lim\limits_{a\to-\infty}\frac{-1}{-e^{-a}} = \lim\limits_{a\to-\infty} e^a = 0$.

Отже, $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\left(\frac{-a}{e^{-a}} - 1 + e^a\right) = 0 - 1 + 0 = -1$. ⌋

41. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}dx$.

⌈ Згідно з формулою (3) маємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}dx = \int\limits_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2+1}dx + \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\frac{1}{x^2+1}dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{1}{x^2+1}dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg} x\Big|_a^0\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} x\Big|_0^b\right) = \lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} a\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0\right) =$$

$$= -\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg} a + \lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg} b = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Тут $\begin{cases} \lim\limits_{a\to-\infty}\operatorname{arctg} a = -\dfrac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{b\to+\infty}\operatorname{arctg} b = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ (див. розділ 4, рис. 5). ⌋

42. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$.

$\ulcorner$ $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = \int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx + \int\limits_{0}^{+\infty} e^x dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0} e^x dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} e^x dx =$$
$$= \lim_{a\to-\infty} e^x\Big|_a^0 + \lim_{b\to+\infty} e^x\Big|_0^b = \lim_{a\to-\infty}\left(e^0 - e^a\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(e^b - e^0\right) =$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\left(1 - e^a\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(e^b - 1\right) = +\infty,$$
так як перша границя дорівнює 1, а друга – ($+\infty$).

Отже, заданий інтеграл є розбіжним. $\lrcorner$

43. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^4} dx$.

$\ulcorner$ $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^4} dx = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x^3}{1+x^4} dx + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^4} dx =$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0} \frac{x^3}{1+x^4} dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} \frac{x^3}{1+x^4} dx = \left| \begin{array}{l} t = 1+x^4, \\ dt = 4x^3 dx, \\ x^3 dx = \frac{1}{4} dt \end{array} \right| =$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{1+a^4}^{1} \frac{\frac{1}{4}dt}{t} + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{1+b^4} \frac{\frac{1}{4}dt}{t} = \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{4}\int\limits_{1+a^4}^{1} \frac{1}{t}dt + \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{4}\int\limits_{1}^{1+b^4} \frac{1}{t}dt =$$
$$= \frac{1}{4}\lim_{a\to-\infty} \ln|t|\Big|_{1+a^4}^{1} + \frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty} \ln|t|\Big|_{1}^{1+b^4} =$$
$$= \frac{1}{4}\lim_{a\to-\infty}\left(\ln 1 - \ln\left|1+a^4\right|\right) + \frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\left|1+b^4\right| - \ln 1\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\lim_{a\to-\infty}\left(0 - \ln\left(1+a^4\right)\right) + \frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\left(1+b^4\right) - 0\right) =$$
$$= -\frac{1}{4}\lim_{a\to-\infty}\ln\left(1+a^4\right) + \frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty}\ln\left(1+b^4\right).$$

Оскільки $\begin{cases} \lim\limits_{a\to-\infty}\ln\left(1+a^4\right) = +\infty \\ \lim\limits_{b\to+\infty}\ln\left(1+b^4\right) = +\infty \end{cases}$, то заданий інтеграл є розбіжним. $\lrcorner$

Вправи для самостійного розв’язання

Обчислити невласні інтеграли I роду або довести їх розбіжність:

44. $\int_{1}^{+\infty} \frac{4}{x^5} dx$.

45. $\int_{1}^{+\infty} (2x+1) dx$.

46. $\int_{-\infty}^{1} e^x dx$.

47. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx$.

48. $\int_{0}^{+\infty} xe^{-x} dx$.

49. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 dx}{x^8+1}$.

50. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^5 dx}{x^6+2}$.

51. $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx$.

52. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx$.

53. $\int_{-\infty}^{0} \frac{\operatorname{arcctg} x}{1+x^2} dx$.

Відповіді:

44. 1.

45. Розбіжний.

46. e.

47. 1.

48. 1.

49. $\frac{\pi}{4}$.

50. Розбіжний.

51. $\frac{1}{2\ln^2 2}$.

52. $\frac{\pi^3}{12}$.

53. $-\frac{\pi^2}{8}$.

4.2. Невласні інтеграли II роду

Невласний інтеграл II роду є узагальненням визначеного інтеграла $\int_a^b f(x) dx$ на випадок, коли підінтегральна функція $f(x)$ необмежена на відрізку $[a, b]$.

Розрізняють три випадки:

1) $f(x)$ необмежена у точці $x = a$ ($\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$). Тоді

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x) dx. \qquad (4)$$

Тут і далі $\varepsilon > 0$, тобто ε прямує до нуля справа.

2) $f(x)$ необмежена у точці $x = b$ ($\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$). Тоді

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \quad (\varepsilon > 0). \qquad (5)$$

3) $f(x)$ необмежена у точці $c \in (a,b)$ ($\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$). Тоді

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \quad (\varepsilon > 0). \qquad (6)$$

Якщо вказані границі існують і скінченні, то відповідні невласні інтеграли дорівнюють значенню цих границь, а у випадку **3)** сумі значень двох границь. При цьому невласні інтеграли називають *збіжними*. Якщо ж вказані границі дорівнюють нескінченності або не існують (для випадку **3)** хоча б одна з двох), то відповідні невласні інтеграли називають *розбіжними*.

Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

54. $\int_2^3 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$.

⌜ Оскільки $\lim\limits_{x\to 2+0} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$ (див. розділ 4), то підінтегральна функція необмежена у точці $x = 2$. Згідно з формулою (4) дістанемо

$$\int_2^3 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{2+\varepsilon}^3 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{2+\varepsilon}^3 (x-2)^{-2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left.\left(\frac{(x-2)^{-1}}{-1}\right)\right|_{2+\varepsilon}^3 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left.\left(\frac{-1}{x-2}\right)\right|_{2+\varepsilon}^3 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{-1}{3-2} - \frac{-1}{2+\varepsilon-2}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-1 + \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Так як $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon} = \infty$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(-1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty$.

Отже, заданий невласний інтеграл II роду розбіжний. ⌟

55. $\int_3^4 \frac{1}{\sqrt{x-3}}\,dx$.

$\ulcorner$ Підінтегральна функція необмежена у точці $x=3$. Знаходимо

$$\int_3^4 \frac{1}{\sqrt{x-3}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{3+\varepsilon}^4 \frac{1}{\sqrt{x-3}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\sqrt{x-3}\right)\Big|_{3+\varepsilon}^4 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\sqrt{4-3} - 2\sqrt{3+\varepsilon-3}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\cdot 1 - 2\cdot\sqrt{\varepsilon}\right) = 2-0=2\,. \quad \lrcorner$$

56. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$\ulcorner$ Підінтегральна функція необмежена у точці $x=1$. Відповідно до формули (5) дістанемо

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0\right) = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}\,. \quad \lrcorner$$

57. $\displaystyle\int_3^5 \frac{1}{x-5}\,dx\,.$

$\ulcorner$ Підінтегральна функція необмежена у точці $x=5$. Знаходимо

$$\int_3^5 \frac{1}{x-5}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_3^{5-\varepsilon} \frac{1}{x-5}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\ln|x-5|\Big|_3^{5-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln|5-\varepsilon-5| - \ln|3-5|\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\varepsilon - \ln 2\right) = -\infty$$

(див. розділ 4, рис. 3). Отже, заданий інтеграл розбіжний. $\lrcorner$

58. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^3}\,dx\,.$

$\ulcorner$ $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^3} = \infty$ (див. розділ 4), тобто підінтегральна функція необмежена у точці $x=2$. Згідно з формулою (6) дістанемо

$$\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^3}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{(x-2)^3}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{(x-2)^3}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_1^{2-\varepsilon} \frac{1}{(x-2)^3}\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{2+\varepsilon}^3 \frac{1}{(x-2)^3}\,dx =$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_1^{2-\varepsilon}(x-2)^{-3}\,dx+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{2+\varepsilon}^{3}(x-2)^{-3}\,dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{(x-2)^{-2}}{-2}\right|_1^{2-\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{(x-2)^{-2}}{-2}\right|_{2+\varepsilon}^{3}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{-1}{2(x-2)^2}\right|_1^{2-\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{-1}{2(x-2)^2}\right|_{2+\varepsilon}^{3}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{-1}{2(2-\varepsilon-2)^2}-\frac{-1}{2(1-2)^2}\right)+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{-1}{2(3-2)^2}-\frac{-1}{2(2+\varepsilon-2)^2}\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{-1}{2\varepsilon^2}+\frac{1}{2}\right)+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{-1}{2}+\frac{1}{2\varepsilon^2}\right).$$

Так як $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}=\infty$, то заданий інтеграл є розбіжним. ⌋

59. $\int_1^2\frac{1}{x\ln x}dx$.

⌈ Так як $\ln 1=0$, то підінтегральна функція необмежена у точці $x=1$.

$$\int_1^2\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{1}{x\ln x}dx=\left|\begin{array}{l} t=\ln x\\ dt=(\ln x)'dx=\frac{1}{x}dx\\ \textit{межі}\;\; t_1=\ln 2\\ \qquad\quad\; t_2=\ln(1+\varepsilon)\end{array}\right|=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\ln(1+\varepsilon)}^{\ln 2}\frac{1}{t}dt=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln|t|\Big|_{\ln(1+\varepsilon)}^{\ln 2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\ln 2-\ln\ln(1+\varepsilon)\right).$$

Оскільки $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln\ln(1+\varepsilon)=-\infty$, то заданий інтеграл розбіжний. ⌋

60. $\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

⌈ Аналогічно попередньому прикладу маємо

$$\int_1^2\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{1}{x\cdot\sqrt{\ln x}}dx=\left|\begin{array}{l} t=\ln x\\ dt=\frac{1}{x}dx\end{array}\right|=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\ln(1+\varepsilon)}^{\ln 2}\frac{1}{\sqrt{t}}dt=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\sqrt{t}\right)\Big|_{\ln(1+\varepsilon)}^{\ln 2}=2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{\ln 2}-\sqrt{\ln(1+\varepsilon)}\right)=2\left(\sqrt{\ln 2}-\sqrt{\lim_{\varepsilon\to 0}\ln(1+\varepsilon)}\right)=$$

$$=2\left(\sqrt{\ln 2}-\sqrt{\ln 1}\right)=2\sqrt{\ln 2}\,. \quad \lrcorner$$

61. $\int_0^1 \ln x\,dx$.

$\ulcorner$ Оскільки $\lim_{x\to 0+0}\ln x=-\infty$ (див. розділ 4, рис. 3а), то підінтегральна функція необмежена у точці $x=0$. Перш, ніж застосувати формулу (4), обчислимо інтеграл ($\varepsilon\in(0,1)$):

$$\int_\varepsilon^1 \ln x\,dx=\left|\begin{matrix} u=\ln x,\ dv=dx \\ du=\frac{1}{x}dx,\ v=x\end{matrix}\right|=\ln x\cdot x\Big|_\varepsilon^1-\int_\varepsilon^1 x\frac{1}{x}dx=\varepsilon\ln\varepsilon-\ln 1-x\Big|_\varepsilon^1=$$

$$=\varepsilon\ln\varepsilon-1+\varepsilon\,.$$

За формулою (4) дістанемо

$$\int_0^1 \ln x\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \ln x\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\varepsilon\ln\varepsilon-1+\varepsilon\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\varepsilon-1\,.$$

Маємо границю з невизначеністю $0\cdot\infty$. Звівши дану невизначеність до невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$, використаємо правило Лопіталя:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(\ln\varepsilon)'}{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)'}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}}=-\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon=0\,.$$

Остаточно маємо $\int_0^1 \ln x\,dx=0-1=-1$. $\lrcorner$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Обчислити невласні інтеграли II роду або довести їх розбіжність:

62. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}$.

63. $\int_1^2\frac{2}{x\ln^3 x}dx$.

64. $\int\limits_{-1}^{0}\frac{3}{(x+1)^4}dx$.

65. $\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{\operatorname{arctg}x\cdot(1+x^2)}dx$.

66. $\int\limits_{1}^{2}\frac{1}{\sqrt{2-x}}dx$.

67. $\int\limits_{0}^{2}\frac{1}{x-1}dx$.

68. $\int\limits_{-3}^{-2}\frac{1}{\sqrt[3]{x+2}}dx$.

69. $\int\limits_{1}^{2}\frac{3}{x\sqrt[4]{\ln x}}dx$.

70. $\int\limits_{2}^{3}\frac{4}{\sqrt[5]{x-2}}dx$.

Відповіді:

62. Розбіжний.

63. Розбіжний.

64. Розбіжний.

65. Розбіжний.

66. 2.

67. Розбіжний.

68. $-1{,}5$.

69. $4\sqrt[4]{\ln^3 2}$.

70. 5.

5. Застосування визначеного інтеграла

5.1. Обчислення площ плоских фігур

1. Якщо на відрізку $[a,b]$ функція $y=f(x)$ неперервна і $f(x)\geq 0$, то площа *криволінійної трапеції* (рис. 1), обмеженої графіком функції $y=f(x)$, прямими $x=a$, $x=b$ та віссю Ox, обчислюється за формулою

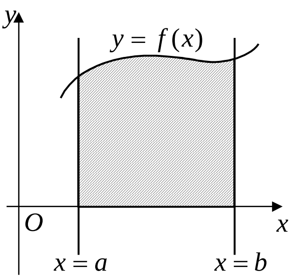
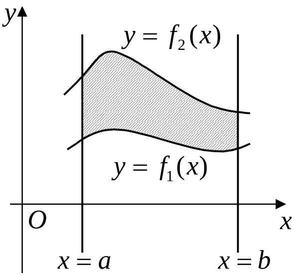


Рис. 1

$$S=\int\limits_{a}^{b}f(x)dx. \qquad (7)$$

2. Площа фігури (рис. 2), обмеженої знизу графіком функції $y = f_1(x)$, зверху – $y = f_2(x)$ та прямими $x = a$, $x = b$, обчислюється за формулою



$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx. \qquad (8)$$

Рис. 2

Відрізки, які обмежують зліва та справа фігуру на рис. 2, можуть вироджуватись у точки.

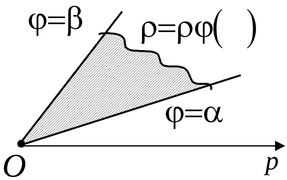
3. Якщо криволінійна трапеція обмежена кривою, заданою параметрично

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, прямими $x = a$, $x = b$ та віссю Ox, то її площа обчислюється за формулою

$$S = \int_\alpha^\beta y(t)\cdot x'(t)\,dt \qquad (9)$$

де $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$ і $y(t) \geq 0$.

4. Площа криволінійного сектора (рис. 3), обмеженого у полярній системі координат неперервною кривою $\rho = \rho(\varphi)$ та променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, обчислюється за формулою



$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi. \qquad (10)$$

Рис. 3

71. Обчислити площу криволінійної трапеції, обмеженої параболою $y=\frac{1}{2}x^2$, прямими $x=3$, $x=6$ та віссю Ox.

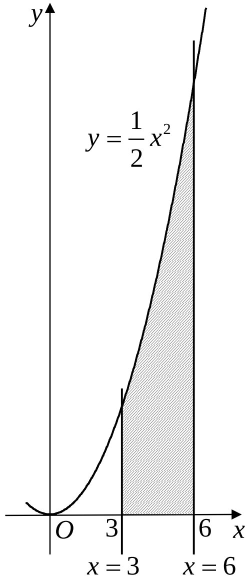


Рис. 4

⌈ Криволінійна трапеція позначена на рис. 4 штрихуванням.

Знайдемо її площу за формулою (7):

$$S=\int_3^6 \frac{1}{2}x^2dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_3^6=$$

$$=\frac{1}{6}\left(6^3-3^3\right)=\frac{1}{6}\left(216-27\right)=$$

$$=\frac{63}{2}=31{,}5 \quad \text{(кв. од.).}$$ ⌋

72. Обчислити площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y=\sin x$, $0\le x\le \pi$, та віссю Ox.

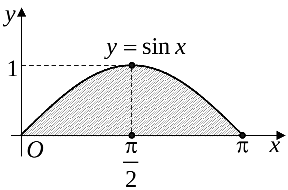


Рис. 5

⌈ Криволінійна трапеція позначена на рис. 5 штрихуванням. Знайдемо її площу за формулою (7):

$$S=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=$$

$$=1+1=2 \quad \text{(кв. од.).}$$ ⌋

73. Знайти площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=6-x^2$, $y=x$.

⌈ $y=6-x^2$ – парабола, вітки якої направлені вниз. Заповнимо таблицю для зображення параболи:

x	0	$\sqrt{6}$	$-\sqrt{6}$
$y=6-x^2$	6	0	0

Для знаходження абсцис ($x_1 = a$, $x_2 = b$) точок перетину параболи з прямою розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = 6 - x^2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow 6 - x^2 = x,$$

або $x^2 + x - 6 = 0$.

$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$,

$$x_1 = a = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2} = -3,$$

$$x_2 = b = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2} = 2.$$

Шукана фігура (рис. 6) обмежена знизу прямою, а зверху – параболою.

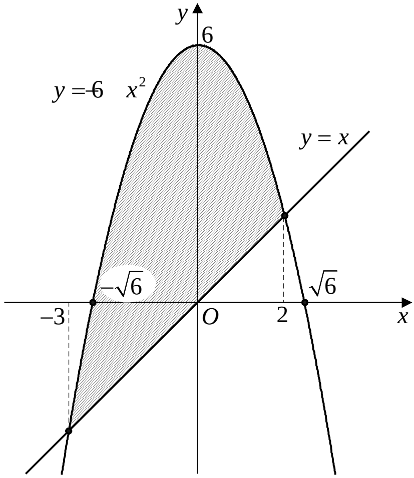


Рис. 6

Тому за формулою (8) отримаємо

$$S = \int_{-3}^{2} \left((6 - x^2) - x \right) dx = \left(6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{-3}^{2} =$$

$$= \left(6 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} \right) - \left(6 \cdot (-3) - \frac{(-3)^3}{3} - \frac{(-3)^2}{2} \right) =$$

$$= 12 - \frac{8}{3} - 2 + 18 - 9 + \frac{9}{2} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6} \quad \text{(кв. од.).} \quad \lrcorner$$

74. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{8x}$ та $y = \dfrac{x^2}{8}$.

$\ulcorner$ Для побудови ліній складемо таблиці:

x	0	2	8
$y = \sqrt{8x}$	0	4	8

;

x	0	4	8
$y = \dfrac{x^2}{8}$	0	2	8

.

Шукана фігура позначена на рис. 7 штрихуванням.

За формулою (8)

$$S=\int_0^8\left(\sqrt{8x}-\frac{x^2}{8}\right)dx=$$

$$=\left.\left(\sqrt{8}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^8=$$

$$=\left.\left(\frac{2}{3}\sqrt{8}\cdot\sqrt{x^3}-\frac{1}{24}x^3\right)\right|_0^8=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{8}\cdot\sqrt{8^3}-\frac{1}{24}8^3=$$

$$\frac{2}{3}\cdot8^2-\frac{8^2}{3}=\frac{128}{3}-\frac{64}{3}=\frac{64}{3}=21\frac{1}{3}$$ (кв. од.). ⌋

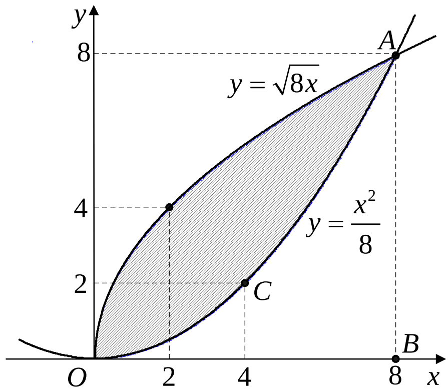


Рис. 7

75. Знайти площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=x$, $y=\frac{1}{x}$ та $y=2$.

⌈ Для побудови графіка функції $y=\frac{1}{x}$ складаємо таблицю:

x	1	2	$\frac{1}{2}$
$y=\frac{1}{x}$	1	$\frac{1}{2}$	2

.

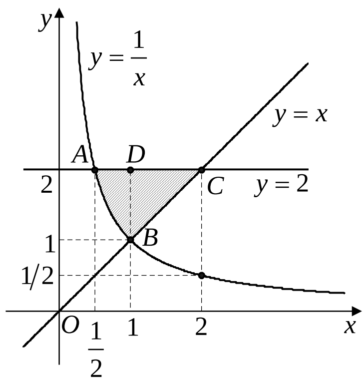


Рис. 8

Розіб'ємо прямою $x=1$ область на дві частини ADB та BDC. Тоді шукана площа

$$S=S_{ADB}+S_{BDC}.$$

За формулою (8)

$$S_{ADB}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(2-\frac{1}{x}\right)dx=$$

$$= (2x - \ln x)\Big|_{1/2}^{1} = (2\cdot 1 - \ln 1) - \left(2\cdot\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2}\right) = 2 - 1 + \ln\frac{1}{2} = 1 - \ln 2.$$

За формулою (8):

$$S_{BDC} = \int_1^2 (2 - x)\,dx = \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = \left(2\cdot 2 - \frac{2^2}{2}\right) - \left(2\cdot 1 - \frac{1^2}{2}\right) = 4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Отже, $S = S_{ADB} + S_{BDC} = 1 - \ln 2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \ln 2$ (кв. од.). $\lrcorner$

76. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$, $y = 2 - x$.

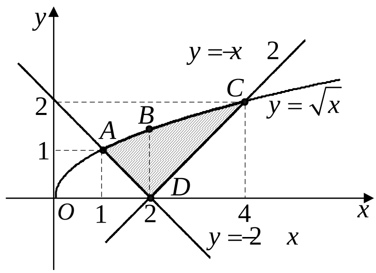


Рис. 9

$\ulcorner$ Складаємо таблиці для побудови графіків:

x	0	1	4
$y = \sqrt{x}$	0	1	2

;

x	2	4
$y = x - 2$	0	2

;

x	0	2
$y = 2 - x$	2	0

.

Штрихована область обмежена знизу двома лініями $y = 2 - x$ та $y = x - 2$. Потрібно розбити область на два криволінійні трикутники ABD та DBC. Тоді

$$S = S_{ABD} + S_{DBC}.$$

За формулою (8)

$$S_{ABD} = \int_1^2 \left(\sqrt{x} - (2 - x)\right)dx = \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2\cdot x + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 2x + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\sqrt{2^3} - 2\cdot 2 + \frac{2^2}{2}\right) - \left(\frac{2}{3}\sqrt{1^3} - 2\cdot 1 + \frac{1^2}{2}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{2} - 4 + 2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{1}{2} = \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{7}{6}.$$

За формулою (8)

$$S_{DBC}=\int_2^4\left(\sqrt{x}-(x-2)\right)dx=\left.\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\right|_2^4=\left.\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\right|_2^4=$$

$$=\left(\frac{2}{3}\sqrt{4^3}-\frac{4^2}{2}+2\cdot 4\right)-\left(\frac{2}{3}\sqrt{2^3}-\frac{2^2}{2}+2\cdot 2\right)=\frac{16}{3}-8+8-\frac{4}{3}\sqrt{2}+2-4=\frac{10}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

Отже, $S=\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{7}{6}+\frac{10}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2}=\frac{13}{6}$ (кв. од.). ⌋

77. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=\frac{5}{x}$ та $y=6-x$.

⌈ Для побудови графіків функцій складаємо таблиці:

x	1	5	2
$y=\frac{5}{x}$	5	1	$\frac{5}{2}$

;

x	0	6
$y=6-x$	6	0

.

Абсциси точок перетину ліній знайдемо із системи:

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{5}{x}\\ y&=6-x\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ \frac{5}{x}=6-x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 5=6x-x^2$$

або $x^2-6x+5=0$.

$D=36-4\cdot 1\cdot 5=16$,

$x_1=a=\frac{6-4}{2}=1$, $x_2=b=\frac{6+4}{2}=5$.

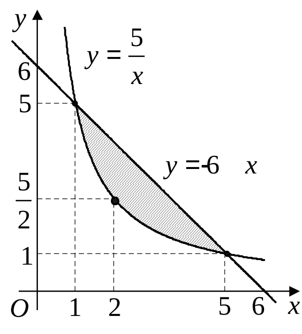


Рис. 10

За формулою (8)

$$S=\int_1^5\left((6-x)-\frac{5}{x}\right)dx=\left(6\cdot x-\frac{x^2}{2}-5\ln x\right)\Bigg|_1^5=$$

$$=\left(6\cdot5-\frac{25}{2}-5\ln5\right)-\left(6\cdot1-\frac{1}{2}-5\ln1\right)=30-\frac{25}{2}-5\ln5-6+\frac{1}{2}=12-5\ln5 \quad \text{(кв. од.).} \quad ⌋$$

78. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=\frac{x^3}{8}$, $y=1$, $x=3$.

⌈ Складаємо таблицю для побудови графіка функції $y=\frac{x^3}{8}$:

x	0	2	3
$y=\frac{x^3}{8}$	0	1	$3\frac{3}{8}$

.

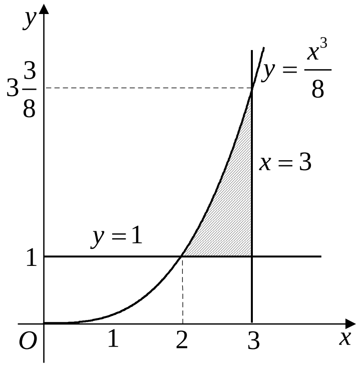


Рис. 11

За формулою (8)

$$S=\int_2^3\left(\frac{x^3}{8}-1\right)dx=\left(\frac{x^4}{32}-x\right)\Bigg|_2^3=$$

$$=\frac{81}{32}-3-\frac{16}{32}+2=1\frac{1}{32} \quad \text{(кв. од.).} \quad ⌋$$

79. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=\frac{1}{1+x^2}$ та $y=0$.

⌈ Фігуру зображено на рис. 12. Це необмежена область. Узагальнюючи формулу (7), площу фігури обчислимо за формулою

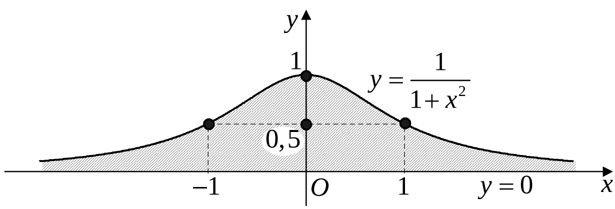


Рис. 12

$S=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$. Маємо невласний інтеграл першого роду (див. підрозділ 4). Тому

$$S=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^0\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{b\to\infty}\int\limits_0^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_a^0+\lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^b=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}0-\operatorname{arctg}a\right)+\lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}0\right)=0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}-0=$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi\quad\text{(кв. од.)}.$$ ⌟

80. Обчислити площу фігури, обмеженої аркою циклоїди $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$, $t\in[0,2\pi]$, та віссю Ox.

⌜ Складаємо таблицю для побудови графіка арки циклоїди:

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$x=t-\sin t$	0	$\frac{\pi}{2}-1$	π	2π
$y=1-\cos t$	0	1	2	0

Площу заштрихованої області обчислимо за формулою (9). Так як $x=t-\sin t$, то $x'=(t-\sin t)'=1-\cos t$. Тоді

$$S=\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)(1-\cos t)\,dt=\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\right)dt=$$

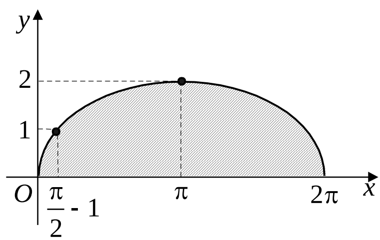


Рис. 13

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt==\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=\left(\frac{3}{2}\cdot 2\pi-2\sin 2\pi+\frac{1}{4}\sin 4\pi\right)-\left(\frac{3}{2}\cdot 0-2\sin 0+\frac{1}{4}\sin 0\right)=3\pi \quad \text{(кв. од.)}. \ \lrcorner$$

81. Обчислити площу фігури, обмеженої астроїдою $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t. \end{cases}$

$\ulcorner$ Для побудови астроїди у першій чверті складаємо таблицю:

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$x=\cos^3 t$	1	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{4}$	0
$y=\sin^3 t$	0	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{4}$	1

Фігура симетрична відносно осей Ox та Oy (рис. 14). Тому її площа $S=4S_{AOB}$.

Так як $x=\cos^3 t$, то $x'=-3\cos^2 t\cdot\sin t$.

За формулою (9)

$$S_{AOB}=-3\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^3 t\cdot\cos^2 t\cdot\sin t\,dt=$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot\cos^2 t\cdot\sin^2 t\,dt=$$

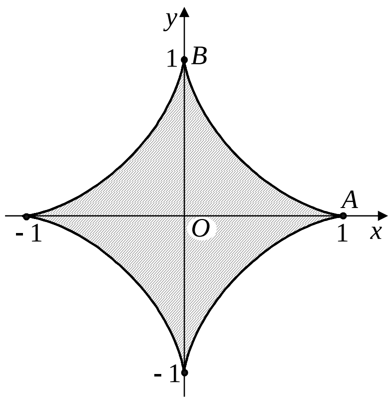


Рис. 14

$$= 3\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\cdot\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt =$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,(1-\cos 2t)\,dt = \frac{3}{8}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{2}dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\cdot\cos 2t\,dt\right) =$$

$$= \frac{3}{8}\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{8}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^3 2t}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{4} - 0 = \frac{3\pi}{32}$$

Отже, $S = 4\cdot\frac{3\pi}{32} = \frac{3\pi}{8}$ (кв. од). ┘

82. Обчислити площу фігури, обмеженої кардіоїдою $\rho = a(1-\cos\varphi)$, де $a > 0$ ($(\varphi;\rho)$ – полярні координати точки на площині).

┌ Складаємо таблицю для побудови графіка функції:

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\rho = a(1-\cos\varphi)$	0	$0{,}14a$	$a\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx 0{,}3a$	a	$2a$	a	0

Фігура симетрична відносно осі Ox. Тому її площа $S = 2S_{AOB}$.

За формулою (10)

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}a^2(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\left(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

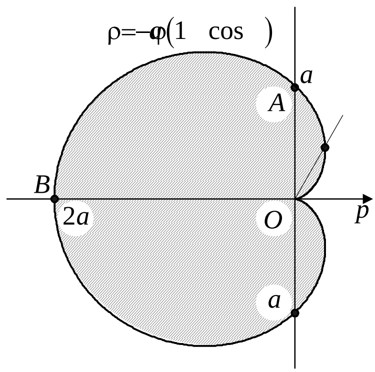


Рис. 15

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\left(1-2\cos\varphi+\frac{1}{2}\left(1+\cos 2\varphi\right)\right)d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2}\varphi-2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{3}{4}\pi a^2.$$

Отже $S=2\cdot\frac{3}{4}\pi a^2=\frac{3}{2}\pi a^2$ (кв. од.). ⌋

Вправи для самостійного розв'язання

Обчислити площі плоских фігур, обмежених кривими:

83. $y=2^x$, $y=2x-x^2$, $x=0$, $x=2$.

84. $y^2=9x$, $y=3x$.

85. $y=-\frac{1}{2}x^2+2$, $x+2y-4=0$.

86. $y=3+2x-x^2$, $y=x+1$.

87. $y=2-x^2$, $y=2x-1$.

88. $y=\sqrt{1-x}$, $y=x+1$, $y=0$.

89. $y=2x-x^2$, $y=0$, $x=3$.

90. $y=\frac{1}{x}$, $y=x^2$, $x=3$, $y=0$.

91. $y=x^4-2x^2$, $y=0$, $x\geq 0$.

92. Знайти площу еліпса за його параметричним рівнянням $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t, \end{cases}$ (a, b – півосі еліпса).

93. Знайти площу фігури, обмеженої кардіоїдою $\rho = 1 + \sin\varphi$.

94. Знайти площу одного пелюстка фігури, обмеженої кривою $\rho = \sin 2\varphi$.

Відповіді:

83. $\frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3}$. **84.** $\frac{1}{2}$. **85.** $\frac{1}{12}$. **86.** $4,5$.

87. $\frac{32}{3}$. **88.** $\frac{7}{6}$. **89.** $\frac{4}{3}$. **90.** $\frac{1}{3} + \ln 3$.

91. $\frac{8\sqrt{2}}{15}$. **92.** πab. **93.** $\frac{3}{2}\pi$. **94.** $\frac{\pi}{8}$.

5.2. Довжина кривої

1. Якщо крива задана рівнянням $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, то її довжина обчислюється за формулою:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx. \qquad (11)$$

2. Якщо крива задана параметрично $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [\alpha, \beta]$, то її довжина

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt. \qquad (12)$$

3. Якщо крива задана в полярній системі координат рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$, то

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2 + \left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi. \qquad (13)$$

95. Обчислити довжину відрізка прямої $y=3x-5$ від точки $A(2;1)$ до точки $B(4;7)$.

⌜ За формулою (11) знаходимо

$$l=\int_2^4\sqrt{1+\left(\left(3x-5\right)'\right)^2}\,dx=\int_2^4\sqrt{1+\left(3\right)^2}\,dx=$$

$$=\sqrt{10}\int_2^4 dx=\sqrt{10}\cdot x\Big|_2^4=\sqrt{10}\left(4-2\right)=$$

$=2\sqrt{10}$ (лін. од.). ⌟

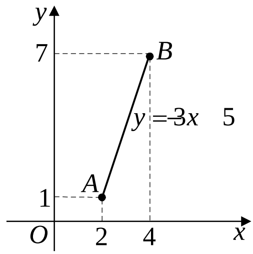


Рис. 16

96. Обчислити довжину кривої $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ від точки з абсцисою $x=3$ до точки з абсцисою $x=8$.

⌜ За формулою (11) $l=\int_3^8\sqrt{1+\left(\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)'\right)^2}\,dx$. Обчислимо окремо

$$\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)'=\frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}\,,\quad\left(\sqrt{x}\right)^2=x\,.$$

Тому $l=\int_3^8\sqrt{1+x}\,dx=\frac{2}{3}\left(\sqrt{1+x}\right)^3\Big|_3^8=\frac{2}{3}\left(\left(\sqrt{9}\right)^3-\left(\sqrt{4}\right)^3\right)=$

$$=\frac{2}{3}\left(27-8\right)=\frac{38}{3}=12\frac{2}{3}\ \text{(лін. од.).}$$ ⌟

97. Обчислити довжину кривої $y=e^x$ від точки $A(0;1)$ до точки $B(1;e)$.

⌜ Згідно з формулою (11)

$$l=\int_0^1\sqrt{1+\left(\left(e^x\right)'\right)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\left(e^x\right)^2}\,dx=$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+e^{2x}}\,dx\,.$$

Для обчислення цього інтеграла виконаємо заміну змінної у визначеному інтегралі (див. підрозділ 2). Нехай

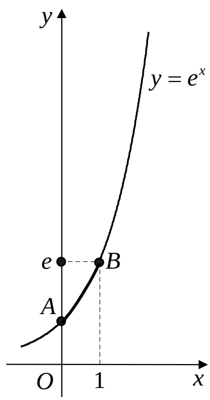


Рис. 17

$\sqrt{1+e^{2x}}=t$. Звідси $e^{2x}=t^2-1$, $2x=\ln\left(t^2-1\right)$, $x=\dfrac{1}{2}\ln\left(t^2-1\right)$ і

$$dx=\left(\frac{1}{2}\ln\left(t^2-1\right)\right)'dt=\frac{t}{t^2-1}dt.$$

Нові межі інтегрування $t(0)=\sqrt{2}$, $t(1)=\sqrt{1+e^2}$.

Тому $$l=\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} t\cdot\frac{t}{t^2-1}dt=\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}\frac{\left(t^2-1\right)+1}{t^2-1}dt=$$

$$=\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}\frac{t^2-1}{t^2-1}dt+\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}\frac{dt}{t^2-1}=t\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}=$$

$$=\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^2}-1}{\sqrt{1+e^2}+1}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\approx 0{,}99 \text{ (лін. од.).} \quad \lrcorner$$

98. Обчислити довжину арки циклоїди $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t, \end{cases}$ де $t\in[0,2\pi]$.

$\ulcorner$ Арка циклоїди зображена на рис. 13. Згідно з формулою (12) знайдемо підкореневий вираз:

$$\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2=(1-\cos t)^2+(\sin t)^2=1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t=$$

$$=2(1-\cos t)=2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}=4\sin^2\frac{t}{2}.$$

Тоді за формулою (12)

$$l=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=2\int\limits_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=2\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=2\cdot\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=-4\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=-4\left(\cos\frac{2\pi}{2}-\cos 0\right)=-4(-1-1)=8 \text{ (лін. од.).} \quad \lrcorner$$

99. Обчислити довжину дуги астроїди $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$.

$\ulcorner$ Астроїду зображено на рис. 14. Фігура симетрична відносно осей Ox та Oy. Тому $l=4l_1$, де l_1 – дуга AB. Згідно з формулою (12) знайдемо похідні та підкореневий вираз:

$$x'=\left(\cos^3 t\right)'=3\cos^2 t\cdot(-\sin t)=-3\cos^2 t\sin t,$$

$y' = 3\sin^2 t\cdot\cos t = 3\sin^2 t\cos t$,

$$(x')^2 + (y')^2 = \left((\cos^3 t)'\right)^2 + \left((\sin^3 t)'\right)^2 =$$

$$= 9\cos^4 t\sin^2 t + 9\sin^4 t\cos^2 t = 9\cos^2 t\sin^2 t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) =$$

$$= 9\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(4\cos^2 t\sin^2 t\right) = \frac{9}{4}\sin^2 2t.$$

За формулою (12)

$$l_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{9}{4}\sin^2 2t}\,dt = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt = -\frac{3}{2}\cdot\frac{\cos 2t}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3}{4}\left(\cos 2\cdot\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) =$$

$$= -\frac{3}{4}(-1-1) = \frac{3}{4}\cdot 2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Отже, $l = 4l_1 = 4\cdot\frac{3}{2} = 6$ (лін. од.). ⌟

100. Обчислити довжину кардіоїди $\rho = a(1-\cos\varphi)$ $(a>0)$.

⌜ Кардіоїду зображено на рис. 15. Крива симетрична відносно осі Ox. Тому $l = 2l_1$, де l_1 – дуга OAB. Згідно з формулою (13) знайдемо підкореневий вираз. Так як $\rho'(\varphi) = \left(a(1-\cos\varphi)\right)' = a\cdot\sin\varphi$, то

$$\left(\rho(\varphi)\right)^2 + \left(\rho'(\varphi)\right)^2 = \left(a(1-\cos\varphi)\right)^2 + \left(a\sin\varphi\right)^2 =$$

$$= a^2\left(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = a^2\left(2 - 2\cos\varphi\right) = a^2\cdot 2\cdot 2\sin^2\frac{\varphi}{2} = 4a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

(врахували, що $1-\cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$).

За формулою (13)

$$l_1 = \int_0^{\pi}\sqrt{4a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi = 2a\int_0^{\pi}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 2a\left(-2\cos\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = -4a\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) =$$

$$= -4a(0-1) = 4a.$$

Отже, $l = 2\cdot 4a = 8a$ (лін. од.). ⌟

101. Знайти довжину логарифмічної спіралі $\rho = e^{\varphi}$, де $\varphi\in[0, 2\pi]$.

⌜ Крива задана в полярній системі координат. Тому за формулою (13)

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(e^{\varphi}\right)^2+\left(\left(e^{\varphi}\right)'\right)^2}\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\sqrt{e^{2\varphi}+e^{2\varphi}}\,d\varphi=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}e^{\varphi}d\varphi=\sqrt{2}e^{\varphi}\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=\sqrt{2}\left(e^{2\pi}-e^{0}\right)=\sqrt{2}\left(e^{2\pi}-1\right)\text{ (лін. од.).}\quad\lrcorner$$

Вправи для самостійного розв’язання

Обчислити довжину кривої:

102. $y=5x-1$, від точки $A(0;1)$ до точки $B(3;14)$.

103. $y^2=(x+1)^3$, що відтинається прямою $x=4$.

104. $y=\ln\sin x$, $x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$.

105. $\rho=6\cos^3\frac{\varphi}{3}$, де $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

106. $\rho=3(1-\cos\varphi)$.

107. $\begin{cases}x=e^t\sin t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$, $t\in[0,1]$.

108. $\begin{cases}x=\sqrt{3}t^2\\ y=t-t^3\end{cases}$.

Відповіді:

102. $3\sqrt{26}$. **103.** $\frac{670}{27}$. **104.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **105.** $\frac{9\sqrt{3}+6\pi}{4}$.

106. 24. **107.** $\sqrt{2}(e-1)$. **108.** 4.

5.3. Обчислення об’ємів тіл обертання

Якщо навколо осі Ox обертається криволінійна трапеція, що обмежена графіком функції $y = f(x)$, віссю Ox та прямими $x = a$, $x = b$, то об'єм *тіла обертання* знаходиться за формулою

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \qquad (14)$$

Якщо криволінійна трапеція, обмежена лініями $x = f(y)$, $y = c$, $y = d$ та віссю Oy, обертається навколо осі Oy, то об'єм тіла обертання обчислюється за формулою

$$V = \pi \int_c^d f^2(y)\,dy. \qquad (15)$$

109. Обчислити об'єм параболоїда, який утворений обертанням параболи $y = \sqrt{8x}$ навколо осі Ox і який обмежений площиною $x = 10$.

$\ulcorner$ Тіло обертання зображене на рис 18. За формулою (14)

$$V = \pi \int_0^{10} 8x\,dx = 8\pi \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{10} =$$

$$= 4\pi \cdot 10^2 = 400\pi \text{ (куб. од.)}. \quad \lrcorner$$

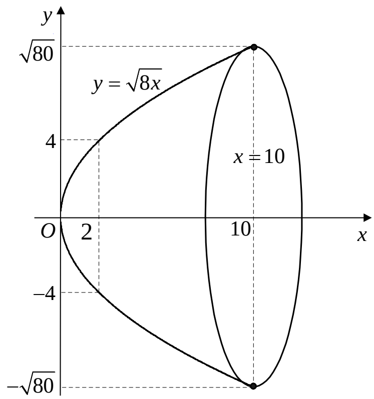


Рис. 18

110. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена лініями $y = \dfrac{4}{x}$, $x = 1$, $x = 4$ та віссю Ox.

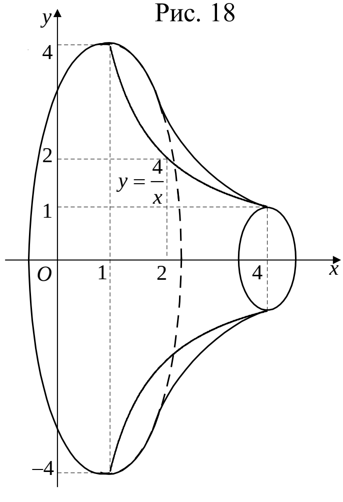


Рис. 19

⌈ Тіло обертання зображене на рис. 19.

За формулою (14)

$$V=\pi\int_1^4\left(\frac{4}{x}\right)^2 dx=16\pi\int_1^4 x^{-2}dx=$$

$$=-16\pi\cdot\left.\frac{1}{x}\right|_1^4=-4\pi+16\pi=12\pi\quad \text{(куб. од.).}$$ ⌋

111. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена лініями $y=\dfrac{x}{2}$, $x=4$, $x=6$, $y=0$.

⌈ За формулою (14)

$$V=\pi\int_4^6\left(\frac{x}{2}\right)^2 dx=\frac{\pi}{4}\int_4^6 x^2dx=\frac{\pi}{4}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_4^6=\frac{\pi}{12}\left(6^3-4^3\right)=$$

$$=\frac{\pi}{12}\left(216-64\right)=12\frac{2}{3}\quad \text{(куб. од.).}$$ ⌋

112. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лінією $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ та віссю Ox.

⌈

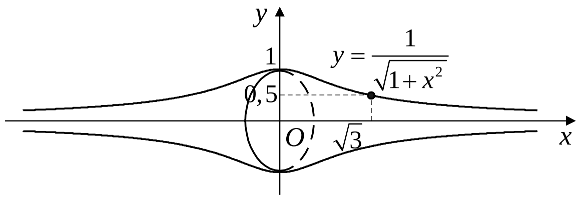


Рис. 20

Узагальнюючи формулу (14), знаходимо

$$V=\pi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 dx=\pi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi^2$$ (куб. од.) (див. приклад **79**). ┘

113. Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $y=\dfrac{x^2}{4}$, $y=1$, $y=5$ та віссю Oy.

┌ Тіло обертання зображене на рис. 21.

Застосуємо формулу (15). Якщо $y=\dfrac{x^2}{4}$, то $x=2\sqrt{y}$ при $x\ge 0$. Тому

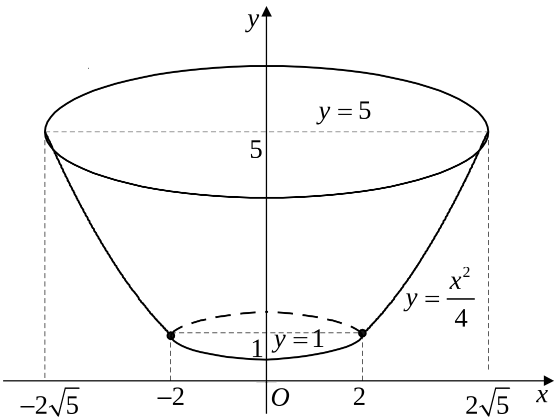


Рис. 21

$$V=\pi\int\limits_1^5\left(2\sqrt{y}\right)^2 dy=4\pi\int\limits_1^5 y\,dy=4\pi\left.\frac{y^2}{2}\right|_1^5=\left.2\pi y^2\right|_1^5=$$

$$=2\pi(25-1)=2\pi\cdot 24=48\pi$$ (куб. од.). ┘

114. Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лінією $y^2=4-x$ та віссю Oy.

┌ Так як $y^2=4-x$, то $x=4-y^2$. Тому за формулою (15)

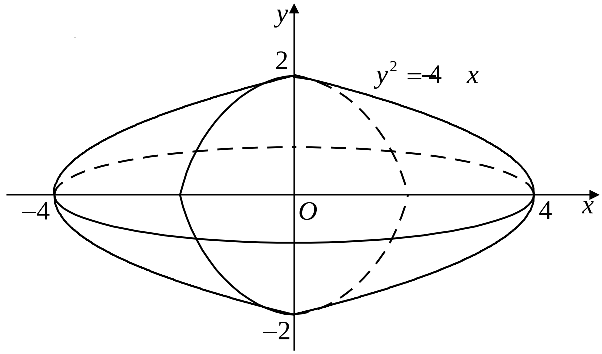


Рис. 22

$$V=\pi\int_0^2\left(4-y^2\right)^2dy=\pi\int_0^2\left(16-8y^2+y^4\right)dy=\pi\left(16y-8\cdot\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=\pi\left(16\cdot2-8\cdot\frac{2^3}{3}+\frac{2^5}{5}\right)=\frac{256}{15}\pi=17\frac{1}{15}\pi\ \text{(куб. од.).}\quad \lrcorner$$

Вправи для самостійного розв’язання

Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням навколо вказаної осі фігури, що обмежена лініями:

115. $y=x^2-2x$ та $y=0$, вісь Ox.

116. $y=e^x$, $x=0$, $x=1$, $y=0$, вісь Ox.

117. $y=x^3$, $x=0$, $y=8$, вісь Oy.

118. $y=x^2$**,** $y=\sqrt{x}$, вісь Ox.

119. $y=2-x^2$ та $y=x^2$, вісь Ox.

Відповіді:

115. $\frac{16}{15}\pi$. **116.** $\frac{\pi}{2}\left(e^2 - 1\right)$. **117.** $\frac{96\pi}{5}$.

118. $\frac{3\pi}{10}$. **119.** $\frac{8\pi}{3}$.