Розділ 6. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Невизначеним інтегралом $\int f(x)\,dx$ функції $f(x)$ (на проміжку X) називають вираз $F(x)+C$, де $F(x)$ – одна з *первісних* функції $f(x)$, тобто $F'(x)=f(x)$ ($x\in X$); C – довільна стала.

1. Таблиця основних невизначених інтегралів

I. $\displaystyle\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n\neq -1)$.

II. $\displaystyle\int x^{-1}\,dx=\int\frac{1}{x}dx=\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$.

III. $\displaystyle\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C \quad (a>0,\ a\neq 1)$.

Зокрема, при $a=e$

III°. $\displaystyle\int e^x\,dx=e^x+C$.

IV. $\displaystyle\int\cos x\,dx=\sin x+C$.

V. $\displaystyle\int\sin x\,dx=-\cos x+C$.

VI. $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C$.

VII. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C$.

VIII. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C \quad (a>0)$.

Зокрема, при $a=1$

VIII°. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg}x+C$.

IX. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C \quad (a>0)$.

Зокрема, при $a=1$

IX°. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$.

X. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$$

Зокрема, при $a = 1$

X°. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.$$

XI. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C \quad (a \neq 0).$$

Зокрема, при $a = 1$

XI°. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 + 1} \right| + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) + C.$$

У справедливості формул **I – XI** легко переконатися, використовуючи диференціювання. Розглянемо, наприклад, інтеграл **II** – $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$. Потрібно показати, що $\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$.

Дійсно, якщо $x > 0$, то $\left(\ln|x|\right)' = \left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$; якщо ж $x < 0$, то $\left(\ln|x|\right)' = \left(\ln(-x)\right)' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.

Зауважимо, що кожна з формул **I – XI** вірна на будь-якому проміжку з області визначення відповідної підінтегральної функції.

Таблицю основних інтегралів слід вивчити **напам'ять**!

Скориставшись табличним інтегралом **I**, довести формули:

1. $\int dx = x + C$.

⌜ $\int dx = \int 1 dx = \int x^0\, dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = x + C$. ⌟

2. $\int x\, dx = \frac{x^2}{2} + C$.

⌜ $\int x\, dx = \int x^1\, dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C$. ⌟

3. $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + C$.

┌ $\int x^2\,dx = \dfrac{x^{2+1}}{2+1} + C = \dfrac{x^3}{3} + C$. ┘

4. $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C$.

┌ $\int \dfrac{dx}{x^2} = \int \dfrac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \dfrac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \dfrac{x^{-1}}{-1} + C = -\dfrac{1}{x} + C$. ┘

5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$.

┌ $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = \int \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \dfrac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$. ┘

Обчислити інтеграли, скориставшись табличним інтегралом **I** :

6. $\int \sqrt{x}\,dx$.

┌ $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$. ┘

7. $\int \dfrac{dx}{x^3}$.

┌ $\int \dfrac{dx}{x^3} = \int x^{-3}\,dx = \dfrac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \dfrac{x^{-2}}{-2} + C = -\dfrac{1}{2x^2} + C$. ┘

8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

┌ $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \dfrac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$. ┘

Обчислити інтеграли, скориставшись табличним інтегралом **III** :

9. $\int 2^x\,dx$.

┌ $\int 2^x\,dx = \dfrac{2^x}{\ln 2} + C$ (в інтегралі **III** поклали $a = 2$). ┘

10. $\int \frac{dx}{2^x}$.

$\ulcorner$ $$\int \frac{dx}{2^x} = \int \frac{1}{2^x}\, dx = \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}} + C = \frac{\frac{1}{2^x}}{-\ln 2} + C = -\frac{1}{2^x \ln 2} + C$$

(в інтегралі **III** поклали $a = \frac{1}{2}$). $\lrcorner$

Обчислити невизначені інтеграли:

11. $\int \frac{dx}{x^2 + 9}$.

$\ulcorner$ Зведемо до інтеграла **VIII** при $a = 3$:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 9} = \int \frac{dx}{x^2 + 3^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C. \quad \lrcorner$$

12. $\int \frac{dx}{x^2 - 5}$.

$\ulcorner$ Зведемо до інтеграла **IX** ($a = \sqrt{5}$):

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5} = \int \frac{dx}{x^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln\left|\frac{x - \sqrt{5}}{x + \sqrt{5}}\right| + C. \quad \lrcorner$$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5}}$.

$\ulcorner$ Використаємо інтеграл **XI** ($a = -5$):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + (-5)}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + (-5)}\right| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 5}\right| + C. \quad \lrcorner$$

Зауваження. Додатково до таблиці основних невизначених інтегралів доцільно **запам'ятати** також інтеграли **1 – 5**.

Вправи для самостійного розв'язання

Обчислити невизначені інтеграли:

14. $\int x^4\, dx$.

15. $\int \frac{dx}{x^5}$.

16. $\int \sqrt[3]{x}\, dx$. **17.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$.

18. $\int 5^x\, dx$. **19.** $\int \frac{dx}{4^x}$.

20. $\int \frac{dx}{x^2+4}$. **21.** $\int \frac{dx}{2+x^2}$.

22. $\int \frac{dx}{x^2-9}$. **23.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$.

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$. **25.** $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$.

26. Довести формулу $\int k\, dx = kx + C$ (k – стала).

Відповіді:

14. $\frac{x^5}{5}+C$. **15.** $-\frac{1}{4x^4}+C$.

16. $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$. **17.** $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C$.

18. $\frac{5^x}{\ln 5}+C$. **19.** $-\frac{1}{4^x \ln 4}+C$.

20. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$. **21.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

22. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$. **23.** $\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+C$.

24. $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$. **25.** $\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)+C$.

2. Безпосереднє інтегрування

Безпосереднє обчислення невизначених інтегралів ґрунтується на тотожних перетвореннях підінтегральної функції та властивостях невизначеного інтеграла.

Властивості невизначеного інтеграла

1°. $\int k\, f(x)\, dx = k\int f(x)\, dx$ (k – стала, $k \neq 0$).

2º. $\int\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx$.

Ця властивість узагальнюється на довільне скінченне число доданків:

$$\int\left(f_1(x)\pm f_2(x)\pm\ldots\pm f_m(x)\right)dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx\pm\ldots\pm\int f_m(x)dx.$$

3º. Якщо $\int f(x)dx=F(x)+C$, то для будь-яких сталих k та b ($k\neq 0$)

$$\int f(kx+b)dx=\frac{1}{k}F(kx+b)+C.$$

Частинні випадки властивості **3º** (відповідно при $b=0$ та $k=1$):

3.1º. $\int f(kx)\,dx=\frac{1}{k}F(kx)+C$;

3.2º. $\int f(x+b)\,dx=F(x+b)+C.$

Обчислити невизначені інтеграли, застосувавши властивість **1º** :

27. $\int\frac{3\,dx}{\cos^2 x}$.

⌈ $\int\frac{3dx}{\cos^2 x}=3\int\frac{dx}{\cos^2 x}=3(\operatorname{tg}x+C)=3\operatorname{tg}x+3C$ (після застосування властивості **1º** використали табличний інтеграл **VI**). Позначивши довільну сталу $3C$ знову через C, дістанемо

$$\int\frac{3dx}{\cos^2 x}=3\operatorname{tg}x+C. \quad ⌋$$

Зауваження. Надалі після обчислення невизначених інтегралів записуватимемо відразу сталу C, опускаючи подібні до наведених пояснення.

28. $\int\frac{x}{2}\,dx$.

⌈ $\int\frac{x}{2}\,dx=\int\frac{1}{2}x\,dx=\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}+C=\frac{x^2}{4}+C$

(після застосування властивості **1º** скористалися табличним інтегралом **I** (приклад **2**)). ⌋

29. $\int\frac{dx}{4-x^2}$.

⌈ $\displaystyle\int \frac{dx}{4-x^2} = \int \frac{dx}{-\left(x^2-4\right)} = -\int \frac{dx}{x^2-2^2} = -\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C =$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

(скористалися табличним інтегралом **IX** при $a = 2$). ⌋

Обчислити інтеграли, застосувавши властивості $\mathbf{1^o}$ та $\mathbf{2^o}$:

30. $\displaystyle\int\left(6x^2 + \pi\sin x\right)dx \qquad \left(\pi \approx 3{,}14\right)$.

⌈ Застосуємо послідовно властивості $\mathbf{2^o}$ та $\mathbf{1^o}$:

$$\int\left(6x^2 + \pi\sin x\right)dx = \int 6x^2\,dx + \int \pi\sin x\,dx = 6\int x^2\,dx + \pi\int \sin x\,dx\ .$$

Для обчислення інтегралів у правій частині рівності використовуємо табличні інтеграли відповідно **I** ($n = 2$, приклад **3**) та **V** і остаточно дістаємо

$$\int\left(6x^2 + \pi\sin x\right)dx = 6\frac{x^3}{3} + \pi\left(-\cos x\right) + C = 2x^3 - \pi\cos x + C\ .$$ ⌋

31. $\displaystyle\int\left(4 - \frac{3}{x} + \frac{e^x}{2}\right)dx$.

⌈ Застосовуємо послідовно властивості $\mathbf{2^o}$, $\mathbf{1^o}$ і табличні інтеграли **I** (приклад **1**), **II** , $\mathbf{III^o}$:

$$\int\left(4 - \frac{3}{x} + \frac{e^x}{2}\right)dx = \int 4\,dx - \int \frac{3}{x}dx + \int \frac{1}{2}e^x\,dx =$$

$$= 4\int dx - 3\int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\int e^x\,dx = 4x - 3\ln|x| + 0{,}5\,e^x + C\ .$$ ⌋

32. $\displaystyle\int x\left(8x^2 + \frac{1}{x^3}\right)dx$.

⌈ Спочатку розкриємо дужки:

$$\int x\left(8x^2 + \frac{1}{x^3}\right)dx = \int\left(8x^2\cdot x + \frac{x}{x^3}\right)dx = \int\left(8x^3 + \frac{1}{x^2}\right)dx.$$

Далі застосуємо властивості $\mathbf{2^o}$, $\mathbf{1^o}$ і табличний інтеграл **I** відповідно при $n = 3$ та $n = -2$ (приклад **4**):

$$\int\left(8x^3 + \frac{1}{x^2}\right)dx = 8\int x^3\,dx + \int \frac{dx}{x^2} = 8\frac{x^4}{4} + \left(-\frac{1}{x}\right) + C = 2x^4 - \frac{1}{x} + C\ .$$

Отже, $\int x\left(8x^2+\frac{1}{x^3}\right)dx = 2x^4-\frac{1}{x}+C$. ⌋

33. $\int \frac{3x^4-2}{x^3}dx$.

⌈ Спочатку поділимо почленно чисельник на знаменник:

$$\int \frac{3x^4-2}{x^3}dx = \int\left(\frac{3x^4}{x^3}-\frac{2}{x^3}\right)dx = \int\left(3x-\frac{2}{x^3}\right)dx.$$

Далі застосуємо властивості $\mathbf{2^o}$, $\mathbf{1^o}$ і табличний інтеграл **I** (приклади **2** та **7**):

$$\int\left(3x-\frac{2}{x^3}\right)dx = 3\int x\,dx - 2\int\frac{dx}{x^3} = 3\frac{x^2}{2}-2\left(-\frac{1}{2x^2}\right)+C = \frac{3}{2}x^2+\frac{1}{x^2}+C.$$

Отже, $\int \frac{3x^4-2}{x^3}dx = \frac{3}{2}x^2+\frac{1}{x^2}+C$. ⌋

34. $\int \frac{x^2+5}{x^2-1}dx$.

⌈ Підінтегральна функція $\frac{x^2+5}{x^2-1}$ – неправильний раціональний дріб (степінь чисельника дорівнює степеню знаменника). Тому для інтегрування слід виділити цілу частину: $\frac{x^2+5}{x^2-1}=\frac{\left(x^2-1\right)+6}{x^2-1}=1+\frac{6}{x^2-1}$. Тоді, застосувавши властивості $\mathbf{2^o}$ та $\mathbf{1^o}$, матимемо

$$\int \frac{x^2+5}{x^2-1}dx = \int\left(1+\frac{6}{x^2-1}\right)dx = \int 1\,dx + 6\int\frac{1}{x^2-1}dx =$$

$$= x+6\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C = x+3\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

(скористалися табличними інтегралами **I** (приклад **1**) та $\mathbf{IX^o}$). ⌋

35. $\int \cos^2\frac{x}{2}\,dx$.

⌈ Скориставшись відомою з тригонометрії формулою, дістанемо

$$\int \cos^2\frac{x}{2}\,dx = \int\frac{1+\cos x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int\left(1+\cos x\right)dx =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int dx+\int \cos x\, dx\right)=\frac{1}{2}\left(x+\sin x\right)+C\,. \quad \lrcorner$$

Застосувавши властивість **3.1°**, довести формули:

36. $\int e^{kx}dx=\frac{1}{k}e^{kx}+C$ (k – стала, $k\neq 0$).

$\ulcorner$ Ця формула є наслідком формули $\int e^{x}\,dx=e^{x}+C$ (табличний інтеграл **III°**) та властивості **3.1°**, в якій $f(x)=e^{x},\ F(x)=e^{x}$. $\lrcorner$

37. $\int \cos kx\, dx=\frac{1}{k}\sin kx+C$ (k – стала, $k\neq 0$).

$\ulcorner$ Ця формула є наслідком формули $\int \cos x\, dx=\sin x+C$ (табличний інтеграл **IV**) та властивості **3.1°**, в якій $f(x)=\cos x,\ F(x)=\sin x$. $\lrcorner$

Застосувавши властивість **3.2°**, довести формули:

38. $\int \frac{dx}{x+b}=\ln\left|x+b\right|+C$ (b – стала).

$\ulcorner$ Ця формула є наслідком формули $\int \frac{dx}{x}=\ln\left|x\right|+C$ (табличний інтеграл **II**) та властивості **3.2°**, в якій $f(x)=\frac{1}{x},\ F(x)=\ln\left|x\right|$. $\lrcorner$

39. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+b}}=2\sqrt{x+b}+C$ (b – стала).

$\ulcorner$ Ця формула є наслідком формули $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C$ (приклад **5**) та властивості **3.2°**, в якій $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}},\ F(x)=2\sqrt{x}$. $\lrcorner$

Обчислити невизначені інтеграли:

40. $\int 3^{\frac{x}{2}}\, dx$.

⌐ Оскільки $\int 3^x\,dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$ (табличний інтеграл **III** при $a = 3$), то за властивістю **3.1°** ($k = \frac{1}{2}$) дістанемо

$$\int 3^{\frac{x}{2}}\,dx = \int 3^{\frac{1}{2}x}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{3^{\frac{1}{2}x}}{\ln 3} + C = \frac{2}{\ln 3} 3^{\frac{x}{2}} + C. \quad ┘$$

41. $\int \sin 4x\,dx$.

⌐ Оскільки $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ (табличний інтеграл **V**), то за властивістю **3.1°** ($k = 4$) дістанемо

$$\int \sin 4x\,dx = \frac{1}{4}(-\cos 4x) + C = -\frac{1}{4}\cos 4x + C. \quad ┘$$

42. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{5}}$.

⌐ Оскільки $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ (табличний інтеграл **VII**), то за властивістю **3.1°** ($k = \frac{1}{5}$) дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{5}} = \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{1}{5}x} = \frac{1}{\frac{1}{5}}\left(-\operatorname{ctg}\frac{1}{5}x\right) + C = -5\operatorname{ctg}\frac{x}{5} + C. \quad ┘$$

43. $\int \frac{dx}{9x^2+1}$.

⌐ Оскільки $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$ (табличний інтеграл **VIII°**), то виконавши тотожне перетворення підінтегральної функції, маємо

$$\int \frac{dx}{9x^2+1} = \int \frac{dx}{(3x)^2+1} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3x + C$$

(скористалися властивістю **3.1°** ($k = 3$)). ┘

44. $\int (x-1)^4\,dx$.

⌈ Оскільки $\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + C$, то за властивістю **3.2°** ($b = -1$)

$$\int (x-1)^4\,dx = \int \left(x+(-1)\right)^4\,dx = \frac{\left(x+(-1)\right)^5}{5} + C = \frac{(x-1)^5}{5} + C\,. \quad ⌋$$

45. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$.

⌈ Розглянемо табличний інтеграл **X**, $a = 2$: $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2} + C$. Тоді за властивістю **3.1°**, виконавши тотожне перетворення, дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-\left(\sqrt{3}x\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}x}{2} + C\,. \quad ⌋$$

46. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

⌈ Оскільки $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$ (приклад **5**), то виконавши тотожні перетворення, дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-1\cdot x+1}} = \frac{1}{-1}\cdot 2\sqrt{-1\cdot x+1} + C = -2\sqrt{1-x} + C$$

(скористалися властивістю **3°** ($k = -1,\ b = 1$)). ⌋

47. $\int \frac{dx}{(4x+5)^2}$.

⌈ Оскільки $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$ (приклад **4**), то за властивістю **3°** ($k = 4,\ b = 5$) маємо

$$\int \frac{dx}{(4x+5)^2} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4x+5}\right) + C = -\frac{1}{4(4x+5)} + C\,. \quad ⌋$$

48. $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$.

⌈ Спочатку виділимо в знаменнику повний квадрат відносно x:

$x^2+4x+13 = \left(x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2\right)+9 = (x+2)^2+9$

(скористалися формулою $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$).

Обчислюємо інтеграл:

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+13}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+9}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+3^2}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}+C$$

(скористалися табличним інтегралом **VIII** при $a=3$ та властивістю **3.2°** ($b=2$)). $\lrcorner$

49. $\int\frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$.

$\ulcorner$ Спочатку виділимо повний квадрат відносно x:

$$6x-x^2-8=-\left(x^2-6x+8\right)=-\left[\left(x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2\right)-1\right]=$$

$$=-\left[(x-3)^2-1\right]=1-(x-3)^2$$

(скористалися формулою $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$).

Обчислюємо інтеграл:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-(x-3)^2}}=\arcsin(x-3)+C$$

(скористалися табличним інтегралом **X°** та властивістю **3.2°** ($b=-3$)). $\lrcorner$

50. $\int\frac{x-3}{5x-4}\,dx$.

$\ulcorner$ Підінтегральна функція $\frac{x-3}{5x-4}$ – неправильний раціональний дріб (степінь чисельника дорівнює степеню знаменника). Тому для інтегрування слід виділити цілу частину: $\frac{x-3}{5x-4}=\frac{\frac{1}{5}(5x-4)-\frac{11}{5}}{5x-4}=\frac{1}{5}\left(1-\frac{11}{5x-4}\right)$. Тоді, застосувавши властивості **1°** та **2°**, матимемо

$$\int\frac{x-3}{5x-4}\,dx=\frac{1}{5}\int\left(1-\frac{11}{5x-4}\right)dx=0,2\left(\int dx-11\int\frac{dx}{5x+(-4)}\right)=$$

$$=0,2\left(x-11\cdot\frac{1}{5}\ln\left|5x+(-4)\right|\right)+C=0,2\ x-0,44\ \ln\left|5x-4\right|+C$$

(для обчислення другого інтеграла скористалися табличним інтегралом **II** та властивістю $\mathbf{3^o}$ ($k=5$, $b=-4$)). $\lrcorner$

51. $\displaystyle\int\frac{x^2+3x+7}{x+1}dx$.

$\ulcorner$ Підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб (степінь чисельника більший за степінь знаменника). Виділимо цілу частину:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^2+3x+7 & x+1 \\ \underline{x^2+x} & \overline{x+2} \\ -\,2x+7 & \\ \underline{2x+2} & \\ 5 & \end{array}\ ;\qquad \frac{x^2+3x+7}{x+1}=x+2+\frac{5}{x+1}.$$

Отже, $\displaystyle\int\frac{x^2+3x+7}{x+1}dx=\int\left(x+2+\frac{5}{x+1}\right)dx=$

$$=\frac{x^2}{2}+2x+5\ \ln\left|x+1\right|+C\ . \ \lrcorner$$

52. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4+x^2}$.

$\ulcorner$ Розкладемо підінтегральну функцію на доданки:

$$\frac{1}{x^4+x^2}=\frac{1}{\left(x^2+1\right)x^2}=\frac{\left(x^2+1\right)-x^2}{\left(x^2+1\right)x^2}=$$

$$=\frac{x^2+1}{\left(x^2+1\right)x^2}-\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}.$$

Тоді матимемо

$$\int\frac{dx}{x^4+x^2}=\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x+C\ . \ \lrcorner$$

53. $\displaystyle\int\left(x+1\right)^{10}x\,dx$.

$\ulcorner$ $\displaystyle\int\left(x+1\right)^{10}x\,dx=\int\left(x+1\right)^{10}\left(\left(x+1\right)-1\right)dx=$

$$=\int\left((x+1)^{11}-(x+1)^{10}\right)dx=\int(x+1)^{11}\,dx-\int(x+1)^{10}\,dx=$$

$$=\frac{(x+1)^{12}}{12}-\frac{(x+1)^{11}}{11}+C$$

(скористалися табличним інтегралом **I** та властивістю **3.2°** ($b=1$)). ┘

54. $\int\frac{4-x}{\sqrt{x-1}}dx$.

┌ $$\int\frac{4-x}{\sqrt{x-1}}dx=\int\frac{3-(x-1)}{\sqrt{x-1}}dx=\int\left(\frac{3}{\sqrt{x-1}}-\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}\right)dx=$$

$$=3\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}}-\int\sqrt{x-1}\,dx=3\cdot2\sqrt{x-1}-\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+C=$$

$$=6\sqrt{x-1}-\frac{2}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^{3}+C\,.$$

Тут скористалися прикладами **5**, **6** та властивістю **3.2°** ($b=-1$). Зауважимо також, що перший інтеграл можна просто обчислити за формулою з прикладу **39**. ┘

55. $\int\sin5x\,\cos2x\,dx$.

┌ Скориставшись формулою

$$\sin\alpha\,\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right]$$

та властивостями невизначеного інтеграла, дістанемо

$$\int\sin5x\,\cos2x\,dx=\int\frac{1}{2}\left[\sin(5x-2x)+\sin(5x+2x)\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int(\sin3x+\sin7x)\,dx=\frac{1}{3}\left(\int\sin3x\,dx+\int\sin7x\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\cos3x-\frac{1}{7}\cos7x\right)+C=-\frac{1}{6}\cos3x-\frac{1}{14}\cos7x+C\,.$$ ┘

56. $\int(4-\sin3x)^{2}\,dx$.

┌ $$\int(4-\sin3x)^{2}\,dx=\int\left(16-8\sin3x+\sin^{2}3x\right)dx=$$

$$=\int16\,dx-\int8\sin3x\,dx+\int\frac{1}{2}(1-\cos6x)\,dx=$$

$$=16x-8\int\sin3x\,dx+\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos6x\,dx=$$

$$=16x-8\cdot\frac{1}{3}\left(-\cos 3x\right)+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\sin 6x+C=$$

$$=16\frac{1}{2}\,x+\frac{8}{3}\cos 3x-\frac{1}{12}\sin 6x+C\,. \quad \rfloor$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Обчислити невизначені інтеграли:

57. $\int\sqrt{2}\,dx$.

58. $\int\frac{9dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

59. $\int\left(9x^5-\sqrt[5]{x}\right)dx$.

60. $\int 3^x\left(4+3^{1-x}\right)dx$.

61. $\int\mathrm{ctg}^2\,x\,dx$.

62. $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2dx$.

63. $\int\frac{x^4\,dx}{x^2+1}$.

64. $\int e^{3x}\,dx$.

65. $\int e^{-x}\,dx$.

66. $\int\cos\frac{x}{6}\,dx$.

67. $\int\frac{dx}{x+4}$.

68. $\int\frac{3dx}{x-9}$.

69 $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}}$.

70. $\int\frac{dx}{2\sqrt{x-16}}$.

71. $\int\frac{dx}{\left(6+5x\right)^3}$.

72. $\int\sqrt{9-4x}\,dx$.

73. $\int\frac{dx}{\cos^2\left(3x-7\right)}$.

74. $\int\frac{dx}{\sin^2\left(6-x\right)}$.

75. $\int\frac{dx}{9-5x^2}$.

76. $\int\sin^2 x\,dx$.

77. $\int\frac{10\,dx}{x^2-8x-9}$.

78. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$.

79. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+0,25}}$.

80. $\int \frac{x\ dx}{3x+2}$.

81. $\int \frac{3x^2-x+1}{x-2}dx$.

82. $\int \frac{8\,dx}{x^4-4x^2}$.

83. $\int \frac{x-5}{(x-4)^3}dx$.

84. $\int \sqrt[3]{x+1}\,x\,dx$.

85. $\int 2\cos(5x+2)\ \cos(4x-3)\,dx$.

86. $\int (\cos x-\sin x)^2\ dx$.

Відповіді:

57. $\sqrt{2}\,x+C$.

58. $9\arcsin\frac{x}{3}+C$.

59. $\frac{3}{2}x^6-\frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}}+C$.

60. $\frac{4}{\ln 3}3^x+3x+C$.

61. $-\mathrm{ctg}\,x-x+C$.

62. $x-\frac{1}{x}-2\ln|x|+C$.

63. $\frac{1}{3}x^3-x+\mathrm{arctg}\,x+C$.

64. $\frac{1}{3}e^{3x}+C$.

65. $-e^{-x}+C$.

66. $6\sin\frac{x}{6}+C$.

67. $\ln|x+4|+C$.

68. $3\ln|x-9|+C$.

69 $2\sqrt{x+1}+C$.

70. $\sqrt{x-16}+C$.

71. $-\frac{1}{10(5x+6)^2}+C$.

72. $-\frac{1}{6}(9-4x)^{\frac{3}{2}}+C$.

73. $\frac{1}{3}\mathrm{tg}(3x-7)+C$.

74. $\mathrm{ctg}(6-x)+C$.

75. $-\frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}x-3}{\sqrt{5}x+3}\right|+C$.

76. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$.

77. $\ln\left|\frac{x-9}{x+1}\right|+C$.

78. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x+1}{\sqrt{3}}+C$.

79. $\ln\left|x+1{,}5+\sqrt{x^2+3x+0{,}25}\right|+C$.

80. $\frac{x}{3}-\frac{2}{9}\ln|3x+2|+C$.

81. $1{,}5x^2+5x+11\ln|x-2|+C$.

82. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+\frac{2}{x}+C$.

83. $\frac{1}{2(x-4)^2}-\frac{1}{x-4}+C$.

84. $\frac{3}{7}(x+1)^{7/3}-\frac{3}{4}(x+1)^{4/3}+C$.

85. $\sin(x+5)+\frac{1}{9}\sin(9x-1)+C$.

86. $x+\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

3. Заміна змінної

Обчислення невизначених інтегралів методом заміни змінної ґрунтується на формулі

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx=F(\varphi(x))+C, \tag{1}$$

де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$; $\varphi'(x)$ – похідна функції $\varphi(x)$.

При застосуванні формули (1) на практиці зручно перейти до нової змінної t, поклавши $t=\varphi(x)$. Розглядаючи t як функцію змінної x, запишемо диференціал $dt=\varphi'(x)\,dx$. В результаті приходимо до інтеграла відносно змінної t: $\int f(t)\,dt=F(t)+C$. Поклавши у правій частині цієї рівності $t=\varphi(x)$, дістаємо остаточно $F(\varphi(x))+C$.

Якщо маємо інтеграл $\int p(x)\,dx$, то його обчислення методом заміни змінної зручно оформляти в загальному випадку наступним чином:

$$\int p(x)\,dx = \int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)\,dx = \begin{vmatrix} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)\,dx \end{vmatrix} =$$

$$= \int f(t)\,dt = F(t) + C = F\left(\varphi(x)\right) + C\,. \qquad (1')$$

Обчислити невизначені інтеграли:

87. $\int \sin^2 x \cos x\,dx$.

$\ulcorner$ Оскільки $(\sin x)' = \cos x$, то за формулою (1), яку застосовуємо у спосіб ($1'$), дістанемо

$$\int \sin^2 x \cos x\,dx = \begin{vmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{vmatrix} = \int t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

(обчислення інтеграла $\int t^2\,dt$ можна виконати як за аналогією з прикладом **3**, так і у вже відомій формулі $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$ покласти $x = t$). $\lrcorner$

88. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

$\ulcorner$ Оскільки $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, то за формулою (1) дістанемо

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \begin{vmatrix} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}\,dx = \frac{dx}{x} \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\ln x} + C$$

(для обчислення інтеграла $\int \frac{dt}{\sqrt{t}}$ скористалися прикладом **5**, в якому поклали $x = t$). $\lrcorner$

89. $\int e^x \cos\left(e^x\right)\,dx$.

$\ulcorner$ Оскільки $\left(e^x\right)' = e^x$, то за формулою (1) дістанемо

$$\int e^x \cos\left(e^x\right)\,dx = \int \cos\left(e^x\right)\cdot e^x\,dx = \begin{vmatrix} t = e^x \\ dt = e^x\,dx \end{vmatrix} =$$

$$=\int \cos t\ dt=\sin t+C=\sin\left(e^x\right)+C\ .\quad \lrcorner$$

90. $\int \frac{\cos x\ dx}{\sin^2 x}$.

$\ulcorner$ $$\int \frac{\cos x\ dx}{\sin^2 x}=\left|\begin{array}{l} t=\sin x \\ dt=\cos x\ dx \end{array}\right|=\int \frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{\sin x}+C$$

(скористалися прикладом **4**). $\lrcorner$

91. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\ dx$.

$\ulcorner$ Оскільки $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$, то дістанемо

$$\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\ dx=\left|\begin{array}{l} t=\operatorname{tg} x \\ dt=\frac{1}{\cos^2 x}\ dx \end{array}\right|=\int \sqrt{t}\ dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}(\operatorname{tg} x)^{\frac{3}{2}}+C$$

(скористалися прикладом **6**). $\lrcorner$

92. $\int \frac{6^{\operatorname{arctg} x}}{x^2+1}\ dx$.

$\ulcorner$ Оскільки $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{x^2+1}$, то дістанемо

$$\int \frac{6^{\operatorname{arctg} x}}{x^2+1}\ dx=\left|\begin{array}{l} t=\operatorname{arctg} x \\ dt=\frac{1}{x^2+1}\ dx \end{array}\right|=\int 6^t\ dt=\frac{6^t}{\ln 6}+C=\frac{1}{\ln 6}6^{\operatorname{arctg} x}+C$$

(скористалися табличним інтегралом **III** при $a=6$). $\lrcorner$

93. $\int \frac{(\arcsin x)^5}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$.

$\ulcorner$ Оскільки $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, то дістанемо

$$\int \frac{(\arcsin x)^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left| \begin{matrix} t = \arcsin x \\ dt = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{matrix} \right| = \int t^5\,dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{6}(\arcsin x)^6 + C$$

(скористалися табличним інтегралом **I** при $n = 5$). ┘

94. $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2+1}$.

┌ Помічаємо, що $(1-\cos x)' = 0-(-\sin x) = \sin x$. Тому за формулою (1)

$$\int \frac{\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2+1} = \left| \begin{matrix} t = 1-\cos x \\ dt = \sin x\,dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \operatorname{arctg}(1-\cos x) + C.$$ ┘

95. $\displaystyle\int \frac{2x+\cos x}{\sqrt{x^2+\sin x+1}}\,dx$.

┌ Помічаємо, що $(x^2+\sin x+1)' = 2x+\cos x$. Тому можемо застосувати формулу (1):

$$\int \frac{2x+\cos x}{\sqrt{x^2+\sin x+1}}\,dx = \left| \begin{matrix} t = x^2+\sin x+1 \\ dt = (2x+\cos x)\,dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{x^2+\sin x+1} + C.$$ ┘

96. $\displaystyle\int e^{x\ln x}(\ln x+1)\,dx$.

┌ Помічаємо, що $(x\cdot\ln x)' = 1\cdot\ln x + x\cdot\dfrac{1}{x} = \ln x + 1$. Тому

$$\int e^{x\ln x}(\ln x+1)\,dx = \left| \begin{matrix} t = x\ln x \\ dt = (\ln x+1)\,dx \end{matrix} \right| = \int e^t\,dt = e^t + C = e^{x\ln x} + C.$$ ┘

97. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{\sin^4 x+1}}$.

⌐ Зауважимо, що $\left(\sin^2 x\right)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$. Тому

$$\int \frac{\sin 2x\ dx}{\sqrt{\sin^4 x + 1}} = \int \frac{\sin 2x\ dx}{\sqrt{\left(\sin^2 x\right)^2 + 1}} = \left| \begin{matrix} t = \sin^2 x \\ dt = \sin 2x\ dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} =$$

$$= \ln\left(t + \sqrt{t^2 + 1}\right) + C = \ln\left(\sin^2 x + \sqrt{\sin^4 x + 1}\right) + C . \quad ⌋$$

Розглянемо ряд інтегралів, в яких підінтегральну функцію потрібно помножити (і поділити) на деяке число, щоб звести їх обчислення до формули (1).

Обчислити невизначені інтеграли:

98. $\int \frac{x\ dx}{x^2 - 1}$.

⌐ Оскільки $\left(x^2 - 1\right)' = 2x$, то виконавши тотожне перетворення підінтегральної функції, дістанемо

$$\int \frac{x\ dx}{x^2 - 1} = \int \frac{2x\ dx}{2\left(x^2 - 1\right)} = \left| \begin{matrix} t = x^2 - 1 \\ dt = 2x\ dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln\left|x^2 - 1\right| + C . \quad ⌋$$

99. $\int x^2 \sin\left(x^3\right) dx$.

⌐ Зауваживши, що $\left(x^3\right)' = 3x^2$, дістанемо

$$\int x^2 \sin\left(x^3\right) dx = \int \frac{1}{3} \sin\left(x^3\right) \cdot 3x^2\ dx = \left| \begin{matrix} t = x^3 \\ dt = 3x^2\ dx \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{3} \sin t\ dt =$$

$$= \frac{1}{3} \int \sin t\ dt = \frac{1}{3}\left(-\cos t\right) + C = -\frac{1}{3} \cos\left(x^3\right) + C . \quad ⌋$$

100. $\int \operatorname{tg} x\ dx$.

⌐ Нагадаємо, що $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Так як $\left(\cos x\right)' = -\sin x$, то маємо

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int (-1)\frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = \begin{vmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \end{vmatrix} = -\int \frac{dt}{t} =$$

$$= -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C. \quad \lrcorner$$

101. $\int \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{\sin^2 x}\,dx$.

$\ulcorner$ Зауваживши, що $(\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{-\sin^2 x}$, дістанемо

$$\int \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{\sin^2 x}\,dx = \int (-1)\frac{(\operatorname{ctg} x)^3}{-\sin^2 x}\,dx = \begin{vmatrix} t = \operatorname{ctg} x \\ dt = \dfrac{dx}{-\sin^2 x} \end{vmatrix} =$$

$$= -\int t^3\,dt = -\frac{t^4}{4} + C = -\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4} + C. \quad \lrcorner$$

102. $\int \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2}\,dx$.

$\ulcorner$ Зауваживши, що $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, дістанемо

$$\int \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2}\,dx = -\int \sin\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = \begin{vmatrix} t = \dfrac{1}{x} \\ dt = -\dfrac{1}{x^2}\,dx \end{vmatrix} =$$

$$= -\int \sin t\,dt = -(-\cos t) + C = \cos\frac{1}{x} + C. \quad \lrcorner$$

103. $\int \frac{4^x\,dx}{\cos^2 4^x}$.

$\ulcorner$ Оскільки $(4^x)' = 4^x \ln 4$, то маємо

$$\int \frac{4^x\,dx}{\cos^2 4^x}\,dx = \frac{1}{\ln 4}\int \frac{4^x \ln 4\,dx}{\cos^2 4^x} = \begin{vmatrix} t = 4^x \\ dt = 4^x \ln 4\,dx \end{vmatrix} =$$

$$=\frac{1}{\ln 4}\int\frac{dt}{\cos^2 t}=\frac{1}{\ln 4}\operatorname{tg} t+C=\frac{\operatorname{tg} 4^x}{\ln 4}+C\,. \quad \lrcorner$$

104. $\displaystyle\int\frac{\cos\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}\,dx\,.$

$\ulcorner$ Знайдемо похідну: $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)'=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Тому

$$\int\frac{\cos\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}\,dx=\frac{3}{2}\int\cos\sqrt[3]{x^2}\,\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\,dx=\left|\begin{array}{l}t=\sqrt[3]{x^2}\\ dt=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}\,dx\end{array}\right|=$$

$$=\frac{3}{2}\int\cos t\,dt=\frac{3}{2}\sin t+C=\frac{3}{2}\sin\sqrt[3]{x^2}+C\,. \quad \lrcorner$$

105. $\displaystyle\int\frac{(2x+1)\,dx}{2x^2+2x-5}\,.$

$\ulcorner$ Зауваживши, що $\left(2x^2+2x-5\right)'=4x+2=2(2x+1)$, знаходимо

$$\int\frac{(2x+1)\,dx}{2x^2+2x-5}=\frac{1}{2}\int\frac{(4x+2)\,dx}{2x^2+2x-5}=\left|\begin{array}{l}t=2x^2+2x-5\\ dt=(4x+2)\,dx\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln\left|2x^2+2x-5\right|+C\,. \quad \lrcorner$$

106. $\displaystyle\int\frac{3^x\,dx}{9^x-1}\,.$

$\ulcorner$ Виконавши тотожні перетворення підінтегральної функції, дістанемо

$$\int\frac{3^x\,dx}{9^x-1}=\int\frac{3^x\,dx}{\left(3^x\right)^2-1}=\frac{1}{\ln 3}\int\frac{3^x\ln 3\,dx}{\left(3^x\right)^2-1}=\left|\begin{array}{l}t=3^x\\ dt=3^x\ln 3\,dx\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\ln 3}\int\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\frac{1}{2\ln 3}\ln\left|\frac{3^x-1}{3^x+1}\right|+C\,. \quad \lrcorner$$

107. $\int \frac{\sin x\,dx}{3+\sin^2 x}$.

⌈ Скористаємося формулою $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$:

$$\int \frac{\sin x\,dx}{3+\sin^2 x} = \int \frac{\sin x\,dx}{4-\cos^2 x} = \begin{vmatrix} t=\cos x \\ dt=-\sin x\,dx \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{-dt}{4-t^2} = \int \frac{dt}{t^2-2^2} = \frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos x-2}{\cos x+2}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\frac{2-\cos x}{2+\cos x} + C. \quad ⌋$$

108. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x+7\cos^2 x}$.

⌈ Виконуючи тотожні перетворення та заміну змінної, дістанемо

$$\int \frac{dx}{4\sin^2 x+7\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\left(4\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+7\right)\cos^2 x} =$$

$$= \int \frac{dx}{\left(4\,\mathrm{tg}^2 x+7\right)\cos^2 x} = \begin{vmatrix} t=\mathrm{tg}\, x \\ dt=\dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{4t^2+7} =$$

$$= \int \frac{dt}{(2t)^2+\left(\sqrt{7}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}\,\mathrm{arctg}\frac{2t}{\sqrt{7}} + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{7}}\,\mathrm{arctg}\frac{2\,\mathrm{tg}\, x}{\sqrt{7}} + C. \quad ⌋$$

Вправи для самостійного розв’язання

Обчислити невизначені інтеграли:

109. $\int 2^{\sin x}\cos x\,dx$.

110. $\int \frac{(2x+5)\,dx}{\sqrt{x^2+5x+9}}$.

111. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x-4}}$.

112. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}$.

113. $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}\,dx$.

114. $\int \cos^3 x\,dx$.

115. $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+9}$.

116. $\int \operatorname{ctg} x\,dx$.

117. $\int \frac{\sin x}{e^{\cos x}}\,dx$.

118. $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$.

119. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}\,dx$.

120. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^{2x}+9}$.

121. $\int \frac{\cos x\,\sin x\,dx}{\cos^2 x-16}$.

122. $\int \frac{x^4\,dx}{\sin^2\left(x^5\right)}$.

123. $\int \frac{x^3\,dx}{x^4+1}$.

124. $\int \frac{x\,dx}{x^4+1}$.

125. $\int \frac{5^x\,dx}{\sqrt{1-25^x}}$.

126. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$.

127. $\int \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}\,dx$.

128. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{6-\cos^2 x}}$.

129. $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^2 x\left(9\cos^2 x-\sin^2 x\right)}}$.

130. $\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{3-4x-6x^2-4x^3-x^4}}$.

Відповіді:

109. $\frac{1}{\ln 2}2^{\sin x}+C$.

110. $2\sqrt{x^2+5x+9}+C$.

111. $\ln\left|\ln x+\sqrt{\ln^2 x-4}\right|+C$.

112. $-\frac{1}{2(\arcsin x)^2}+C$.

113. $0,25\,(\operatorname{arctg} x)^4+C$.

114. $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$.

115. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{3}+C$.

116. $\ln|\sin x|+C$.

117. $e^{-\cos x}+C$.

118. $-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$.

119. $-1{,}5\,(\cos x)^{\frac{2}{3}}+C$.

120. $\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+9\right)+C$.

121. $-\frac{1}{2}\ln\left(16-\cos^2 x\right)+C$.

122. $-0{,}2\ \mathrm{ctg}\left(x^5\right)+C$.

123. $\frac{1}{4}\ln\left(x^4+1\right)+C$.

124. $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(x^2\right)+C$.

125. $\frac{1}{\ln 5}\arcsin\left(5^x\right)+C$.

126. $2\,\mathrm{tg}\sqrt{x}+C$.

127. $-0{,}5\,e^{\frac{1}{x^2}}+C$.

128. $\ln\left(\sin x+\sqrt{\sin^2 x+5}\right)+C$.

129. $\arcsin\frac{\mathrm{tg}\,x}{3}+C$.

130. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{(x+1)^2}{2}+C$.

4. Інтегрування частинами

Обчислення невизначених інтегралів методом інтегрування частинами полягає у використанні формули

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du\ , \tag{2}$$

де u та v – функції змінної x; $du=u'(x)\,dx$, $dv=v'(x)\,dx$.

Якщо потрібно обчислити інтеграл $\int f(x)\,dx$, то підінтегральний вираз $f(x)\,dx$ слід представити у вигляді $u\,dv$ так, щоб інтеграл у правій частині формули (2) був простішим за заданий $\int f(x)\,dx=\int u\,dv$. Зауважимо, що функція v, яка фігурує у правій частині (2), знаходиться за очевидною формулою $v=\int v'(x)\,dx=\int dv$, яка означає, що функція $v(x)$ є первісною своєї похідної $v'(x)$. Звідси випливає, що функція v визначається неоднозначно.

Обчислити невизначені інтеграли:

131. $\int x\cos x\ dx$.

Γ Покладемо $u=x$, $dv=\cos x\ dx$. Тоді $du=(x)'\,dx=1\cdot dx=dx$, $v=\int dv=\int\cos x\ dx=\sin x$ (беремо заради простоти $C=0$). Застосовуючи формулу (2), дістанемо

$$\int x\cos x\ dx = x\cdot\sin x - \int \sin x\ dx =$$
$$= x\sin x - (-\cos x) + C = x\sin x + \cos x + C\ . \quad \lrcorner$$

Зауваження. Якщо для обчислення інтеграла $\int x\cos x\ dx$ покласти, наприклад, $u = \cos x$ і $dv = x\ dx$, то після застосування формули (2) дістанемо праворуч інтеграл $\int\left(-\frac{x^2}{2}\right)\sin x\ dx$, який <u>складніший</u> за заданий.

132. $\int (3x-1)e^x\ dx$.

$\ulcorner$ Покладемо $u = 3x-1$, $dv = e^x\ dx$. Тоді $du = (3x-1)'\ dx = 3dx$, $v = \int dv = \int e^x\ dx = e^x$. Застосовуючи формулу (2), дістанемо

$$\int (3x-1)e^x\ dx = (3x-1)e^x - \int e^x 3dx = (3x-1)e^x - 3\int e^x\ dx =$$
$$= (3x-1)e^x - 3e^x + C = e^x(3x-4) + C\ . \quad \lrcorner$$

133. $\int xe^{2x}\ dx$.

$\ulcorner$ Покладемо $u = x$, $dv = e^{2x}\ dx$. Тоді $du = dx$, $v = \int e^{2x}\ dx = \frac{1}{2}e^{2x}$. За формулою (2) знаходимо

$$\int xe^{2x}\ dx = x\frac{1}{2}e^{2x} - \int\frac{1}{2}e^{2x}\ dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\ dx =$$
$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x} + C = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C = \frac{1}{4}e^{2x}(2x-1) + C\ . \quad \lrcorner$$

134. $\int x^2\cos 3x\ dx$.

$\ulcorner$ Для обчислення даного інтеграла формулу (2) доведеться застосовувати двічі. Покладемо $u = x^2$, $dv = \cos 3x\ dx$. Тоді $du = (x^2)'\ dx = 2x\ dx$, $v = \int\cos 3x\ dx = \frac{1}{3}\sin 3x$. Застосуємо формулу (2):

$$\int x^2\cos 3x\ dx = x^2\frac{1}{3}\sin 3x - \int\frac{1}{3}\sin 3x\cdot 2x\ dx =$$
$$= \frac{1}{3}x^2\sin 3x - \frac{2}{3}\int x\sin 3x\ dx. \qquad (3)$$

Обчислимо інтеграл $\int x\sin 3x\,dx$. Покладемо $u = x$, $dv = \sin 3x\,dx$. Тоді $du = dx$, $v = \int \sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}\cos 3x$. Отже,

$$\int x\sin 3x\,dx = x\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) - \int\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)dx = -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\sin 3x + C = -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + C.$$

Підставляючи знайдений вираз у формулу (3) замість $\int x\sin 3x\,dx$, остаточно знаходимо

$$\int x^2\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}x^2\sin 3x - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x\right) + C =$$

$$= \frac{1}{3}x^2\sin 3x + \frac{2}{9}x\cos 3x - \frac{2}{27}\sin 3x + C =$$

$$= \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{27}\right)\sin 3x + \frac{2}{9}x\cos 3x + C. \quad \lrcorner$$

135. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$.

$\ulcorner$ Покладемо $u = x$, $dv = \frac{dx}{\cos^2 x}$. Тоді $du = dx$, $v = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$. За формулою (2) знаходимо

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = x\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\,dx = x\operatorname{tg} x - \left(-\ln|\cos x|\right) + C =$$

$$= x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$$

(скористалися прикладом **100**). $\lrcorner$

136. $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$.

$\ulcorner$ Покладемо $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = x\,dx$. Тоді $du = (\operatorname{arctg} x)'\,dx = \frac{1}{x^2+1}\,dx$, $v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x^2+1}{2}$ (тут зручно взяти $C = \frac{1}{2}$). За формулою (2)

$$\int x \operatorname{arctg} x\, dx = \operatorname{arctg} x \cdot \frac{x^2+1}{2} - \int \frac{x^2+1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1}\, dx =$$

$$= \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int dx = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right) \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + C . \quad \lrcorner$$

137. $\int \ln x\, dx$.

$\ulcorner$ Покладемо $u = \ln x$, $dv = dx$. Тоді $du = \frac{1}{x}\, dx$, $v = \int dx = x$. Застосовуючи формулу (2), дістанемо

$$\int \ln x\, dx = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \ln x - \int dx =$$

$$= x \ln x - x + C = x\left(\ln x - 1\right) + C . \quad \lrcorner$$

138. $\int \frac{\ln\left(x-1\right)}{x^2}\, dx$.

$\ulcorner$ Покладемо $u = \ln\left(x-1\right)$, $dv = \frac{dx}{x^2}$. Тоді $du = \left(\ln\left(x-1\right)\right)'\, dx = \frac{1}{x-1}\, dx$, $v = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$. За формулою (2)

$$\int \frac{\ln\left(x-1\right)}{x^2}\, dx = \ln\left(x-1\right) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - \int \left(-\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x-1}\, dx =$$

$$= -\frac{\ln\left(x-1\right)}{x} + \int \frac{dx}{x\left(x-1\right)} . \qquad (4)$$

Обчислимо інтеграл у правій частині формули (4). Для цього використаємо прийом розкладу підінтегральної функції на доданки (див. приклад **52**):

$$\int \frac{dx}{x\left(x-1\right)} = \int \frac{x-\left(x-1\right)}{x\left(x-1\right)} dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x} = \ln\left|x-1\right| - \ln\left|x\right| + C = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C .$$

Підставляючи знайдений вираз у формулу (4), остаточно знаходимо

$$\int \frac{\ln\left(x-1\right)}{x^2}\, dx = -\frac{\ln\left(x-1\right)}{x} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C . \quad \lrcorner$$

139. $\int \arcsin x\, dx$.

$\ulcorner$ Покладемо $u = \arcsin x$, $dv = dx$. Тоді $du = (\arcsin x)'\, dx = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$, $v = \int dx = x$. За формулою (2)

$$\int \arcsin x\, dx = \arcsin x \cdot x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx. \tag{5}$$

Обчислимо інтеграл у правій частині (5) методом заміни змінної:

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{vmatrix} t = 1-x^2 \\ dt = -2x\, dx \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Підставляючи знайдений вираз у формулу (5), остаточно знаходимо

$$\int \arcsin x\, dx = x\arcsin x - \left(-\sqrt{1-x^2}\right) + C = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \lrcorner$$

140. $\int \operatorname{arctg} x\, dx$.

$\ulcorner$ Покладемо $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$. Тоді $du = \dfrac{1}{x^2+1}\, dx$, $v = x$. Застосовуючи формулу (2) і виконуючи заміну змінної, дістанемо

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx = \operatorname{arctg} x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x^2+1}\, dx = \begin{vmatrix} t = x^2+1 \\ dt = 2x\, dx \end{vmatrix} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} =$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|t| + C = x\operatorname{arctg} x - 0{,}5\,\ln\left(x^2+1\right) + C. \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Обчислити невизначені інтеграли:

141. $\int x\sin 5x\, dx$.

142. $\int (3-4x)\cos 2x\, dx$.

143. $\int xe^{-x}\, dx$.

144. $\int x^2 e^x\, dx$.

145. $\int \dfrac{x\cos x}{\sin^3 x}\, dx$.

146. $\int x\ln x\, dx$.

147. $\int \ln\left(x^2+4\right) dx$.

148. $\int \arccos x\, dx$.

149. $\int \operatorname{arcctg} x \, dx$. **150.** $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2+1}} \, dx$.

Відповіді:

141. $\frac{\sin 5x}{25} - \frac{x}{5}\cos 5x + C$.

142. $\frac{3-4x}{2}\sin 2x - \cos 2x + C$.

143. $-e^{-x}(x+1)+C$.

144. $(x^2-2x+2)e^x + C$.

145. $-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x} + \operatorname{ctg} x\right) + C$.

146. $\frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C$.

147. $x\ln(x^2+4) - 2x + 4\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$.

148. $x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$.

149. $x\operatorname{arcctg} x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$.

150. $\sqrt{x^2+1}\cdot\operatorname{arctg} x - \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$.

5. Додаткові вправи на інтегрування функцій

1°. Розглянемо ряд інтегралів, для обчислення яких використовується як метод безпосереднього інтегрування, так і метод заміни змінної.

151. $I = \int \frac{(2x+3)\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Γ Перший доданок у чисельнику – це з точністю до знака похідна квадратичної функції: $\left(4-x^2\right)' = -2x$. Тому поділимо почленно чисельник на знаменник і скористаємося властивостями невизначеного інтеграла:

$$I=\int\left(\frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{3}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx=\int\frac{2xdx}{\sqrt{4-x^2}}+3\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=I_1+3I_2\,.$$

Перший інтеграл обчислимо методом заміни змінної, а другий зведемо до табличного:

$$I_1=\int\frac{2xdx}{\sqrt{4-x^2}}=\begin{vmatrix}t=4-x^2\\ dt=-2xdx\end{vmatrix}=-\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-2\sqrt{t}+C=-2\sqrt{4-x^2}+C\,;$$

$$I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{2}+C\,.$$

Остаточно маємо

$$I=-2\sqrt{4-x^2}+3\arcsin\frac{x}{2}+C\,.\quad \lrcorner$$

152. $I=\int\frac{(4x-5)dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}\,.$

$\ulcorner$ Знайдемо похідну квадратичної функції: $\left(x^2-6x+13\right)'=2x-6\,.$ Виділимо у чисельнику доданок, який містить цю похідну: $4x-5=2(2x-6)+7$. Далі діємо так само, як у попередньому прикладі – ділимо почленно чисельник на знаменник і отримуємо

$$I=\int\left(\frac{2(2x-6)}{\sqrt{x^2-6x+13}}+\frac{7}{\sqrt{x^2-6x+13}}\right)dx=$$

$$=2\int\frac{(2x-6)dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}+7\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}=2I_1+7I_2\,.$$

Перший інтеграл обчислимо методом заміни змінної, а для другого інтеграла використаємо прийом виділення повного квадрата:

$$I_1=\begin{vmatrix}t=x^2-6x+13\\ dt=(2x-6)dx\end{vmatrix}=\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{x^2-6x+13}+C\,;$$

$$x^2-6x+13=x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2+4=(x-3)^2+4\,,$$

$$I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+4}}=\ln\left|x-3+\sqrt{(x-3)^2+4}\right|+C=$$

$$=\ln\left(x-3+\sqrt{x^2-6x+13}\right)+C$$

(скористалися табличним інтегралом **XI** $(a=4)$ та властивістю **3.2°** $(b=-3)$ невизначеного інтеграла).

Остаточно маємо

$$I = 4\sqrt{x^2-6x+13} + 7\ln\left(x-3+\sqrt{x^2-6x+13}\right) + C. \quad \lrcorner$$

153. $I = \int \frac{6x^2+22x-1}{x^2+4x+5}dx$.

$\ulcorner$ Підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб. Виділимо цілу частину:

$$\begin{array}{r|l} -\;6x^2+22x-1 & x^2+4x+5 \\ \cline{2-2} 6x^2+24x+30 & 6 \\ \cline{1-1} -2x-31 & \end{array} \quad ; \qquad \frac{6x^2+22x-1}{x^2+4x+5} = 6 - \frac{2x+31}{x^2+4x+5}.$$

Тоді маємо

$$I = \int\left(6 - \frac{2x+31}{x^2+4x+5}\right)dx = 6x - \int\frac{2x+31}{x^2+4x+5}dx.$$

Оскільки $\left(x^2+4x+5\right)' = 2x+4$, то аналогічно до попереднього прикладу дістанемо

$$I = 6x - \int\frac{(2x+4)+27}{x^2+4x+5}dx = 6x - \int\frac{(2x+4)dx}{x^2+4x+5} -$$

$$-27\int\frac{dx}{x^2+4x+5} = 6x - I_1 - 27I_2.$$

Перший інтеграл обчислимо методом заміни змінної, а для другого інтеграла використаємо прийом виділення повного квадрата:

$$I_1 = \left|\begin{matrix} t = x^2+4x+5 \\ dt = (2x+4)dx \end{matrix}\right| = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x^2+4x+5\right| + C;$$

$$I_2 = \int\frac{dx}{(x+2)^2+1} = \operatorname{arctg}(x+2) + C.$$

Остаточно маємо

$$I = 6x - \ln\left(x^2+4x+5\right) - 27\operatorname{arctg}(x+2) + C. \lrcorner$$

154. $\int\frac{dx}{x^3+x}$.

$\ulcorner$ Розкладемо підінтегральну функцію на доданки:

$$\frac{1}{x^3+x}=\frac{1}{\left(x^2+1\right)x}=\frac{\left(x^2+1\right)-x^2}{\left(x^2+1\right)x}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}.$$

Тоді матимемо

$$\int\frac{dx}{x^3+x}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{x}{x^2+1}dx=$$

$$=\begin{vmatrix}t=x^2+1\\dt=2xdx\end{vmatrix}=\ln|x|-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|t|+C=$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C. \quad \lrcorner$$

2°. Обчислення невизначених інтегралів методом заміни змінної інколи зручно виконувати, використовуючи відповідну *підстановку* $x=\varphi(t)$, де функція φ має обернену функцію φ^{-1} на певному проміжку:

$$\int f(x)\,dx=\int f\left(\varphi(t)\right)\,\varphi'(t)\,dt, \tag{6}$$

де після інтегрування слід покласти $t=\varphi^{-1}(x)$.

155. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0)$.

$\ulcorner$ Застосуємо підстановку $x=a\sin t$, $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$. Обернена функція $t=\arcsin\frac{x}{a}$. Матимемо

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\begin{vmatrix}x=a\sin t\\dx=a\cos t\,dt\end{vmatrix}=\int\sqrt{a^2-(a\sin t)^2}\,a\cos t\,dt=$$

$$=a^2\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt=a^2\int\sqrt{\cos^2 t}\cos t\,dt=$$

$$=a^2\int\cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right)+C=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C. \quad \lrcorner$$

До застосування формули (6) зводиться також інтегрування функцій, що містять ірраціональності, зокрема виду $\sqrt[m]{kx+b}$ $(k \neq 0)$. У цьому випадку слід покласти $\sqrt[m]{kx+b} = t$, звідки $x = \frac{1}{k}\left(t^m - b\right)$, $dx = \frac{m}{k} t^{\,m-1}\, dt$.

156. $\int \frac{\sqrt{x}\, dx}{x-3}$.

$$\ulcorner \quad \int \frac{\sqrt{x}\, dx}{x-3} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array} \right| = \int \frac{t \cdot 2t\, dt}{t^2-3} = 2\int \frac{t^2 dt}{t^2-3} = 2\int \frac{\left(t^2-3\right)+3}{t^2-3} dt =$$

$$= 2\int \left(1 + \frac{3}{t^2-3}\right) dt = 2\left(\int dt + 3\int \frac{dt}{t^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} \right) =$$

$$= 2\left(t + 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln\left| \frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}} \right| \right) + C = 2t + \sqrt{3} \ln\left| \frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}} \right| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} + \sqrt{3}\, \ln\left| \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} \right| + C . \quad \lrcorner$$

157. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}-2}$.

$$\ulcorner \quad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}-2} = \left| \begin{array}{c} \sqrt[3]{x+1} = t \\ x = t^3 - 1 \\ dx = 3t^2 dt \end{array} \right| = \int \frac{3t^2\, dt}{t-2} = 3\int \frac{\left(t^2-4\right)+4}{t-2} dt =$$

$$= 3\int \frac{(t+2)(t-2)+4}{t-2} dt = 3\int \left(t + 2 + \frac{4}{t-2} \right) dt = 3\left(\frac{t^2}{2} + 2t + 4\ln|t-2| \right) + C =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 + 6\sqrt[3]{x+1} + 12\, \ln\left|\sqrt[3]{x+1} - 2\right| + C . \quad \lrcorner$$

Формулу (6) можна застосовувати до інтегрування функцій, що є раціональними функціями від $\sin x$ та $\cos x$. У загальному випадку використовується підстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, звідки $x=2\operatorname{arctg}t$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$. При цьому $\sin x$ та $\cos x$ виражаються через t так: $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

158. $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$.

$$\ulcorner\quad \int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}=\left|\begin{matrix}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{matrix}\right|=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}=$$

$$=2\int\frac{dt}{4t-\left(1-t^2\right)+5\left(1+t^2\right)}=2\int\frac{dt}{6t^2+4t+4}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2+\frac{2}{3}t+\frac{2}{3}}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{9}}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{3}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3t+1}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C.\quad\lrcorner$$

3º. Обчислення невизначених інтегралів методом інтегрування частинами інколи можна звести до лінійного рівняння відносно заданого інтеграла. Продемонструємо це на двох прикладах.

159. $I=\int e^x\cos\frac{x}{2}\,dx$.

$$\ulcorner\quad I=\int e^x\cos\frac{x}{2}\,dx=\left|\begin{matrix}u=e^x,\ dv=\cos\frac{x}{2}dx\\ du=e^xdx,\ v=2\sin\frac{x}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$= e^x \cdot 2\sin\frac{x}{2} - 2\int \sin\frac{x}{2}\, e^x\, dx = \left| \begin{matrix} u = e^x,\ dv = \sin\frac{x}{2}dx \\ du = e^x dx,\ v = -2\cos\frac{x}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= 2e^x \sin\frac{x}{2} - 2\left[e^x\left(-2\cos\frac{x}{2}\right) + 2\int \cos\frac{x}{2}\, e^x dx \right] =$$

$$= 2e^x \sin\frac{x}{2} + 4e^x \cos\frac{x}{2} - 4\int e^x \cos\frac{x}{2}\, dx =$$

$$= 2e^x \left(\sin\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2} \right) - 4I\ .$$

Звідси

$$5I = 2e^x \left(\sin\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2} \right) + C\,,$$

$$I = \frac{2}{5}e^x \left(\sin\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2} \right) + C\ . \quad \lrcorner$$

160. $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \quad (a > 0)$.

$\ulcorner$ Цей інтеграл було обчислено раніше методом заміни змінної (приклад **155**). Обчислимо його методом інтегрування частинами.

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left| \begin{matrix} u = \sqrt{a^2 - x^2},\ dv = dx \\ du = \dfrac{-xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}},\ v = x \end{matrix} \right| =$$

$$= \sqrt{a^2 - x^2}\ x - \int x \frac{-xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{\left(a^2 - x^2\right) - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\ .$$

Звідси

$$2I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} + C\ ,$$

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C\ . \quad \lrcorner$$

Вправи для самостійного розв'язання

Обчислити невизначені інтеграли:

161. $\int \frac{6-5x}{x^2+16}\,dx$.

162. $\int \frac{4x+3\sqrt{\ln(2x-1)}}{2x-1}\,dx$.

163. $\int \frac{2x^3-x+4}{x^2-2x+10}\,dx$.

164. $\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$ (підстановка $x = \operatorname{tg} t$).

165. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$.

166. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}$.

167. $\int \frac{dx}{\sin x}$.

168. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.

169. $\int e^{2x}\sin x\ dx$.

170. $\int \sqrt{x^2+a}\ dx$ ($a \neq 0$).

Відповіді:

161. $\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{4} - \frac{5}{2}\ln\left(x^2+16\right) + C$.

162. $2x + \ln(2x-1) + \left(\ln(2x-1)\right)^{3/2} + C$.

163. $x^2 + 4x - \frac{13}{2}\ln\left(x^2-2x+10\right) - \frac{49}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3} + C$.

164. $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C$.

165. $2\left(\sqrt{x-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\right) + C$.

166. $3\left(\sqrt[3]{x} + \ln\left|\sqrt[3]{x}-1\right|\right) + C$.

167. $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$.

168. $\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|+C$.

169. $\frac{1}{5}e^{2x}\left(2\sin x-\cos x\right)+C$.

170. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C$.