Розділ 8. ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

1. Основні поняття

1.1. Поняття функції кількох змінних

Змінну величину z називають *функцією двох змінних* $x,\ y$, якщо кожній парі їх значень $(x;y)$ із даної області площини поставлено у відповідність єдине значення z. Позначення: $z=f(x,\ y)$. Змінні $x,\ y$ називають *аргументами* або *незалежними змінними*.

Аналогічно означуються функції трьох та більшого числа змінних.

1. Виразити об'єм конуса V як функцію його твірної x і радіуса основи y.

⌜ Із геометрії відомо, що об'єм конуса $V=\frac{1}{3}\pi y^2\cdot h$, де h – висота конуса. Але $h=\sqrt{x^2-y^2}$. Тому $V=\frac{1}{3}\pi y^2\sqrt{x^2-y^2}$. Це і є шукана функціональна залежність. ⌟

Значення функції $z=f(x,\ y)$ у точці $P(a;\ b)$, тобто при $x=a$ і $y=b$, позначається $f(a,\ b)$ або $f(P)$.

2. Знайти $f(2,\ -3)$, якщо $f(x,\ y)=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$.

⌜ Підставляючи у функцію $x=2$ і $y=-3$, знаходимо

$$f(2,\ -3)=\frac{2^2+(-3)^2}{2\cdot 2\cdot(-3)}=-\frac{13}{12}.\ ⌟$$

1.2. Область визначення функції

Під *областю визначення* функції $z=f(x,\ y)$ розуміють сукупність точок $(x;y)$ площини xOy, в яких задана функція визначена, тобто набуває певних дійсних значень.

3. Знайти область визначення функції $z=x^2y+4x-y$.

$\ulcorner$ У даному прикладі вираз має числовий зміст при довільних значеннях x і y. Тому функція визначена на всій площині. $\lrcorner$

4. Знайти область визначення функції

$$z = \frac{x+y}{2x-y}.$$

$\ulcorner$ Вираз втрачає зміст лише при тих значеннях x і y, при яких знаменник перетворюється на нуль. Тому область визначення заданої функції є вся площина, з якої видалена пряма $y = 2x$. $\lrcorner$

5. Знайти область визначення функції

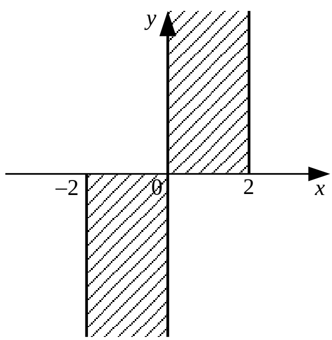
$$z = \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$$

$\ulcorner$ Функція має дійсні значення, якщо $4-x^2-y^2>0$ або $x^2+y^2<4$. Останню нерівність задовольняють координати точок, що знаходяться всередині кола з центром у початку координат і радіусом 2. $\lrcorner$

6. Знайти область визначення функції

$$z = \arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{xy}.$$

$\ulcorner$ Перший доданок функції визначений при $-1 \le \frac{x}{2} \le 1$ або $-2 \le x \le 2$. Другий доданок має дійсні значення, якщо $xy \ge 0$, тобто у двох випадках: при $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ або при $\begin{cases} x \le 0 \\ y \le 0 \end{cases}$. Область визначення всієї функції зображена на рисунку.



$\lrcorner$

Вправи для самостійного розв'язання

Знайти області визначення функцій:

7. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

8. $z=1+\sqrt{-(x-y)^2}$.

9. $z=\ln(x+y)$.

10. $z=x+\arccos y$.

11. $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$.

Відповіді:

7. Одиничний круг з центром у початку координат, включно з колом $\left(x^2+y^2\le 1\right)$.

8. Бісектриса $y=x$ I і III координатних кутів.

9. Півплощина, що розташована над прямою $x+y=0$ $\left(x+y>0\right)$.

10. Смуга, що обмежена прямими $y=\pm 1$, включно з прямими $\left(-1\le y\le 1\right)$.

11. Квадрат, що утворюють відрізки прямих $x=\pm 1$ і $y=\pm 1$, включно з його сторонами $\left(-1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1\right)$.

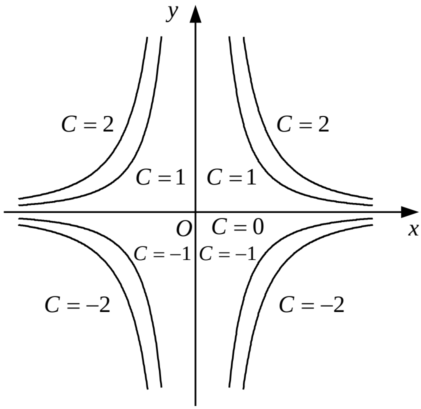
1.3. Лінії і поверхні рівня функції

Лінією рівня функції $z=f(x,\ y)$ називається така лінія на площині xOy, у точках якої функція набуває сталого значення $z=C$.

Поверхнею рівня функції трьох аргументів $u=f(x,\ y,\ z)$ називається така поверхня, у точках якої функція набуває сталого значення $u=C$.

12. Побудувати лінії рівня функції $z=x^2y$.

Γ Рівняння ліній рівня має вигляд $x^2y=C$ або $y=\dfrac{C}{x^2}$. Покладаючи $C=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\dots$, отримаємо сім'ю ліній рівня зображених на рисунку.



┘

13. Знайти поверхні рівня функцій трьох незалежних змінних.

а) $u = x + y + z$; б) $u = x^2 + y^2 + z^2$.

┌ а) Рівняння поверхонь рівня має вигляд $x + y + z = C$. Покладаючи $C = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, отримаємо площини, що паралельні площині $x + y + z = 0$.

б) Рівняння поверхонь рівня має вигляд $x^2 + y^2 + z^2 = C$. Надаючи C додатних значень, отримаємо концентричні сфери з центром у початку координат. ┘

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Побудувати лінії рівня даних функцій:

14. $z = x + y$. **15.** $z = x^2 + y^2$.

16. $z = x^2 - y^2$.

Відповіді:

14. Лінії рівня – прямі, що паралельні до прямої $x + y = 0$.

15. Лінії рівня – концентричні кола з центром у початку координат.

16. Лінії рівня – рівнобічні гіперболи.

2. Границя і неперервність функції кількох змінних

Число A називають *границею* функції $z = f(x, y)$ у точці $P(a;b)$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$, що для всіх точок $P'(x;y)$, які задовольняють умову $0 < \rho(P, P') < \delta$ ($\rho(P, P') = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ – відстань між P та P'), виконується нерівність

$$\left| f(x, y) - A \right| < \varepsilon .$$

У цьому випадку пишуть

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A .$$

Зауваження. Згідно з означенням границя функції $z = f(x, y)$ у точці P не залежить від способу наближення змінної точки P', наприклад, вздовж тієї чи іншої прямої.

Функція $z = f(x, y)$ називається *неперервною у точці* $P(a;b)$, якщо

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = f(a, b) .$$

Функція, що неперервна в усіх точках деякої області, називається *неперервною на цій області*.

Порушення умов неперервності для функції $f(x, y)$ можуть відбуватися як в окремих точках (ізольована точка розриву), так і у точках, що утворюють одну або декілька ліній (лінії розриву), а іноді і більш складні геометричні образи.

17. Обчислити границю $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} (1 + xy)^{\frac{2}{x^2 + xy}}$.

⌈ Подамо функцію у вигляді $\left[(1 + xy)^{\frac{1}{xy}} \right]^{\frac{2y}{x+y}}$. Оскільки $z = xy \to 0$ при $\begin{pmatrix} x \to 0 \\ y \to 2 \end{pmatrix}$, то $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} (1 + xy)^{\frac{1}{xy}} = \lim\limits_{z \to 0} (1 + z)^{\frac{1}{z}} = e$. Крім того, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \frac{2y}{x + y} = 2$. Тому шукана границя дорівнює e^2. ⌋

18. Чи існує границя $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$?

⌈ Нехай точка $M(x;y)$ прямує до точки $O(0;0)$ вздовж прямої $y=kx$, що проходить через точку O. Тоді отримаємо

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

Таким чином, наближаючись до точки $O(0;0)$ вздовж різних прямих, отримаємо різні граничні значення. З цього випливає, що границя даної функції у точці $O(0;0)$ не існує (див. зауваження вище). ⌋

19. Обчислити границю $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

⌈ Покладемо $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Тоді $\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=r\cos^2\varphi\sin\varphi$.

Оскільки функція $\cos^2\varphi\sin\varphi$ обмежена, то

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}r\cos^2\varphi\sin\varphi=0. \quad ⌋$$

20. Довести, що функція $u=\dfrac{e^{x^2-y^2}}{1+\sin^4\left(x^2+3xy+y^2\right)}$ неперервна при всіх значеннях x і y.

⌈ Функції x^2-y^2 і $x^2+3xy+y^2$ неперервні при всіх значеннях x і y як многочлени від x і y. За теоремою про неперервність суперпозиції неперервних функцій випливає, що $e^{x^2-y^2}$ і $1+\sin^4\left(x^3+3xy+y^2\right)$ є також неперервними. При цьому $1+\sin^4\left(x^2+3xy+y^2\right)\neq 0$, а тому і задана функція є неперервною при всіх значення x і y. ⌋

21. Знайти точки розриву функції $u=\dfrac{x^2+y^2}{\left(x^2-y\right)\left(x+3y\right)}$.

⌈ Функція має розрив у точках, в яких знаменник

$\left(x^2-y\right)\cdot\left(x+3y\right)$ перетворюється у нуль. Розв'язуючи рівняння $\left(x^2-y\right)\cdot\left(x+3y\right)=0$ відносно y, отримаємо $y=x^2$, $y=-\dfrac{x}{3}$. Отже, задана функція має розрив на прямій $y=-\dfrac{x}{3}$ і на параболі $y=x^2$. ⌋

22. Знайти точки розриву функції $u=\dfrac{1}{\sin^2\pi x+\sin^2\pi y}$.

⌈ Прирівнюючи знаменник до нуля, отримуємо рівняння $\sin^2\pi x+\sin^2\pi y=0$. Це рівняння рівносильне системі $\begin{cases}\sin\pi x=0\\ \sin\pi y=0\end{cases}$, з якої знаходимо, що x і y цілі числа. Отже, функція розривна в усіх точках вигляду $M\left(m;n\right)$, де m, n – цілі числа. ⌋

Вправи для самостійного розв'язання

Знайти границі:

23. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x^2+y^2\right)\cdot\sin\dfrac{1}{xy}$.

24. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

25. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{x}$.

26. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x$.

Знайти точки розриву функцій:

27. $u=\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

28. $u=\ln\left(4-x^2-y^2\right)$.

29. $u=\dfrac{1}{x^2+y^2-z^2}$.

30. $u=\sin\dfrac{x}{y}$.

Відповіді:

23. 0.

24. 0.

25. 2.

26. e^k.

27. $O\left(0;\,0\right)$.

28. Всі точки кола $x^2+y^2=4$.

29. Всі точки конічної поверхні $x^2+y^2=z^2$.

30. Всі точки прямої $y=0$.

3. Частинні похідні функції кількох змінних

За означенням *частинна похідна* функції $z = f(x, y)$ у точці $P(x; y)$ *по змінній* x –

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Частинна похідна по змінній y –

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Поряд з позначеннями $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ використовують також інші позначення – відповідно z'_x, $f'_x(x, y)$ та z'_y, $f'_y(x, y)$.

З означення частинних похідних випливає, що для їх знаходження можна використовувати відомі формули обчислення похідних функцій однієї змінної, вважаючи іншу змінну сталою.

Аналогічно означуються і знаходяться частинні похідні функцій трьох та більшого числа змінних.

Знайти частинні похідні функцій:

31. $z = 3x^2 y + x^2 - y^2 + 5$.

⌈ Вважаючи y сталою, знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3y \cdot \left(x^2\right)'_x + \left(x^2\right)'_x - \left(y^2\right)'_x + (5)'_x = 3y \cdot 2x + 2x - 0 + 0 = 6xy + 2x.$$

Вважаючи x сталою, знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 \cdot (y)'_y + \left(x^2\right)'_y - \left(y^2\right)'_y + (5)'_y = 3x^2 \cdot 1 + 0 - 2y + 0 =$$

$$= 3x^2 - 2y. \quad ⌋$$

32. $z = \frac{y}{x}$.

⌈ Вважаючи y сталою, знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{y}{x}\right)'_x = y \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'_x = y \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2}.$$

Вважаючи x сталою, знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{y}{x}\right)_y'=\frac{1}{x}\cdot(y)_y'=\frac{1}{x}\cdot 1=\frac{1}{x}. \quad ⌋$$

33. $z=2e^x y+y^3-x^3y+y-x-1$.

⌈ Вважаючи y сталою, знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(2e^x\cdot y+y^3-x^3y+y-x-1\right)_x'=$$

$$=2y\cdot\left(e^x\right)_x'-y\cdot\left(x^3\right)_x'-(x)_x'=2ye^x-y\cdot 3x^2-1=$$

$$=2ye^x-3yx^2-1.$$

Вважаючи x сталою, знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(2e^x\cdot y+y^3-x^3y+y-x-1\right)_y'=$$

$$=2e^x(y)_y'-\left(y^3\right)_y'-x^3\cdot(y)_y'+(y)_y'=2e^x+3y^2-x^3+1. \quad ⌋$$

34. $z=5x\sin y-\cos x+3$.

⌈ $$\frac{\partial z}{\partial x}=(5x\sin y-\cos x+3)_x'=5\sin y(x)_x'-(\cos x)_x'=$$

$$=5\sin y+\sin x.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(5x\sin y-\cos x+3)_y'=5x(\sin y)_y'=5x\cos y. \quad ⌋$$

35. $z=x^3y+e^yx-xy+x^2-y^2$.

⌈ $$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^3y+e^yx-xy+x^2-y^2\right)_x'=y\cdot\left(x^3\right)_x'+e^y\cdot(x)_x'-$$

$$-y\cdot(x)_x'+\left(x^2\right)_x'=3yx^2+e^y-y+2x.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^3y+e^yx-xy+x^2-y^2\right)_y'=x^3\cdot(y)_y'+x\cdot\left(e^y\right)_y'-x(y)_y'-\left(y^2\right)_y'=$$

$$=x^3+xe^y-x-2y. \quad ⌋$$

36. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

⌈ Враховуючи правило диференціювання складної функції, дістанемо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)_x'=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)_x'=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}\cdot(x)_x'=$$

$$=\frac{y^2}{y^2+x^2}\cdot\frac{1}{y}\cdot 1=\frac{y^2}{\left(y^2+x^2\right)\cdot y}=\frac{y}{y^2+x^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)_y'=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)_y'=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot x\cdot\left(\frac{1}{y}\right)_y'=$$

$$=\frac{y^2}{y^2+x^2}\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)=\frac{-y^2x}{\left(y^2+x^2\right)\cdot y^2}=\frac{-x}{y^2+x^2}. \quad \lrcorner$$

37. $z=\sqrt{x^2-y^2}$.

$\ulcorner$ Враховуючи правило диференціювання складної функції, дістанемо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)_x'=\frac{1}{2\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\left(x^2-y^2\right)_x'=\frac{1}{2\sqrt{x^2-y^2}}\cdot 2x=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)_y'=\frac{1}{2\sqrt{x^2-y^2}}\cdot(-2y)=\frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}. \quad \lrcorner$$

38. $z=\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)$.

$\ulcorner$ $$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)\right)_x'=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)_x'=\operatorname{ctg}\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)_x'=$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{y}}{\sin\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}\cdot 1=\frac{1}{\sin\frac{x}{y}\cdot\cos\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{y\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{2x}{y}}=\frac{2}{y\cdot\sin\frac{2x}{y}}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)\right)_y'=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)_y'=\operatorname{ctg}\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)_y'=$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{y}}{\sin\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)=\frac{-x}{y^2\cdot\sin\frac{x}{y}\cdot\cos\frac{x}{y}}=\frac{-x}{y^2\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{2x}{y}}=$$

$$=\frac{-2x}{y^2\cdot\sin\frac{2x}{y}}.\quad \lrcorner$$

39. $z=e^{\sin\frac{y}{x}}$.

$\ulcorner$ $$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(e^{\sin\frac{y}{x}}\right)'_x=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\left(\sin\frac{y}{x}\right)'_x=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_x=$$

$$=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot y\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'_x=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot y\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-y\cdot e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}}{x^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(e^{\sin\frac{y}{x}}\right)'_y=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\left(\sin\frac{y}{x}\right)'_y=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_y=$$

$$=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot(y)'_y=e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot 1=\frac{e^{\sin\frac{y}{x}}\cdot\cos\frac{y}{x}}{x}.\quad \lrcorner$$

40. $u=x^3y^2z+2x-3y+z+5$.

$\ulcorner$ Вважаючи y та z сталими, знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(x^3y^2z+2x-3y+z+5\right)'_x=y^2z\left(x^3\right)'_x+(2x)'_x-(3y)'_x+(z)'_x+$$

$$+(5)'_x=y^2z\cdot 3x^2+2-0+0+0=3x^2y^2z+2.$$

Вважаючи x та z сталими, знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(x^3y^2z+2x-3y+z+5\right)'_y=x^3z\left(y^2\right)'_y+(2x)'_y-(3y)'_y+(z)'_y+$$

$$+(5)'_y=x^3\cdot z\cdot 2y+0-3+0+0=2x^3yz-3.$$

Вважаючи x та y сталими, знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(x^3y^2z+2x-3y+z+5\right)'_z=x^3y^2(z)'_z+(2x)'_z-(3y)'_z+(z)'_z+$$

$$+(5)'_z=x^3y^2\cdot 1+0-0+1+0=x^3y^2+1.\quad \lrcorner$$

41. $u = z^{xy}$.

$\ulcorner$ $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \left(z^{xy}\right)'_x = z^{xy} \cdot \ln z \cdot \left(xy\right)'_x = z^{xy} \cdot \ln z \cdot y \cdot \left(x\right)'_x =$

$= z^{xy} \cdot \ln z \cdot y \cdot 1 = z^{xy} y \ln z$.

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \left(z^{xy}\right)'_y = z^{xy} \cdot \ln z \cdot \left(xy\right)'_y = z^{xy} \cdot \ln z \cdot x \cdot \left(y\right)'_y =$

$= z^{xy} \cdot \ln z \cdot x \cdot 1 = z^{xy} x \ln z$.

$\dfrac{\partial u}{\partial z} = \left(z^{xy}\right)'_z = xy\, z^{xy-1}$. $\lrcorner$

42. $u = \left(xy\right)^z$.

$\ulcorner$ $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \left(\left(xy\right)^z\right)'_x = z \cdot \left(xy\right)^{z-1} \cdot \left(x \cdot y\right)'_x = z \cdot \left(xy\right)^{z-1} \cdot y \cdot \left(x\right)'_x =$

$= z \cdot \left(xy\right)^{z-1} \cdot y \cdot 1 = zy \left(xy\right)^{z-1}$.

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \left(\left(xy\right)^z\right)'_y = z \cdot \left(xy\right)^{z-1} \cdot \left(xy\right)'_y = z \cdot \left(xy\right)^{z-1} \cdot x \cdot \left(y\right)'_y =$

$= z \cdot \left(xy\right)^{z-1} \cdot x \cdot 1 = z\, x \left(xy\right)^{z-1}$.

$\dfrac{\partial u}{\partial z} = \left(\left(xy\right)^z\right)'_z = \left(xy\right)^z \ln\left(xy\right)$. $\lrcorner$

43. Знайти частинні похідні $f'_x\left(1,\ 2,\ 0\right)$, $f'_y\left(1,\ 2,\ 0\right)$, $f'_z\left(1,\ 2,\ 0\right)$, якщо $f\left(x,\ y,\ z\right) = \ln\left(xy + z\right)$.

$\ulcorner$ $\dfrac{\partial f}{\partial x} = f'_x = \left(\ln\left(xy + z\right)\right)'_x = \dfrac{1}{xy + z} \cdot \left(xy + z\right)'_x = \dfrac{y}{xy + z}$.

Для знаходження $f'_x\left(1,\ 2,\ 0\right)$ підставимо в останній вираз значення $x = 1$, $y = 2$, $z = 0$ і отримаємо $f'_x\left(1,\ 2,\ 0\right) = \dfrac{2}{1 \cdot 2 + 0} = 1$.

Аналогічно

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = f'_y = \left(\ln\left(xy + z\right)\right)'_y = \dfrac{1}{xy + z} \cdot \left(xy + z\right)'_y = \dfrac{x}{xy + z}$.

$f'_y\left(1,\ 2,\ 0\right) = \dfrac{1}{1 \cdot 2 + 0} = \dfrac{1}{2}$.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f_z' = \left(\ln\left(xy+z\right)\right)_z' = \frac{1}{xy+z}\cdot\left(xy+z\right)_z' = \frac{1}{xy+z}.$$

$$f_z'\left(1,\ 2,\ 0\right) = \frac{1}{1\cdot 2+0} = \frac{1}{2}. \quad \rfloor$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Знайти частинні похідні функцій:

44. $z = x^2 y - xy^2 + 3$.

45. $z = \dfrac{3x^2}{y^3}$.

46. $z = xy - \dfrac{y}{x}$.

47. $z = x - 3\sin y$.

48. $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

49. $z = \dfrac{x}{y}\cdot e^{xy}$.

50. $u = y^{\frac{x}{z}}$.

51. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

52. $u = \arcsin\left(x\,y\,z\right)$.

53. $u = x^{y\,z}$.

Відповіді:

44. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy - y^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 - 2xy$.

45. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{6x}{y^3}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-9x^2}{y^4}$.

46. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y + \dfrac{y}{x^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x - \dfrac{1}{x}$.

47. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -3\cos y$.

48. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2 + y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{x^2 + y}$.

49. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{xy}\left(\dfrac{1}{y} + x\right)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{y}e^{xy}\left(x - \dfrac{1}{y}\right)$.

50. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y^{\frac{x}{z}}\,\dfrac{\ln y}{z}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{x}{z}\,y^{\frac{x}{z}-1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{x\ln y}{z^2}\,y^{\frac{x}{z}}$.

51. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

52. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y\cdot z}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xz}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{xy}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}$.

53. $\frac{\partial u}{\partial x}=y\,z\,x^{yz-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x^{yz}z\ln x$, $\frac{\partial u}{\partial z}=x^{yz}\,y\,\ln x$.

4. Повний диференціал функції

4.1. Повний приріст та повний диференціал функції

Повним приростом функції $z=f(x,\,y)$ називається різниця

$$\Delta z=\Delta f(x,\,y)=f(x+\Delta x,\,y+\Delta y)-f(x,\,y).$$

Повним диференціалом функції $z=f(x,\,y)$ називається та частина повного приросту Δz, що є лінійною відносно приростів аргументів Δx і Δy (див. нижче приклад 54).

Різниця між повним приростом і повним диференціалом функції є нескінченно мала вищого порядку у порівнянні з $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

Функція має повний диференціал у випадку неперервності її частинних похідних. У цьому випадку функцію називають *диференційовною*.

Диференціали незалежних змінних за означенням покладають рівними їх приростам: $dx=\Delta x$ і $dy=\Delta y$.

Повний диференціал функції $z=f(x,\,y)$ обчислюється за формулою

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\,.$$

Аналогічно, повний диференціал функції $u=f(x,\,y,\,z)$ обчислюється за формулою

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz\,.$$

54. Для функції $f(x,\,y)=x^2+xy-y^2$ знайти повний приріст і повний диференціал.

┌ $f\left(x+\Delta x,\ y+\Delta y\right)=\left(x+\Delta x\right)^2+\left(x+\Delta x\right)\cdot\left(y+\Delta y\right)-$

$-\left(y+\Delta y\right)^2;$

$\Delta f\left(x,\ y\right)=\left[\left(x+\Delta x\right)^2+\left(x+\Delta x\right)\cdot\left(y+\Delta y\right)-\left(y+\Delta y\right)^2\right]-$

$-\left(x^2+xy-y^2\right)=x^2+2x\cdot\Delta x+\left(\Delta x\right)^2+xy+x\cdot\Delta y+y\Delta x+\Delta x\cdot\Delta y-$

$-y^2-2y\Delta y-\left(\Delta y\right)^2-x^2-xy+y^2=2x\cdot\Delta x+\left(\Delta x\right)^2+x\cdot\Delta y+y\cdot\Delta x+$

$+\Delta x\cdot\Delta y-2y\cdot\Delta y-\left(\Delta y\right)^2=\left[\left(2x+y\right)\cdot\Delta x+\left(x-2y\right)\cdot\Delta y\right]+$

$+\left[\left(\Delta x\right)^2+\Delta x\cdot\Delta y-\left(\Delta y\right)^2\right]$ – повний приріст.

Тут вираз $df=\left(2x+y\right)\Delta x+\left(x-2y\right)\Delta y$ є повним диференціалом функції, а $\left[\left(\Delta x\right)^2+\Delta x\cdot\Delta y+\left(\Delta y\right)^2\right]$ є нескінченно малою вищого порядку у порівнянні з нескінченно малою $\rho=\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2}$. ┘

Знайти повні диференціали функцій:

55. $z=x^3+y^3-3xy$.

┌ Знайдемо частинні похідні функції $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ та підставимо їх у вираз $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^3+y^3-3xy\right)'_x=3x^2-3y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^3+y^3-3xy\right)'_y=3y^2-3x.$$

Отримаємо $dz=3\left(x^2-y\right)dx+3\left(y^2-x\right)dy$ – повний диференціал заданої функції. ┘

56. $z=x^2y^3$.

┌ Аналогічно до попереднього прикладу:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^2y^3\right)'_x=2xy^3,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^2y^3\right)_y'=x^2\cdot 3y^2=3x^2y^2;$$

$$dz=2xy^3dx+3x^2y^2dy. \quad \lrcorner$$

57. $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

$\ulcorner$ $$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)_x'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)_x'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)_y'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)_y'=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$dz=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy. \quad \lrcorner$$

58. $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$.

$\ulcorner$ $$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right)_x'=\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right)_y'=\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y;$$

$$dz=\frac{2x}{x^2+y^2}dx+\frac{2y}{x^2+y^2}dy. \quad \lrcorner$$

59. $z=\sin^2 x+\cos^2 y$.

$\ulcorner$ $$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\sin^2 x+\cos^2 y\right)_x'=2\sin x\cdot\left(\sin x\right)'=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\sin^2 x+\cos^2 y\right)_y'=2\cos y\cdot\left(\cos y\right)'=-2\cos y\cdot\sin y=-\sin 2y;$$

$$dz=\sin 2x\,dx+\left(-\sin 2y\right)dy. \quad \lrcorner$$

60. $u=xyz$.

$\ulcorner$ Для функції трьох змінних знайдемо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial z}{\partial z}$ і підставимо їх у вираз $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(xyz\right)_x'=yz\,,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\left(xyz\right)_y'=xz\,,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\left(xyz\right)_z'=xy\,;$$

$du=yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$ – повний диференціал. ⌋

61. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

⌈ Аналогічно до попереднього прикладу:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)_x'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)_x'=$$

$$=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)_y'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)_y'=$$

$$=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)_z'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)_z'=$$

$$=\frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,;$$

$$du=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dy+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dz\,.$$ ⌋

62. Знайти повний диференціал функції $f\left(x,\,y,\,z\right)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ у точці $P\left(3;\,4;\,5\right)$.

⌈ Для знаходження значення повного диференціала $df\left(3,\,4,\,5\right)$ знаходимо повний диференціал аналогічно до попереднього прикладу і підставляємо в нього $x=3$, $y=4$, $z=5$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)_x'=z\left[\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]_x'=z\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)_x'=$$

$$=-\frac{z}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=\frac{-x\cdot z}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)_y'=z\left[\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]_y'=z\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)_y'=$$

$$=-\frac{z}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y=\frac{-y\cdot z}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)_z'=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(z\right)_z'=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 1=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$df=\frac{-xz}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}dx+\frac{-yz}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}dy+\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}dz.$$

$$df\left(3,\,4,\,5\right)=\frac{-3\cdot 5}{\sqrt{\left(3^2+4^2\right)^3}}dx-\frac{4\cdot 5}{\sqrt{\left(3^2+4^2\right)^3}}dy+\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}dz,$$

$$df\left(3,\,4,\,5\right)=-\frac{3}{25}dx-\frac{4}{25}dy+\frac{1}{5}dz. \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Знайти повні диференціали функцій:

63. $z=5x^3y^2+xy^3-3$.

64. $z=7x^4\cdot y^2$.

65. $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

66. $z=\cos^3 x+\sin^3 y$.

67. $z=x^y$.

68. $u=\sqrt{x\,y\,z}$.

69. $u=\arcsin\left(x\,y\,z\right)$.

Відповіді:

63. $dz=15x^2y^2dx+3xy^2dy$.

64. $dz=28x^3y^2dx+14x^4y\,dy$.

65. $dz=\dfrac{4xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx-\dfrac{4x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}dy$.

66. $dz=-3\cos^2 x\cdot\sin x\,dx+3\sin^2 y\cdot\cos y\,dy$.

67. $dz=y\cdot x^{y-1}dx+x^y\ln x\,dy$.

68. $du = \dfrac{yz}{2\sqrt{xyz}}dx + \dfrac{xz}{2\sqrt{xyz}}dy + \dfrac{xy}{2\sqrt{xyz}}dz = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{yz}{x}}dx +$

$+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{xz}{y}}dy + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{xy}{z}}dz$.

69. $du = \dfrac{yz}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}dx + \dfrac{xz}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}dy + \dfrac{xy}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}dz$.

4.2. Застосування повного диференціала функції до наближених обчислень

Якщо $|\Delta x|$ і $|\Delta y|$, тому і $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ достатньо малі, то для диференційовної функції $z = f(x, y)$ має місце наближена рівність $\Delta z \approx dz$ або

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y .$$

70. Висота конуса $H = 30$ см, радіус основи $R = 10$ см. Як зміниться об'єм конуса, якщо збільшити H на 3 мм і зменшити R на 1 мм?

⌈ Об'єм конуса дорівнює $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$. Зміну об'єму (приріст) замінимо наближено диференціалом

$$\Delta V \approx dV = \frac{1}{3}\pi\left(2RHdR + R^2 dH\right) = \frac{1}{3}\pi\left(-2\cdot 10\cdot 30\cdot 0{,}1 + 100\cdot 0{,}3\right) =$$

$$= -10\pi \approx -31{,}4 \text{ см}^3.$$

Оскільки приріст об'єму від'ємний, то об'єм конуса зменшиться на $31{,}4$ см^3. ⌋

71. Знайти для функції $z = 5x^2 - xy + 3y^2 + 5x + 2y - 1$ повний приріст і повний диференціал у точці $(1;\,2)$ при $\Delta x = 0{,}1$ і $\Delta y = 0{,}2$. Оцінити абсолютну і відносну похибки, що виникають при заміні приросту функції її диференціалом.

⌈ Знаходимо повний приріст Δz :

$$\Delta z = 5(x+\Delta x)^2 - (x+\Delta x)\cdot(y+\Delta y) + 3(y+\Delta y)^2 + 5(x+\Delta x) +$$

$$+2(y+\Delta y) - 1 - 5x^2 + xy - 3y^2 - 5x - 2y + 1 = 10x\cdot\Delta x + 5(\Delta x)^2 -$$

$$-x\cdot\Delta y - y\cdot\Delta x - \Delta x\cdot\Delta y + 6y\Delta y + 3(\Delta y)^2 + 5\Delta x + 2\Delta y =$$

$$= (10x - y + 5)\Delta x + (6y - x + 2)\Delta y + 5(\Delta x)^2 - \Delta x\cdot\Delta y + 3(\Delta y)^2 .$$

Знаходимо повний диференціал dz:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (10x - y + 5)dx + (6y - x + 2)dy .$$

Підставляємо у вирази для Δz і dz значення $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = dx = 0{,}1$, $\Delta y = dy = 0{,}2$. Отримаємо

$$\Delta z = (10\cdot 0{,}1 - 2 + 5)\cdot 0{,}1 + (6\cdot 2 + 1)\cdot 0{,}2 + 5(0{,}1)^2 - 0{,}1\cdot 0{,}2 + 3(0{,}2)^2 =$$

$$= 4{,}05 .$$

$$dz = (10\cdot 0{,}1 - 2 + 5)\cdot 0{,}1 + (6\cdot 2 + 1)\cdot 0{,}2 = 3 .$$

Абсолютна похибка $|\Delta z - dz| = 4{,}05 - 3 = 1{,}05$.

Відносно похибка $\left|\dfrac{\Delta z - dz}{\Delta z}\right| = \dfrac{1{,}05}{4{,}05} \approx \dfrac{1}{4}$ $(\approx 25\%)$. ┘

72. Обчислити наближено $1{,}02^{3{,}01}$.

┌ Розглянемо функцію $z = x^y$. Покладемо $x = 1$, $y = 3$, $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta y = 0{,}01$.

Початкове значення функції $z = 1^3 = 1$.

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y , \quad \frac{\partial z}{\partial x} = y\cdot x^{y-1} , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x .$$

Тоді при зазначених числових значеннях змінних і їх приростах отримаємо:

$$\Delta z \approx dz = y\cdot x^{y-1}\Delta x + x^y\cdot \ln x\cdot\Delta y = 3\cdot 1\cdot 0{,}02 + 1\cdot \ln 1\cdot 0{,}01 = 0{,}06 .$$

Отже, $1{,}02^{3{,}01} \approx 1 + 0{,}06 = 1{,}06$. ┘

Вправи для самостійного розв’язання

73. Одна сторона прямокутника $a = 10$ см, інша $b = 24$ см. Як зміниться діагональ l прямокутника, якщо сторону a збільшити на 4 мм, а сторону b зменшити на 1 мм? Знайти наближену величину зміни і порівняти з точною.

74. Обчислити наближено:

а) $(1,02)^3\cdot(0,97)^2$; б) $\sqrt{(4,05)^2+(2,93)^2}$.

Відповіді:

73. $dl=0,062$ см; $\Delta l=0,065$.

74. а) $1,00$; б) $4,998$.

5. Диференціювання складних функцій

5.1. Випадок однієї незалежної змінної

Якщо $z=f(x,\ y)$ є диференційовною функцією аргументів x і y, які в свою чергу є диференційовними функціями змінної t

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),$$

то похідна складної функції $z=f\left[\varphi(t),\ \psi(t)\right]$ обчислюється за формулою

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\,. \qquad (1)$$

У випадку, якщо t збігається з одним із аргументів, наприклад x, то “*повна*” похідна функції z по x дорівнює

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\,. \qquad (2)$$

75. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial t}$, якщо $z=e^{3x+2y}$, де $x=\cos t$, $y=t^2$.

⌈ Знайдемо похідні з правої частини формули (1):

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(e^{3x+2y}\right)'_x=e^{3x+2y}\cdot(3x+2y)'_x=3e^{3x+2y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(e^{3x+2y}\right)'_y=e^{3x+2y}\cdot(3x+2y)'_y=2e^{3x+2y},$$

$$\frac{dx}{dt}=(\cos t)'=-\sin t,\quad \frac{dy}{dt}=\left(t^2\right)'=2t\,.$$

Підставимо отримані вирази у формулу (1):

$$\frac{dz}{dt}=3e^{3x+2y}\cdot(-\sin t)+2e^{3x+2y}\cdot 2t=e^{3x+2y}\left(4t-3\sin t\right)=$$

$$= e^{3\cos t + 2t^2}\left(4t - 3\sin t\right). \quad ⌟$$

76. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = \frac{x}{y}$, де $x = e^t$, $y = \ln t$.

⌜ Знайдемо похідні з правої частини формули (1):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{x}{y}\right)'_y = -\frac{x}{y^2}.$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(e^t\right)' = e^t, \quad \frac{dy}{dt} = \left(\ln t\right)' = \frac{1}{t}.$$

Підставимо знайдені вирази у формулу (1):

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{y}\cdot e^t - \frac{x}{y^2}\cdot\frac{1}{t} = \frac{1}{\ln t}\cdot e^t - \frac{e^t}{\ln^2 t}\cdot\frac{1}{t} = \frac{e^t}{\ln t}\left(1 - \frac{1}{t\ln^2 t}\right). \quad ⌟$$

77. Знайти частинну похідну $\frac{\partial z}{\partial x}$ функції $z = \ln\left(e^x + e^y\right)$ і повну похідну $\frac{dz}{dx}$, якщо $y = x^3$.

⌜ Знаходимо частинну похідну:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln\left(e^x + e^y\right)\right)'_x = \frac{1}{e^x + e^y}\cdot\left(e^x + e^y\right)'_x = \frac{e^x}{e^x + e^y}.$$

"Повну" похідну $\frac{dz}{dx}$ знайдемо за формулою (2):

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\ln\left(e^x + e^y\right)\right)'_y = \frac{1}{e^x + e^y}\cdot\left(e^x + e^y\right)'_y = \frac{e^y}{e^x + e^y}, \quad \frac{dy}{dx} = \left(x^3\right)' = 3x^2.$$

Отже, $\frac{dz}{dx} = \frac{e^x}{e^x + e^y} + \frac{e^y}{e^x + e^y}\cdot 3x^2 = \frac{e^x + 3x^2 e^y}{e^x + e^y}$. ⌟

78. Знайти частинну похідну $\frac{\partial z}{\partial x}$ і повну похідну $\frac{dz}{dx}$, якщо $z = e^{xy}$, де $y = \sin x$.

⌜ Частинна похідна:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{xy}\right)'_x = e^{xy}\cdot\left(xy\right)'_x = y\cdot e^{xy}.$$

Знаходимо повну похідну за формулою (2):

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(e^{xy}\right)'_y = e^{xy}\cdot\left(xy\right)'_y = xe^{xy}, \quad \frac{dy}{dx} = \left(\sin x\right)' = \cos x.$$

Отже, $\frac{dz}{dx} = ye^{xy} + xe^{xy} \cdot \cos x = e^{xy}\left(y + x\cos x\right)$. ⌋

Вправи для самостійного розв'язання

79. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = \arcsin\left(x - y\right)$, де $x = 3t$, $y = 4t^3$.

80. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = e^{x-2y}$, де $x = \sin t$, $y = t^3$.

81. Знайти частинну похідну $\frac{\partial z}{\partial x}$ і повну похідну $\frac{dz}{dx}$, якщо $z = \mathrm{arctg}\left(xy\right)$, де $y = e^x$.

82. Знайти повну похідну $\frac{dz}{dx}$, якщо $z = x^y$, де $y = \mathrm{tg}\, x$.

Відповіді:

79. $\frac{dz}{dt} = \frac{3 - 12t^2}{\sqrt{1 - \left(3t - 4t^3\right)^2}}$. **80.** $\frac{dz}{dt} = e^{\sin t - 2t^3}\left(\cos t - 6t^2\right)$.

81. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{1 + x^2 y^2}$; $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{1 + x^2 y^2}\left(y + x \cdot e^x\right)$.

82. $\frac{dz}{dx} = y \cdot x^{y-1} + \frac{x^y \ln x}{\cos^2 x}$.

5.2. Випадок кількох незалежних змінних

Якщо z є складною функцією кількох незалежних змінних, наприклад, $z = f\left(x, y\right)$, де $x = \varphi\left(u, v\right)$, $y = \psi\left(u, v\right)$ (u, v – незалежні змінні; f, φ, ψ – диференційовні функції), то частинні похідні z по u і v знаходяться за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \tag{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \tag{4}$$

Незалежно від того, є змінні x та y незалежними, чи залежать від інших змінних, справедлива формула

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

(властивість *інваріантності* форми повного диференціала).

83. Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z = f(x, y)$, де $x = u \cdot v$, $y = \frac{u}{v}$.

⌈ Знайдемо $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$ і застосуємо формули (3), (4).

$$\frac{\partial x}{\partial u} = (u \cdot v)_u' = v, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = (u \cdot v)_v' = u, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \left(\frac{u}{v}\right)_u' = \frac{1}{v},$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \left(\frac{u}{v}\right)_v' = -\frac{u}{v^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f_x'(x, y) \cdot v + f_y'(x, y) \cdot \frac{1}{v}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = f_x'(x, y) \cdot u + f_y'(x, y) \cdot \left(-\frac{u}{v^2}\right). \quad ⌋$$

84. Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z = x^2 y - y^2 x$, де $x = u \cdot \cos v$, $y = u \cdot \sin v$.

⌈ Знайдемо похідні з правих частин формул (3), (4):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(xy^2 - y^2 x\right)_x' = 2xy - y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 y - y^2 x\right)_y' = x^2 - 2xy,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = (u \cdot \cos v)_u' = \cos v, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = (u \cdot \cos v)_v' = -u \sin v,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = (u \cdot \sin v)_u' = \sin v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = (u \cdot \sin v)_v' = u \cos v.$$

Підставимо отримані вирази у формули (3), (4):

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \left(2xy - y^2\right) \cdot \cos v + \left(x^2 - 2xy\right) \cdot \sin v =$$

$$= \left(2u \cos v \cdot u \sin v - u^2 \sin^2 v\right) \cdot \cos v +$$

$$+ \left(u^2 \cos^2 v - 2u \cos v \cdot u \sin v\right) \cdot \sin v =$$

$$= u^2 \sin v \cos v \left(2\cos v - \sin v\right) + u^2 \sin v \cos v \left(\cos v - 2\sin v\right) =$$

$$= u^2 \sin v \cos v \left(2\cos v - \sin v + \cos v - 2\sin v\right) =$$

$$= u^2 \sin v \cos v \left(3\cos v - 3\sin v\right) = 3u^2 \sin v \cos v \left(\cos v - \sin v\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \left(2xy - y^2\right) \cdot \left(-u \sin v\right) + \left(x^2 - 2xy\right) \cdot u \cos v =$$

$$= \left(2u \cos v \cdot u \sin v - u^2 \sin^2 v\right) \cdot \left(-u \sin v\right) + \left(u^2 \cos^2 v - 2u^2 \cos v \sin v\right) \times$$

$$\times u \cos v = -u^3 \sin^2 v \left(2\cos v - \sin v\right) + u^3 \cos^2 v \left(\cos v - 2\sin v\right) =$$

$$= u^3 \left(\underline{-2\sin^2 v \cos v} + \underline{\underline{\sin^3 v}} + \underline{\underline{\cos^3 v}} - \underline{2\cos^2 v \sin v}\right) =$$

$$= u^3 \left[-2\sin v \cos v \left(\sin v + \cos v\right) + \left(\sin v + \cos v\right) \times\right.$$

$$\left.\times \left(\sin^2 v - \sin v \cos v + \cos^2 v\right)\right] = u^3 \left(\sin v + \cos v\right)\left(1 - 3\sin v \cos v\right). \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

85. Показати, що функція $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$, де $x = u + v$, $y = u - v$, задовольняє співвідношенню $\dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{u - v}{v^2 + u^2}$.

86. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z = x^2 \cdot \ln y$, де $x = \dfrac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$.

Відповіді:

85. $\dfrac{\partial z}{\partial u} = 2\dfrac{u}{v^2} \ln\left(3u - 2v\right) + \dfrac{3u^2}{v^2\left(3u - 2v\right)}$.

86. $\dfrac{\partial z}{\partial v} = -\dfrac{2u^2}{v^3} \ln\left(3u - 2v\right) - \dfrac{2u^2}{v^2\left(3u - 2v\right)}$.

6. Частинні похідні вищих порядків

Частинними похідними другого порядку функції $z = f\left(x, y\right)$ називаються частинні похідні від її частинних похідних першого порядку.

Для похідних другого порядку використовують позначення

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}\left(x, y\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}\left(x, y\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}= f''_{yx}\left(x,\ y\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}= f''_{yy}\left(x,\ y\right).$$

Аналогічно означуються і позначаються частинні похідні порядку вище другого.

Якщо частинні похідні, що обчислюються, неперервні, то результат повторного диференціювання не залежить від порядку диференціювання:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

Знайти частинні похідні другого порядку функцій:

87. $z=x^3y^4+2x^2-y^3+1$.

$\ulcorner$ $\frac{\partial z}{\partial x}=z_x{}'=\left(x^3y^4+2x^2-y^3+1\right)_x'=3x^2y^4+4x$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=z_y{}'=\left(x^3y^4+2x^2-y^3+1\right)_y'=4x^3y^3-3y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(3x^2y^4+4x\right)_x'=6xy^4+4,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(4x^3y^3-3y^2\right)_y'=12x^3y^2-6y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(3x^2y^4+4x\right)_y'=12x^2y^3,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(4x^3y^4-3y^2\right)_x'=12x^2y^3. \lrcorner$$

88. $z=e^{xy}$.

$\ulcorner$ $\frac{\partial z}{\partial x}=\left(e^{xy}\right)_x'=e^{xy}\cdot\left(xy\right)_x'=e^{xy}\cdot y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\left(e^{xy}\right)_y'=e^{xy}\cdot\left(xy\right)_y'=e^{xy}x$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(e^{xy}\cdot y\right)_x'=y\cdot e^{xy}\cdot\left(xy\right)_x'=y\cdot e^{xy}\cdot y=y^2e^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(e^{xy}\cdot x\right)_y'=x\cdot e^{xy}\cdot\left(xy\right)_y'=xe^{xy}\cdot x=x^2e^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(e^{xy}\cdot y\right)_y' = \left(e^{xy}\right)_y' \cdot y + \left(y\right)_y' \cdot e^{xy} = e^{xy}\cdot x\cdot y + 1\cdot e^{xy} = e^{xy}\left(xy+1\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(e^{xy}\cdot x\right)_x' = \left(e^{xy}\right)_x' \cdot x + \left(x\right)_x' \cdot e^{xy} = e^{xy}\cdot y\cdot x + 1\cdot e^{xy} =$$

$$= e^{xy}\left(xy+1\right). \quad \lrcorner$$

89. $z = \cos(xy)$.

$$\ulcorner \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \left(\cos(xy)\right)_x' = -\sin(xy)\cdot(xy)_x' = -y\sin(xy),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\cos(xy)\right)_y' = -\sin(xy)\cdot(xy)_y' = -x\sin(xy),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(-y\sin(xy)\right)_x' = -y\cdot\cos(xy)\cdot(xy)_x' = -y^2\cos(xy),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(-x\sin(xy)\right)_y' = -x\cdot\cos(xy)\cdot(xy)_y' = -x^2\cos(xy),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(-y\sin(xy)\right)_y' = -\left[(y)_y'\cdot\sin(xy) + \left(\sin(xy)\right)_y'\cdot y\right] =$$

$$= -\left[\sin(xy) + \cos(xy)\cdot(xy)_y'\cdot y\right] = -\left[\sin(xy) + xy\cos(xy)\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(-x\sin(xy)\right)_x' = -\left[(x)_x'\cdot\sin(xy) + \left(\sin(xy)\right)_x'\cdot x\right] =$$

$$= -\left[\sin(xy) + xy\cos(xy)\right]. \quad \lrcorner$$

90. $z = x^y$.

$$\ulcorner \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^y\right)_x' = yx^{y-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^y\right)_y' = x^y\ln x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(y\cdot x^{y-1}\right)_x' = y(y-1)x^{y-2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(x^y\cdot\ln x\right)_y' = \ln x\cdot\left(x^y\right)_y' = \ln x\cdot x^y\cdot\ln x = x^y\ln^2 x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(y \cdot x^{y-1}\right)'_y = \left(y\right)'_y \cdot x^{y-1} + \left(x^{y-1}\right)'_y \cdot y =$$

$$= 1 \cdot x^{y-1} + x^{y-1} \cdot \ln x \cdot y = x^{y-1} + x^{y-1} y \ln x \,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(x^y \cdot \ln x\right)'_x = \left(x^y\right)'_x \cdot \ln x + \left(\ln x\right)'_x \cdot x^y = yx^{y-1} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x^y =$$

$$= x^{y-1} + x^{y-1} y \ln x \,. \quad \lrcorner$$

91. $z = \ln\left(x^2 + y\right)$.

$\ulcorner$ $$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln\left(x^2 + y\right)\right)'_x = \frac{1}{x^2 + y} \cdot \left(x^2 + y\right)'_x = \frac{2x}{x^2 + y} \,,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\ln\left(x^2 + y\right)\right)'_y = \frac{1}{x^2 + y} \cdot \left(x^2 + y\right)'_y = \frac{1}{x^2 + y} \,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{2x}{x^2 + y}\right)'_x = 2 \cdot \frac{\left(x\right)'_x \cdot \left(x^2 + y\right) - \left(x^2 + y\right)'_x \cdot x}{\left(x^2 + y\right)^2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1 \cdot \left(x^2 + y\right) - 2x \cdot x}{\left(x^2 + y\right)^2} = 2\frac{x^2 + y - 2x^2}{\left(x^2 + y\right)^2} = \frac{2\left(y - x^2\right)}{\left(x^2 + y\right)^2} \,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{1}{x^2 + y}\right)'_y = -\frac{1}{\left(x^2 + y\right)^2} \cdot \left(x^2 + y\right)'_y = -\frac{1}{\left(x^2 + y\right)^2} \,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{2x}{x^2 + y}\right)'_y = 2x \cdot \left(\frac{1}{x^2 + y}\right)'_y = 2x \cdot \left(-\frac{1}{\left(x^2 + y\right)^2} \cdot \left(x^2 + y\right)'_y\right) =$$

$$= 2x\left(-\frac{1}{\left(x^2 + y\right)^2}\right) = \frac{-2x}{\left(x^2 + y\right)^2} \,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(\frac{1}{x^2 + y}\right)'_x = -\frac{1}{\left(x^2 + y\right)^2} \cdot \left(x^2 + y\right)'_x = \frac{-2x}{\left(x^2 + y\right)^2} \,. \quad \lrcorner$$

92. $z = \sqrt{2xy + y^2}$.

$\ulcorner$ Обчислимо лише похідні $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ та $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\sqrt{2xy+y^2}\right)_x'=\frac{1}{2\sqrt{2xy+y^2}}\cdot\left(2xy+y^2\right)_x'=\frac{2y}{2\sqrt{2xy+y^2}}=$$

$$=\frac{y}{\sqrt{2xy+y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\sqrt{2xy+y^2}\right)_y'=\frac{1}{2\sqrt{2xy+y^2}}\cdot\left(2xy+y^2\right)_y'=\frac{2x+2y}{2\sqrt{2xy+y^2}}=\frac{x+y}{\sqrt{2xy+y^2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{y}{\sqrt{2xy+y^2}}\right)_y'=\frac{\left(y\right)_y'\cdot\sqrt{2xy+y^2}-\left(\sqrt{2xy+y^2}\right)_y'\cdot y}{\left(\sqrt{2xy+y^2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1\cdot\sqrt{2xy+y^2}-\frac{1}{2\sqrt{2xy+y^2}}\cdot\left(2xy+y^2\right)_y'\cdot y}{2xy+y^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{2xy+y^2}-\frac{2x+2y}{2\sqrt{2xy+y^2}}\cdot y}{2xy+y^2}=\frac{\sqrt{2xy+y^2}-\frac{y\left(x+y\right)}{\sqrt{2xy+y^2}}}{2xy+y^2}=$$

$$=\frac{2xy+y^2-y\left(x+y\right)}{\left(2xy+y^2\right)\cdot\sqrt{2xy+y^2}}=\frac{2xy+y^2-xy-y^2}{\left(2xy+y^2\right)\cdot\sqrt{2xy+y^2}}=$$

$$=\frac{xy}{\left(2xy+y^2\right)\cdot\sqrt{2xy+y^2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(\frac{x+y}{\sqrt{2xy+y^2}}\right)_x'=\frac{\left(x+y\right)_x'\cdot\sqrt{2xy+y^2}-\left(\sqrt{2xy+y^2}\right)_x'\cdot\left(x+y\right)}{\left(\sqrt{2xy+y^2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1\cdot\sqrt{2xy+y^2}-\frac{1}{2\sqrt{2xy+y^2}}\cdot\left(2xy+y^2\right)_x'\cdot\left(x+y\right)}{2xy+y^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{2xy+y^2}-\frac{2y}{2\sqrt{2xy+y^2}}\cdot\left(x+y\right)}{2xy+y^2}=\frac{\sqrt{2xy+y^2}-\frac{y\left(x+y\right)}{\sqrt{2xy+y^2}}}{2xy+y^2}=$$

$$=\frac{2xy+y^2-y(x+y)}{(2xy+y^2)\sqrt{2xy+y^2}}=\frac{2xy+y^2-xy-y^2}{(2xy+y^2)\sqrt{2xy+y^2}}=\frac{xy}{(2xy+y^2)\sqrt{2xy+y^2}}\;. \quad \lrcorner$$

Зауважимо, що у всіх розглянутих прикладах $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Вправи для самостійного розв’язання

Знайти частинні похідні другого порядку функцій:

93. $z=\frac{x-y}{x+y}$.

94. $z=\arcsin(xy)$.

95. $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

96. $z=\sin^2(ax+by)$.

97. $z=\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}$.

Відповіді:

93. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{4y}{(x+y)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{4x}{(x+y)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{2(x-y)}{(x+y)^3}$.

94. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{xy^3}{\sqrt{\left(1-x^2y^2\right)^3}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^3y}{\sqrt{\left(1-x^2y^2\right)^3}}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-x^2y^2\right)^3}}\;.$$

95. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{x}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^3+\left(x^2-y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\frac{y}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}\;.$$

96. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2a^2\cos 2(ax+by)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2b^2\cos 2(ax+by)$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2ab\cos 2\left(ax + by\right).$$

97. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

7. Диференціювання неявних функцій

7.1. Випадок однієї незалежної змінної

Якщо рівняння $f\left(x,\ y\right) = 0$, де $f\left(x,\ y\right)$ – диференційовна функція змінних x і y, визначає y як функцію від x (див. підрозділ 4 розділу 5), то похідна цієї неявно заданої функції (за умови $f_y'\left(x,\ y\right) \neq 0$) знаходиться за формулою

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x'\left(x,\ y\right)}{f_y'\left(x,\ y\right)}. \tag{5}$$

Похідні вищих порядків знаходяться послідовним диференціюванням цієї рівності.

98. Знайти $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2 y}{dx^2}$, якщо

$$\left(x^2 + y^2\right)^3 - 3\left(x^2 + y^2\right) + 1 = 0.$$

Γ Позначимо ліву частину даного рівняння через $f\left(x,\ y\right)$ і знайдемо частинні похідні $f_x'\left(x,\ y\right)$ і $f_y'\left(x,\ y\right)$:

$$f\left(x,\ y\right) = \left(x^2 + y^2\right)^3 - 3\left(x^2 + y^2\right) + 1;$$

$$f_x'\left(x,\ y\right) = 3\left(x^2 + y^2\right)^2 \cdot 2x - 3 \cdot 2x = 6x\left[\left(x^2 + y^2\right)^2 - 1\right],$$

$$f_y'\left(x,\ y\right) = 3\left(x^2 + y^2\right)^2 \cdot 2y - 3 \cdot 2y = 6y\left[\left(x^2 + y^2\right)^2 - 1\right].$$

Підставляючи знайдені частинні похідні у формулу (5) отримаємо:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x'\left(x,\ y\right)}{f_y'\left(x,\ y\right)} = -\frac{6x\left[\left(x^2 + y^2\right)^2 - 1\right]}{6y\left[\left(x^2 + y^2\right) - 1\right]} = -\frac{x}{y}.$$

Для знаходження другої похідної продиференціюємо по x

знайдену першу похідну, пам'ятаючи при цьому, що y є функцією змінної x:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right)=-\frac{1\cdot y-x\cdot\dfrac{dy}{dx}}{y^2}=-\frac{y-x\cdot\left(-\dfrac{x}{y}\right)}{y^2}=-\frac{y^2+x^2}{y^2}. \quad \lrcorner$$

99. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$ і $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, якщо $y=x+\ln y$.

$\ulcorner$ Покладемо $f(x,\,y)=y-x-\ln y$.

Знайдемо частинні похідні $f_x'(x,\,y)$ і $f_y'(x,\,y)$:

$$f_x'(x,\,y)=-1,\quad f_y'(x,\,y)=1-\frac{1}{y}.$$

Отже, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{f_x'(x,\,y)}{f_y'(x,\,y)}=-\dfrac{-1}{1-\dfrac{1}{y}}=\dfrac{y}{y-1}$.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y-1}\right)=\frac{\dfrac{dy}{dx}\cdot(y-1)-\dfrac{d}{dx}(y-1)\cdot y}{(y-1)^2}=$$

$$=\frac{\dfrac{dy}{dx}\cdot(y-1)-\dfrac{dy}{dx}\cdot y}{(y-1)^2}=\frac{\dfrac{dy}{dx}(y-1-y)}{(y-1)^2}=\frac{-\dfrac{dy}{dx}}{(y-1)^2}=$$

$$=\frac{-\dfrac{y}{y-1}}{(y-1)^2}=\frac{-y}{(y-1)^3}=\frac{y}{(1-y)^3}. \quad \lrcorner$$

100. Знайти $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=1}$ і $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1}$, якщо $x^2-2xy+y^2+x+y-2=0$.

$\ulcorner$ Покладемо $f(x,\,y)=x^2-2xy+y^2+x+y-2$.

Знайдемо частинні похідні $f_x'(x,\,y)$ і $f_y'(x,\,y)$:

$$f_x'(x,\,y)=2x-2y+1,\quad f_y'(x,\,y)=-2x+2y+1.$$

Отже, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{f_x'(x,\,y)}{f_y'(x,\,y)}=-\dfrac{2x-2y+1}{-2x+2y+1}$.

Підставляючи у задане рівняння значення $x=1$, знайдемо відповідне значення y:

$1-2y+y^2+1+y-2=0$, $y^2-y=0$ або $y(y-1)=0$, звідси $y=0$, $y=1$. Маємо точки $(1;\,0)$ і $(1;\,1)$.

Знаходимо значення похідної:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=1\\y=0}}=-\frac{2\cdot1-0+1}{-2\cdot1+0+1}=3 \quad \text{при } y(1)=0,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=1\\y=1}}=-\frac{2\cdot1-2\cdot1+1}{-2\cdot1+2\cdot1+1}=-1 \quad \text{при } y(1)=1.$$

Друга похідна:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(-\frac{2x-2y+1}{-2x+2y+1}\right)=$$

$$=-\frac{(-2x+y+1)\cdot\frac{d}{dx}(2x-2y+1)-(2x-2y+1)\cdot\frac{d}{dx}(-2x+2y+1)}{(-2x+2y+1)^2}=$$

$$=-\frac{(-2x+y+1)\cdot\left(2-2\frac{dy}{dx}\right)-(2x-2y+1)\cdot\left(-2+2\frac{dy}{dx}\right)}{(-2x+2y+1)^2}=$$

$$=-\frac{\left(2-2\frac{dy}{dx}\right)(-2x+y+1+2x-2y+1)}{(-2x+2y+1)^2}=$$

$$=-\frac{\left(2-2\frac{dy}{dx}\right)(2-y)}{(-2x+2y+1)^2}=-\frac{2\left(1-\frac{dy}{dx}\right)(2-y)}{(-2x+2y+1)^2}=$$

$$=\frac{2\left(\frac{dy}{dx}-1\right)\cdot(2-y)}{(-2x+2y+1)^2}=\frac{2\left(-\frac{2x-2y+1}{-2x+2y+1}-1\right)\cdot(2-y)}{(-2x+2y+1)^2}=$$

$$=\frac{2(-2x+2y-1+2x-2y-1)\cdot(2-y)}{(-2x+2y+1)^3}=\frac{-4(2-y)}{(-2x+2y+1)^3}=$$

$$=\frac{4(y-2)}{(-2x+2y+1)^3}.$$

Знаходимо значення похідної:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1}=\frac{4(0-2)}{(-2\cdot 1+2\cdot 0+1)^3}=\frac{-8}{-1}=8 \text{ при } y(1)=0,$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1}=\frac{4(1-2)}{(-2\cdot 1+2\cdot 1+1)^3}=\frac{-4}{1}=-4 \text{ при } y(1)=1. \quad \lrcorner$$

Вправи для самостійного розв'язання

Знайти $\frac{dy}{dx}$ від функцій, заданих неявно рівняннями:

101. $x^3y-y^3x=a^4$.

102. $x^2y^2-x^4y^4=a^4$.

103. $x\cdot e^y+y\cdot e^x-e^{xy}=0$.

104. $\left(x^2+y^2\right)^2-a^2\left(x^2-y^2\right)=0$.

105. $\sin(xy)-e^{xy}-x^2y=0$.

Відповіді:

101. $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2y-y^3}{3xy^2-x^3}$.

102. $\frac{dy}{dx}=\frac{x\left(y^2-2x^2\right)}{y\left(2y^2-x^2\right)}$.

103. $\frac{dy}{dx}=\frac{ye^{xy}-ye^x-e^y}{xe^y+e^x-xe^{xy}}$.

104. $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\cdot\frac{2\left(x^2+y^2\right)-a^2}{2\left(x^2+y^2\right)+a^2}$.

105. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\cdot\frac{2x+e^{xy}-\cos xy}{\cos xy-e^{xy}-x}$.

7.2. Випадок кількох незалежних змінних

Функцію двох змінних $z=z(x,y)$ називають *неявною* функцією, що визначається рівнянням $F(x,\ y,\ z)=0$, якщо вона неперервна і перетворює це рівняння у тотожність $F\left(x,\ y,\ z(x,y)\right)\equiv 0$.

Якщо рівняння $F(x, y, z) = 0$, де $F(x, y, z)$ – диференційовна функція змінних x, y і z, визначає z як функцію незалежних змінних x і y і $F_z'(x, y, z) \neq 0$, то частинні похідні цієї неявно заданої функції знаходяться за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'(x, y, z)}{F_z'(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y'(x, y, z)}{F_z'(x, y, z)}, \tag{6}$$

де $z = z(x, y)$.

106. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$.

$\ulcorner$ Позначимо $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y$.

Знайдемо частинні похідні:

$F_x'(x, y, z) = 2x$, $F_y'(x, y, z) = -4y - z + 1$, $F_z'(x, y, z) = 6z - y$.

За формулами (6):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{6z - y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1 - 4y - z}{6z - y}. \quad \lrcorner$$

107. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

$\ulcorner$ Позначимо $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$. Знайдемо частинні похідні

$$F_x'(x, y, z) = \frac{2x}{a^2}, \quad F_y'(x, y, z) = \frac{2y}{b^2}, \quad F_z'(x, y, z) = \frac{2z}{c^2}.$$

За формулами (6):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2z}{c^2}} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = --\frac{\frac{2y}{b^2}}{\frac{2z}{c^2}} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}. \quad \lrcorner$$

108. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $e^z - xyz = 0$.

$\ulcorner$ Позначимо $F(x, y, z) = e^z - xyz$. Знайдемо частинні похідні:

$F_x'(x, y, z) = -yz$, $F_y'(x, y, z) = -xz$, $F_z'(x, y, z) = e^z - xy$.

За формулами (6):

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{-yz}{e^z-xy}=\frac{yz}{e^z-xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{-xz}{e^z-xy}=\frac{xz}{e^z-xy}.$$

Враховуючи задане рівняння $e^z-xyz=0$, отримаємо $e^z=xyz$. Тоді знайдені вище похідні запишуться так:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{xyz-xy}=\frac{yz}{xy(z-1)}=\frac{z}{x(z-1)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{xyz-xy}=\frac{xz}{xy(z-1)}=\frac{z}{y(z-1)}. \quad \lrcorner$$

Вправи для самостійного розв'язання

109. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $x^2-2y^2+z^2-4x+2z-5=0$.

110. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z^3+3xyz=a^2$.

111. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $x\cos y+y\cos z+z\cos x=1$.

Відповіді:

109. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2-x}{z+1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{z+1}$.

110. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yz}{xy+z^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xy}{xy+z^2}$.

111. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z\sin x-\cos y}{\cos x-y\sin z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x\sin y-\cos z}{\cos x-y\sin z}$.

8. Похідна за напрямом і градієнт функції

8.1. Похідна функції за напрямом

Похідною функції $z=f(x, y)$ у точці $P(x; y)$ *за напрямом* $\vec{e}=\overrightarrow{PP_1}$ називається

$$\frac{\partial z}{\partial e}=\lim_{PP_1\to 0}\frac{f(P_1)-f(P)}{PP_1},$$

де $f(P)$ і $f(P_1)$ – значення функції у точках P і P_1, PP_1 – відстань між цими точками.

Якщо функція z диференційовна, то має місце формула

$$\frac{\partial z}{\partial e}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha, \tag{7}$$

де α – кут, що утворює вектор $\vec{e}$ з віссю Ox.

Аналогічно означується і обчислюється похідна за напрямом $\vec{e}$ для функції трьох аргументів $u=f(x,\ y,\ z)$. У цьому випадку

$$\frac{\partial u}{\partial e}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \tag{8}$$

де α, β, γ – кути між вектором $\vec{e}$ і відповідними осями координат. Похідна за напрямом характеризує швидкість зміни функції у даному напрямі.

112. Знайти похідну функції $z=2x^2-3y^2$ у точці $P(1;\ 0)$ за напрямом, що складає з віссю Ox кут 120°.

⌐ Знайдемо частинні похідні даної функції та їх значення у точці P:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x,\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P=4;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-6y,\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P=0.$$

$$\cos\alpha=\cos120^\circ=-\frac{1}{2},\ \ \sin\alpha=\sin120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

За формулою (7): $\dfrac{\partial z}{\partial e}=4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+0\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-2$.

Знак мінус вказує, що функція у точці P у даному напрямі спадає. ⌋

113. Знайти похідну функції $z=3x^2+4y^2+x-2y+1$ у точці $P(-1;\ 2)$ за напрямом $\vec{e}=3\vec{i}-\vec{j}$.

⌐ Знайдемо частинні похідні даної функції та їх значення у точці P:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=6x+1;\quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P=-5;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=8y-2;\quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P=14.$$

Знайдемо координати орта $\vec{e}_0$ вектора $\vec{e}$ за формулою $\vec{e}_0 = \dfrac{\vec{e}}{|\vec{e}|}$:

$$\vec{e} = \{3; -1\}, \quad |\vec{e}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}, \quad \vec{e}_0 = \left\{ \frac{3}{\sqrt{10}}; -\frac{1}{\sqrt{10}} \right\}.$$

Звідси маємо $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

За формулою (7): $\dfrac{\partial z}{\partial e} = -5 \cdot \dfrac{3}{\sqrt{10}} + 14 \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}} \right) = -\dfrac{29}{\sqrt{10}}$. $\lrcorner$

114. Знайти похідну функції $z = x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 + 1$ у точці $P(3; 1)$ у напрямі від цієї точки до точки $N(6; 5)$.

$\ulcorner$ Знайдемо частинні похідні даної функції та їх значення у точці P:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6xy + 3y^2; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_P = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 = 12;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x^2 + 6xy; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_P = -3 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 \cdot 1 = -9.$$

Знайдемо координати вектора $\vec{e} = \overrightarrow{PN}$: $\vec{e} = \{6-3; 5-1\} = \{3; 4\}$.

Знайдемо координати орта $\vec{e}_0$ вектора $\vec{e}$:

$$|\vec{e}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = 5, \quad \vec{e}_0 = \left\{ \frac{3}{5}; \frac{4}{5} \right\}.$$

Звідси $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$.

За формулою (7) $\dfrac{\partial z}{\partial e} = 12 \cdot \dfrac{3}{5} + (-9) \cdot \dfrac{4}{5} = 0$. $\lrcorner$

115. Знайти похідну функції $u = xy + yz + zx$ у точці $M(2; 1; 3)$ в напрямі від цієї точки до точки $N(5; 5; 15)$.

$\ulcorner$ Знайдемо частинні похідні даної функції та їх значення у точці M:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + z; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_M = 1 + 3 = 4;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + z\,; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = 2 + 3 = 5\,;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = y + x\,; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = 1 + 2 = 3\,.$$

Знайдемо координати вектора $\vec{e} = \overrightarrow{MN}$: $\vec{e} = \{3;\ 4;\ 12\}$. Координати його орта $\vec{e}_0$:

$$\left|\vec{e}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = 13\,, \quad \vec{e}_0 = \left\{\frac{3}{13};\ \frac{4}{13};\ \frac{12}{13}\right\}.$$

Напрямні косинуси $\cos\alpha = \frac{3}{13}$, $\cos\beta = \frac{4}{13}$, $\cos\gamma = \frac{12}{13}$.

За формулою (8) $\frac{\partial u}{\partial e} = 4\cdot\frac{3}{13} + 5\cdot\frac{4}{13} + 3\cdot\frac{12}{13} = \frac{68}{13}$. ⌋

Вправи для самостійного розв'язання

116. Знайти похідну функції $z = \operatorname{arctg} xy$ у точці $(1;\ 1)$ за напрямом бісектриси першого координатного кута.

117. Знайти похідну функції $z = x^2 y^2 - xy^3 - 3y - 1$ у точці $(2;\ 1)$ за напрямом від цієї точки до початку координат.

118. Знайти похідну функції $u = xy^2 + z^3 - xyz$ у точці $M(1;\ 1;\ 2)$ за напрямом, що утворює з осями координат кути відповідно 60°, 45°, 60°.

Відповіді:

116. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **117.** $-\sqrt{5}$. **118.** 5.

8.2. Градієнт функції

Градієнтом функції $z = f(x,\ y)$ у точці $P(x;\ y)$ називається вектор, проекціями якого на координатні осі є відповідні частинні похідні даної функції:

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}\,.$$

Похідна даної функції за напрямом $\vec{e}$ пов'язана з градієнтом функції формулою

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \text{пр}_{\vec{e}}\, \overrightarrow{\text{grad}}\, z \ .$$

Градієнт функції у точці співпадає з напрямом нормалі до відповідної лінії рівня функції.

Напрям вектора градієнта функції у заданій точці є напрямом найбільшої швидкості зміни функції у цій точці.

Аналогічно визначається градієнт функції трьох змінних $u = f\left(x,\ y,\ z\right)$:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} \ .$$

Градієнт функції трьох змінних у точці співпадає з напрямом нормалі до поверхні рівня, що проходить через цю точку.

119. Знайти градієнт функції $z = x^2 y$ у точці $P\left(1;\, 1\right)$.

$\ulcorner$ Знаходимо частинні похідні та їх значення в точці P:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy\ ; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 2\cdot 1\cdot 1 = 2\ ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2\ ; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = 1^2 = 1\ .$$

Отже, $\overrightarrow{\text{grad}}\, z = 2\vec{i} + \vec{j}$. $\lrcorner$

120. Знайти $\overrightarrow{\text{grad}}\, u$ у точці $P\left(1;\ 2;\ 3\right)$, якщо $u = x\,y\,z$.

$\ulcorner$ Знаходимо частинні похідні та їх значення у даній точці:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz\ ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz\ ; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy\ ; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2\cdot 3 = 6\ ;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 1\cdot 3 = 3\ ; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 1\cdot 2 = 2\ .$$

Отже, $\overrightarrow{\text{grad}}\, u = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

121. Знайти $\overrightarrow{\text{grad}}\, z$ у точці $\left(2;\, 1\right)$, якщо $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

122. Знайти $\overrightarrow{\text{grad}}\, z$ у точці $\left(5;\ 3\right)$, якщо $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

123. Знайти величину і напрям $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u$ у точці $(2;\,-2;\,1)$, якщо $u = x^2 + y^2 + z^2$.

Відповіді:

121. $9\vec{i} - 3\vec{j}$. **122.** $\frac{1}{4}\left(5\vec{i} - 3\vec{j}\right)$.

123. $\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u\right| = 6$; $\cos\alpha = \frac{2}{3}$; $\cos\beta = -\frac{2}{3}$; $\cos\gamma = \frac{1}{3}$.

9. Дотична площина і нормаль до поверхні

9.1. Рівняння дотичної площини і нормалі у випадку явного задання поверхні

Дотичною площиною до поверхні у точці M (*точка дотику*) називається площина, в якій знаходяться всі дотичні у точці M до різних кривих, що проведені на поверхні через цю точку.

Нормаллю до поверхні називається перпендикуляр до дотичної площини у точці дотику.

Якщо рівняння поверхні у декартовій системі координат задано у явній формі $z = f(x,\,y)$, де $f(x,\,y)$ – диференційовна функція, то рівняння дотичної площини у точці $M(x_0;\,y_0;\,z_0)$ поверхні має вигляд

$$z - z_0 = f_x'(x_0,\,y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0,\,y_0)(y - y_0). \tag{9}$$

Рівняння нормалі має вигляд

$$\frac{x - x_0}{f_x'(x_0,\,y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y'(x_0,\,y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \tag{10}$$

124. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = \frac{x^2}{2} - y^2$ у точці $M(2;\,-1;\,1)$.

Γ Знайдемо частинні похідні даної функції та їх значення у точці M:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x,\quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y\,,\quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = 2\,.$$

Застосовуючи формули (9) і (10) маємо:

$z-1=2(x-2)+2(y+1)$ або $2x+2y-z-1=0$ – рівняння дотичної площини;

$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$ – рівняння нормалі. ┘

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

125. Написати рівняння дотичної площини і рівняння нормалі до параболоїда $z = x^2 + y^2$ у точці $(1;\,-2;\,5)$.

Відповідь:

125. $2x-4y-z-5=0$; $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-5}{-1}$.

9.2. Рівняння дотичної площини і нормалі у випадку неявного задання поверхні

У випадку, коли рівняння поверхні задано у неявній формі

$F(x,\,y,\,z)=0$ і $F(x_0,\,y_0,\,z_0)=0$, відповідні рівняння мають вигляд

$$F_x'(x_0,\,y_0,\,z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,\,y_0,\,z_0)(y-y_0)+$$
$$+F_z'(x_0,\,y_0,\,z_0)(z-z_0)=0 \; - \tag{11}$$

рівняння дотичної площини і

$$\frac{x-x_0}{F_x'(x_0,\,y_0,\,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(x_0,\,y_0,\,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(x_0,\,y_0,\,z_0)} \; - \tag{12}$$

рівняння нормалі.

126. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $3xyz - z^3 = a^3$ у точці, для якої $x=0$, $y=a$.

┌ Знайдемо аплікату точки дотику. Для цього підставимо $x=0$, $y=a$ у рівняння поверхні: $-z^3=a^3$. Звідси $z=-a$. Таким чином, точкою дотику є $M(0;\,a;\,-a)$.

Позначимо через $F(x,\ y,\ z)$ ліву частину рівняння і знайдемо частинні похідні та їх значення у точці M :

$F_x' = 3yz$, $\left(F_x'\right)_M = -3a^2$; $F_y' = 3xz$, $\left(F_y'\right)_M = 0$; $F_z' = 3xy - 3z^2$, $\left(F_z'\right)_M = -3a^2$.

Застосуємо формули (11) і (12):

$-3a^2(x-0) + 0(y-a) - 3a^2(z+a) = 0$ або $x + z + a = 0$ – рівняння дотичної площини;

$\dfrac{x-0}{-3a^2} = \dfrac{y-a}{0} = \dfrac{z+a}{-3a^2}$ або $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-a}{0} = \dfrac{z+a}{1}$ – рівняння нормалі. ┘

Вправи для самостійного розв'язання

127. Написати рівняння дотичної площини і рівняння нормалі до конуса $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{8} = 0$ у точці $(4;\ 3;\ 4)$.

Відповідь:

127. $3x + 4y - 6z = 0$; $\dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-4}{-6}$.

10. Екстремуми функції двох змінних

10.1. Локальний екстремум функції

Функція $f(x,\ y)$ має *локальний максимум* (*мінімум*) $f(a,\ b)$ у точці $P(a;\ b)$, якщо для всіх відмінних від P точок $P'(x;\ y)$ у деякому околі точки P виконується нерівність $f(a,\ b) > f(x,\ y)$ (відповідно $f(a,\ b) < f(x,\ y)$). Максимум або мінімум функції називається її *екстремумом*. Аналогічно визначається екстремум функції трьох і більшого числа змінних.

Необхідна умова екстремуму. Точки, в яких диференційовна функція $f(x,\ y)$ може набувати екстремуму, знаходять шляхом розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} f_x'(x,\ y) = 0 \\ f_y'(x,\ y) = 0. \end{cases} \qquad (13)$$

Розв'язки системи (13) називають *стаціонарними точками*.

У загальному випадку в точці екстремуму $P(a;\,b)$ функції $f(x,\,y)$ або виконуються умови (13), або принаймні одна з похідних f_x', f_y' не існує.

Достатня умова екстремуму. У стаціонарній точці $P(a;\,b)$ знаходимо

$$A = f_x''(a,\,b),\;\; B = f_{xy}''(a,\,b),\;\; C = f_{yy}''(a,\,b),\;\; \Delta = AC - B^2 .$$

Тоді: 1) якщо $\Delta > 0$, то функція має екстремум у точці $P(a;\,b)$, а саме – максимум, якщо $A < 0$, і мінімум, якщо $A > 0$;

2) якщо $\Delta < 0$, то екстремуму в точці $P(a;\,b)$ немає;

3) якщо $\Delta = 0$, то потрібні подальші дослідження.

128. Дослідити на екстремуми функцію

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y\ .$$

$\ulcorner$ Знайдемо частинні похідні і складемо систему (13):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15\,, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12\,, \qquad \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases} \qquad \text{або}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ xy - 2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему і знаходимо чотири стаціонарні точки: $P_1(1;\,2)$, $P_2(2;\,1)$, $P_3(-1;\,-2)$, $P_4(-2;\,-1)$.

Знайдемо похідні 2-го порядку $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x$ і обчислимо $\Delta = AC - B^2$ для кожної стаціонарної точки.

1) Точка P_1: $A = \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{P_1} = 6$, $B = \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{P_1} = 12$, $C = \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{P_1} = 6$; $\Delta = AC - B^2 = 36 - 144 = -108$. Оскільки $\Delta < 0$, то у точці P_1 екстремуму немає.

2) Точка P_2: $A = 12$, $B = 6$, $C = 12$; $\Delta = 144 - 36 = 108$. Оскільки $\Delta > 0$ і $A > 0$, то у точці P_2 функція має мінімум. Цей мінімум

дорівнює значенню функції при $x=2$, $y=1$: $z_{\min}=8+6-30-12=-28$.

3) Точки P_3: $A=-6$, $B=-12$, $C=-6$; $\Delta=36-144=-108$. Оскільки $\Delta<0$, то у точці P_3 екстремуму немає.

4) Точка P_4: $A=-12$, $B=-6$, $C=-12$; $\Delta=144-36=108$. Оскільки $\Delta>0$ і $A<0$, то у точці P_4 функція має максимум, що дорівнює $z_{\max}=-8-6+30+12=28$. $\lrcorner$

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

129. Дослідити на екстремуми функцію $z=x^2+xy+y^2-2x-y$.

130. Дослідити на екстремуми функцію $z=(x-1)^2-2y^2$.

Відповіді:

129. $z_{\min}=-1$ при $x=1$, $y=0$.

130. Екстремумів немає.

10.2. Умовний екстремум

У найпростішому випадку *умовним екстремумом* функції $f(x,\ y)$ називається максимум або мінімум цієї функції за умови, що її аргументи пов'язані рівнянням зв'язку $\varphi(x,\ y)=0$. Для знаходження умовного екстремуму функції $f(x,\ y)$ при співвідношенні $\varphi(x,\ y)=0$ складають *функцію Лагранжа*

$$F(x,\ y)=f(x,\ y)+\lambda\cdot\varphi(x,\ y),$$

де λ – невизначений сталий множник. *Необхідні умови екстремуму* зводяться до системи трьох рівнянь з трьома невідомими x, y, λ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial\lambda}=\varphi(x,\ y)=0. \end{cases} \tag{14}$$

Достатні умови умовного екстремуму. Нехай x_0, y_0, λ_0 – розв'язок системи (14). Складемо визначник

$$\Delta = -\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial y^2} & \dfrac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}. \qquad (15)$$

Якщо $\Delta < 0$, то функція $f(x, y)$ має у точці (x_0, y_0, λ_0) умовний максимум; якщо $\Delta > 0$ – умовний мінімум.

131. Знайти екстремуми функції $z = 6 - 4x - 3y$ за умови, що змінні x і y задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = 1$.

Γ Геометрично задача зводиться до знаходження найбільшого і найменшого значень аплікати z площини $z = 6 - 4x - 3y$ для точок її перетину із циліндром $x^2 + y^2 = 1$.

Складаємо функцію Лагранжа

$$F(x, y, \lambda) = 6 - 4x - 3y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right).$$

Маємо $\dfrac{\partial F}{\partial x} = -4 + 2\lambda x$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -3 + 2\lambda y$, $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1$.

З необхідної умови дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -4 + 2\lambda x = 0 \\ -3 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

розв'язуючи яку знаходимо

$$\lambda_1 = \frac{5}{2},\ x_1 = \frac{4}{5},\ y_1 = \frac{3}{5} \text{ і } \lambda_2 = -\frac{5}{2},\ x_2 = -\frac{4}{5},\ y_2 = -\frac{3}{5}.$$

Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda,\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda.$$

При $\lambda = \dfrac{5}{2}$, $x = \dfrac{4}{5}$, $y = \dfrac{3}{5}$ маємо визначник (15)

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1,4 \\ 0 & 5 & 1,2 \\ 1,4 & 1,2 & 0 \end{vmatrix} = 20 > 0 .$$

Отже, у точці $\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$ функція має умовний мінімум.

При $\lambda = -\frac{5}{2}$, $x = -\frac{4}{5}$, $y = -\frac{3}{5}$ маємо визначник (15)

$$\Delta = -\begin{vmatrix} -5 & 0 & -1,4 \\ 0 & -5 & -1,2 \\ -1,4 & -1,2 & 0 \end{vmatrix} = -20 < 0 .$$

Отже, у точці $\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$ функція має умовний максимум.

Таким чином,

$$z_{\max} = 6 + \frac{16}{5} + \frac{9}{5} = 11, \qquad z_{\min} = 6 - \frac{16}{5} - \frac{9}{5} = 1. \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

132. Знайти умовні екстремуми функції $z = xy$ при $x + y = 1$.

133. Знайти умовні екстремуми функції $z = x + 2y$ при $x^2 + y^2 = 5$.

Відповіді:

132. $z_{\max} = \frac{1}{4}$ при $x = y = \frac{1}{2}$.

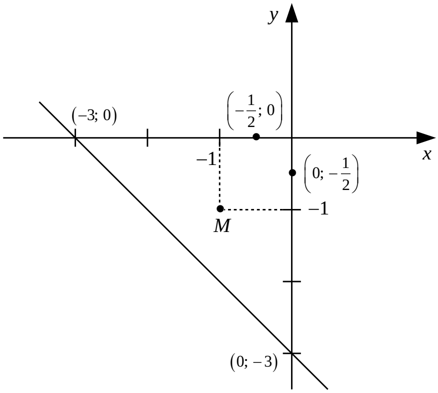
133. $z_{\max} = 5$ при $x = 1$, $y = 2$; $z_{\min} = -5$ при $x = -1$, $y = -2$.

10.3. Найбільше і найменше значення функції

Диференційовна функція в обмеженій замкненій області набуває свого найбільшого (найменшого) значення або у стаціонарній точці або у точці межі області.

134. Визначити найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в області $x \le 0$, $y \le 0$, $x + y \ge -3$.

$\ulcorner$ Зазначена область є трикутником.



1) Знайдемо стаціонарні точки: $z'_x = 2x - y + 1$, $z'_y = 2y - x + 1$, $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$. Розв'язуючи систему, знаходимо $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1. \end{cases}$ Точка $M(-1; -1)$ належить області.

У точці M значення функції $z(M) = -1$. Дослідження на екстремум не є обов'язковим.

2) Досліджуємо функцію на межі області.

Якщо $x = 0$, то $z = y^2 + y$ і задача зводиться до знаходження найбільшого і найменшого значень цієї функції одного аргументу (див. розділ 5) на відрізку $-3 \le y \le 0$. Похідна функції:

$z' = \left(y^2 + y\right)' = 2y + 1$. Знаходимо критичні точки з умови $z' = 0$: $2y + 1 = 0$, $y = -\dfrac{1}{2}$. Ця точка належить відрізку $[-3, 0]$. Знаходимо значення функції:

$$z\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4},$$

$$z(-3) = (-3)^2 - 3 = 9 - 3 = 6,$$

$$z(0) = 0 + 0 = 0.$$

При $y = 0$ маємо $z = x^2 + x$. Аналогічно проводимо дослідження на найбільше і найменше значення цієї функції одного аргументу на відрізку $-3 \le x \le 0$.

$$z' = \left(x^2 + x\right)' = 2x + 1 .$$

$$z' = 0: \quad 2x + 1 = 0 , \; x = -\frac{1}{2} \in \left[-3, \, 0\right] .$$

$$z\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} ,$$

$$z\left(-3\right) = \left(-3\right)^2 - 3 = 6 ,$$

$$z\left(0\right) = 0 + 0 = 0 .$$

При $x + y = -3$, або $y = -3 - x$ маємо функцію $z = x^2 + \left(-3 - x\right)^2 - x \cdot \left(-3 - x\right) + x + \left(-3 - x\right) = 3x^2 + 9x + 6$ на відрізку $-3 \le x \le 0$. Дослідження проводимо аналогічно попередньому.

$$z' = \left(3x^2 + 9x + 6\right)' = 6x + 9 .$$

$$z' = 0: \quad 6x + 9 = 0 , \quad x = -\frac{3}{2} \in \left[-3, \, 0\right] .$$

$$z\left(-\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 9 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 6 = -\frac{3}{4} ,$$

$$z\left(-3\right) = 3 \cdot \left(-3\right)^2 + 9 \cdot \left(-3\right) + 6 = 6 ,$$

$$z\left(0\right) = 0 + 0 + 6 = 6 .$$

3) Порівнюємо всі знайдені значення функції z . Робимо висновок, що $z_{\text{найб.}} = 6$ у точках $\left(0; -3\right)$ і $\left(-3; 0\right)$; $z_{\text{найм.}} = -1$ у стаціонарній точці $M\left(-1; -1\right)$. ⌋

Вправи для самостійного розв’язання

135. Знайти найбільше значення функції $z = x + y + 2$ в областях: 1) $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 1$; 2) $x \ge 0$, $y \le 0$, $x - y \le 1$.

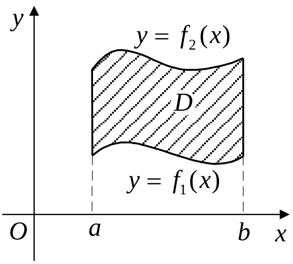
Відповідь:

135. 1) $z_{\text{найб.}} = 3$ при $x = 0$, $y = 1$.

2) $z_{\text{найб.}} = 3$ при $x = 1$, $y = 0$.

11. Подвійний інтеграл

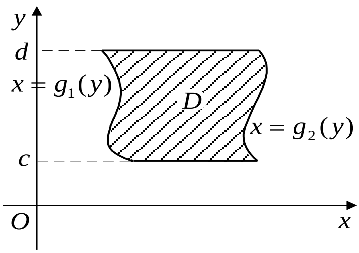
Подвійний інтеграл функції $f(x,y)$ по області D – це число, яке позначають $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$. Обчислення подвійного інтеграла зводиться до обчислення звичайних визначених інтегралів, якщо зробити певні припущення відносно області D.



а) Якщо область D задовольняє умови $a \le x \le b$, $f_1(x) \le y \le f_2(x)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \\ = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx. \qquad (16)$$

При обчисленні внутрішнього інтеграла у правій частині формули (16) змінну x слід вважати сталою.



б) Якщо область D задовольняє умови $c \le y \le d$, $g_1(y) \le x \le g_2(y)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \\ = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy. \qquad (17)$$

При обчисленні внутрішнього інтеграла у правій частині формули (17) змінну y слід вважати сталою.

Обчислити подвійні інтеграли:

136. $\iint\limits_D 2x^2y^3\,dxdy$, де D – прямокутник з вершинами у точках $O(0;\,0)$, $A(2;\,0)$, $B(2;\,1)$, $C(0;\,1)$.

Γ Область D можна задати нерівностями $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$ (див. рис. 1). Тому за формулою (16) матимемо

$$\iint_D 2x^2y^3dxdy = 2\int_0^2\left(x^2\int_0^1 y^3dy\right)dx =$$

$$= 2\int_0^2\left(x^2\cdot\frac{y^4}{4}\Bigg|_0^1\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}. \quad \lrcorner$$

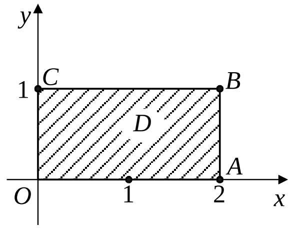


Рис. 1

137. $\iint_D (3x+y)\,dxdy$, де D – трикутник з вершинами у точках $O(0;\,0)$, $A(2;\,0)$, $B(2;\,2)$.

$\ulcorner$ Область D можна задати нерівностями $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le x$ (див. рис. 2). Тому за формулою (16) матимемо

$$\iint_D (3x+y)\,dxdy = \int_0^2\left(3\int_0^x x\,dy + \int_0^x y\,dy\right)dx =$$

$$= \int_0^2\left(3x\int_0^x dy + \int_0^x y\,dy\right)dx =$$

$$= \int_0^2\left(3x\cdot y\Big|_0^x + \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^x\right)dx =$$

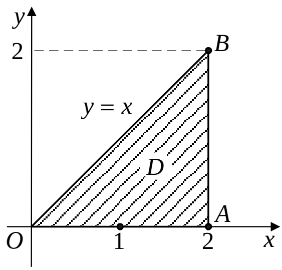


Рис. 2

$$= \int_0^2\left(3x^2 + \frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{7}{2}\int_0^2 x^2\,dx = \frac{7}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{28}{3}. \quad \lrcorner$$

138. $\iint_D x\,dx\,dy$, де D – трикутник з вершинами у точках $O(0;\,0)$, $A(1;\,1)$, $B(0;\,1)$.

$\ulcorner$ Область D можна задати нерівностями $0 \le x \le 1$, $x \le y \le 1$ (див. рис. 3). Тому за формулою (16) матимемо

$$\iint_D x\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_x^1 x\,dy\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(x\int_x^1 dy\right)dx=\int_0^1 x\cdot\left(y\Big|_x^1\right)dx=$$

$$=\int_0^1 x(1-x)\,dx=\int_0^1\left(x-x^2\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1-\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.\quad \lrcorner$$

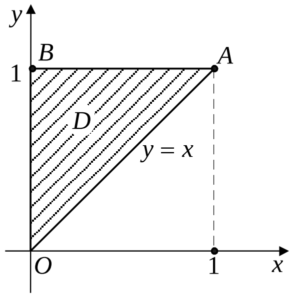


Рис. 3

139. $\iint_D e^{\frac{x}{y}}\,dxdy$, де D – криволінійний трикутник OAB, обмежений параболою $y^2=x$ і прямими $x=0$, $y=1$.

$\ulcorner$ Область D можна задати нерівностями $0\le y\le 1$, $0\le x\le y^2$ (див. рис. 4). Тому за формулою (17) матимемо

$$\iint_D e^{\frac{x}{y}}dxdy=\int_0^1\left(\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\,dx\right)dy=$$

$$=\int_0^1\left(y\cdot e^{\frac{x}{y}}\bigg|_0^{y^2}\right)dy=\int_0^1 y\left(e^{\frac{y^2}{y}}-e^0\right)dy=$$

$$=\int_0^1\left(y\left(e^y-1\right)\right)dy=\int_0^1 ye^y dy-\int_0^1 y\,dy=$$

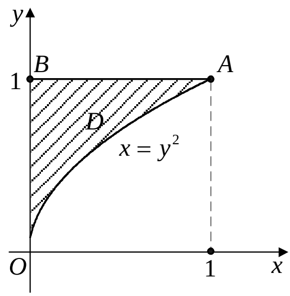


Рис. 4

$$=\begin{vmatrix} u=y, & du=dy \\ dv=e^y dy, & v=e^y \end{vmatrix}=y\cdot e^y\Big|_0^1-\int_0^1 e^y dy-\frac{y^2}{2}\bigg|_0^1=$$

$$=y\cdot e^y\Big|_0^1-e^y\Big|_0^1-\frac{1}{2}=e-(e-1)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\quad \lrcorner$$

140. $\iint_D \frac{x\,dxdy}{x^2+y^2}$, де D – параболічний сегмент, обмежений параболою $y=\frac{x^2}{2}$ і прямою $y=x$.

⌈ Область D можна задати нерівностями $0 \le x \le 2$, $\frac{x^2}{2} \le y \le x$ (див. рис. 5). Тому за формулою (16) матимемо

$$\iint_D \frac{x\,dxdy}{x^2+y^2} = \int_0^2 \left(\int_{\frac{x^2}{2}}^{x} \frac{x\,dy}{x^2+y^2} \right) dx =$$

$$= \int_0^2 \left(x \int_{\frac{x^2}{2}}^{x} \frac{dy}{x^2+y^2} \right) dx =$$

$$\int_0^2 \left(x \cdot \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \bigg|_{\frac{x^2}{2}}^{x} \right) dx =$$

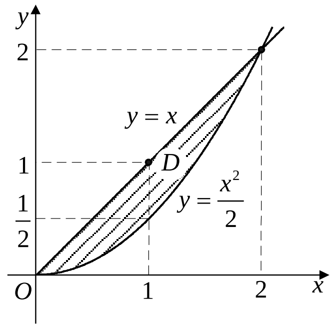


Рис. 5

$$= \int_0^2 \left(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right) dx = \frac{\pi}{4} \int_0^2 dx - \int_0^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{2}\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot x \Big|_0^2 - I = \frac{\pi}{2} - I\,,$$

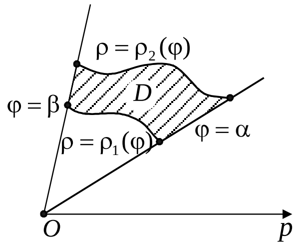
де $I = \int_0^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{2}\, dx$. Обчислимо цей інтеграл за формулою інтегрування частинами. Покладемо $u = \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$, $dv = dx$. Тоді $du = \frac{dx}{1+\frac{x^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2\,dx}{4+x^2}$, $v = x$. Отже,

$$I = x \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \bigg|_0^2 - \int_0^2 \frac{2x\,dx}{4+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \bigg|_0^2 - \ln\left(4+x^2\right) \Big|_0^2 =$$

$$= 2 \cdot \frac{\pi}{4} - (\ln 8 - \ln 4) = \frac{\pi}{2} - \ln 2\,.$$

Остаточно маємо $\iint_D \frac{x\,dxdy}{x^2+y^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \ln 2 = \ln 2$. ⌋

В деяких випадках зручно зробити заміну змінних у подвійному інтегралі. Якщо область D задовольняє у полярних координатах $(\varphi;\ \rho)$ умови $\alpha \le \varphi \le \beta$, $\rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi)$, то має місце формула



$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dxdy = \int\limits_\alpha^\beta \left(\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho \right) d\varphi. \qquad (18)$$

Обчислити подвійні інтеграли:

141. $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$, де D – круг радіуса $R=1$ з центром у початку координат.

$\ulcorner$ Перейдемо до полярних координат за формулами $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Тоді $\sqrt{1-x^2-y^2} =$

$$= \sqrt{1-(\rho\cos\varphi)^2-(\rho\sin\varphi)^2} = \sqrt{1-\rho^2}.$$

Область D задається нерівностями $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \rho \le 1$ (див. рис. 6). Тому за формулою (18) матимемо

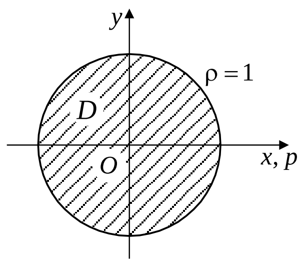


Рис. 6

$$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy = \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho\right)d\varphi =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = 1-\rho^2 \\ dt = -2\rho d\rho \\ t_1 = t(0) = 1 \\ t_2 = t(1) = 0 \end{array} \right| = \int\limits_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\int\limits_1^0 \sqrt{t}\,dt\right)d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\left.\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^0\right)d\varphi = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(0-\frac{2}{3}\right)d\varphi = \frac{1}{3}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3}. \quad \lrcorner$$

142. $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, де $D: x^2+y^2\le 4$, $x\ge 0$.

⌈ Область D – права половина круга радіуса $R=2$ з центром у початку координат (див. рис. 7). Перейдемо до полярних координат:

$$x^2+y^2=\left(\rho\cos\varphi\right)^2+\left(\rho\sin\varphi\right)^2=\rho^2.$$

Область D можна задати нерівностями $0\le\rho\le 2$ $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$. За формулою (18) матимемо

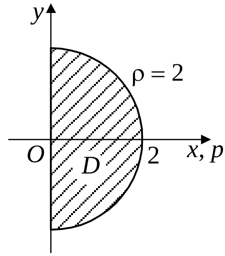


Рис. 7

$$\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_0^2\rho^3\,d\rho\right)d\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^2\right)d\varphi=$$

$$=4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=4\cdot\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=4\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=4\pi.\ ⌋$$

143. Обчислити $\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$, де D частина круга $x^2+y^2\le Rx$, що знаходиться у першому октанті.

⌈ Перейдемо до полярних координат: $\sqrt{R^2-x^2-y^2}=$
$=\sqrt{R^2-\left(\rho\cos\varphi\right)^2-\left(\rho\sin\varphi\right)^2}=$
$=\sqrt{R^2-\rho^2}$; рівняння кола $x^2+y^2=Rx$ набуває вигляду $\rho^2=R\rho\cos\varphi$, або $\rho=R\cos\varphi$. Область D задається

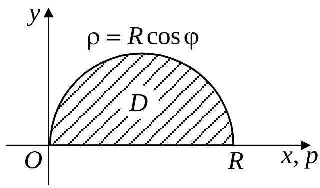


Рис. 8

нерівностями $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\rho\le R\cos\varphi$ (див. рис. 8). За формулою (18) матимемо

$$\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_0^{R\cos\varphi}\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho\right)d\varphi=$$

$$=\left|\begin{array}{l} t=R^2-\rho^2,\ dt=-2\rho\,d\rho \\ t_1=t(0)=R^2 \\ t_2=t(R\cos\varphi)=R^2\left(1-\cos^2\varphi\right)=R^2\sin^2\varphi \end{array}\right|=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}\int_{R^2}^{R^2\sin^2\varphi}\sqrt{t}\,dt\right)d\varphi=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{3}\left(\sqrt{t}\right)^3\Big|_{R^2}^{R^2\sin^2\varphi}\right)d\varphi=$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(R^3\sin^3\varphi-R^3\right)d\varphi=-\frac{1}{3}R^3\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\ \sin\varphi\ d\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\right]=$$

$$=-\frac{R^3}{3}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2\varphi\right)\sin\varphi\ d\varphi-\varphi\Big|_0^{\pi/2}\right]=\left|\begin{array}{l} t=\cos\varphi \\ dt=-\sin\varphi\,d\varphi \\ t_1=t(0)=1 \\ t_2=t\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{array}\right|=$$

$$=-\frac{R^3}{3}\left[-\int_1^0\left(1-t^2\right)dt-\frac{\pi}{2}\right]=\frac{R^3}{3}\left[\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^0+\frac{\pi}{2}\right]=$$

$$=\frac{R^3}{3}\left(0-1+\frac{1}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{18}(3\pi-4)R^3\ .\ \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Обчислити подвійні інтеграли:

144. $\iint\limits_D xy\,dxdy$, $D: 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 2$.

145. $\iint\limits_D e^{x+y}\,dxdy$, $D: 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1$.

146. $\iint\limits_D \cos(x+y)\,dx\,dy$, D – область, обмежена прямими $x=0$, $y=\pi$ і $y=x$.

147. $\iint\limits_D x^3y^2\,dxdy$, D: круг $x^2+y^2\le R^2$.

148. $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, D: круг $x^2+y^2\le 2x$.

Відповіді:

144. 1. **145.** $\left(e-1\right)^2$.

146. -2. **147.** 0.

148. $\frac{3}{2}\pi$.