Розділ 5. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

1. Знаходження похідної за означенням

За означенням *похідна функції* $y = f(x)$ у точці x обчислюється за формулою

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \qquad (1)$$

якщо границя існує і скінченна. Тут $\Delta f(x)$ – *приріст функції*; Δx – *приріст аргументу* ($\Delta x \neq 0$).

Для похідної використовують також інші позначення, зокрема: $y'(x)$, y', $\dfrac{dy}{dx}$. Операцію знаходження похідної називають *диференціюванням* функції.

За фізичним змістом похідна характеризує швидкість зміни функції.

Обчислити за означенням похідні функцій:

1. $f(x) = x^2$.

⌜ Знайдемо приріст функції: $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$. Для даної функції

$$\Delta f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\cdot\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\cdot\Delta x + \Delta x^2 =$$
$$= \Delta x(2x + \Delta x).$$

Знаходимо похідну функції за формулою (1):

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x+\Delta x) =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0}(2x) + \lim_{\Delta x \to 0}\Delta x = 2x + 0 = 2x$$

(скористалися властивостями границь, див. розділ 4).

Отже, $(x^2)' = 2x$. ⌟

2. $f(x) = x^3$.

⌜ Знайдемо приріст функції

$$\Delta f(x) = (x+\Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 =$$
$$= 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 = \Delta x\left(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2\right).$$

Знаходимо похідну функції за формулою (1):

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\left(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(3x^2\right)+3x\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x^2=3x^2+3x\cdot 0+0=3x^2 .$$

Отже, $\left(x^3\right)'=3x^2$. ┘

Зауваження. Дещо складніше за формулою (1) знаходиться похідна степеневої функції з довільним показником степеня $n\in R$: $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$. Звідси випливають, зокрема, формули, отримані в прикладах **1**, **2** (див. далі підрозділ **2**).

3. $f(x)=\sin x$.

┌ Знайдемо приріст функції

$$\Delta f(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

(при обчисленні різниці синусів скористалися формулою $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$).

Знаходимо похідну функції:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(2\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=$$

$$=1\cdot\cos x=\cos x .$$

Отже, $(\sin x)'=\cos x$. ┘

4. $f(x)=\cos x$.

┌ Знайдемо приріст функції

$$\Delta f\left(x\right)=\cos\left(x+\Delta x\right)-\cos x=-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

(при обчисленні різниці косинусів скористалися формулою $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$).

Знаходимо похідну функції:

$$f'\left(x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f\left(x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\right)=$$

$$=-2\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=-2\sin x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\right)=$$

$$=-2\sin x\cdot\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x\,.$$

Отже, $\left(\cos x\right)'=-\sin x$. ⌋

5. $y=\ln x$.

⌈ Знайдемо приріст функції

$\Delta f\left(x\right)=\ln\left(x+\Delta x\right)-\ln x=\ln\frac{x+\Delta x}{x}=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$ (при обчисленні різниці логарифмів скористалися формулою $\ln x-\ln y=\ln\frac{x}{y}$).

Знаходимо похідну функції:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f\left(x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x}{\Delta x}\cdot\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=$$

$$=\frac{1}{x}\ln\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$$

(при обчисленні границі скористалися формулами $k\ln x = \ln x^k$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ та властивостями границь: а) сталий множник виноситься за знак границі; б) якщо функція неперервна, то знак границі та знак функції можна міняти місцями).

Отже, якщо $y = \ln x$, то $y' = \dfrac{1}{x}$. ┘

6. Знайти похідну функції $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, \ \textit{якщо } x \neq 0 \\ 0 \qquad\quad\ , \ \textit{якщо } x = 0 \end{cases}$ у точці $x = 0$.

┌ $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{(\Delta x)^2 \sin\dfrac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \left(\Delta x \sin\dfrac{1}{\Delta x}\right) = 0$, оскільки $\left|\sin\dfrac{1}{\Delta x}\right| \le 1$.

Отже, $f'(0) = 0$. ┘

7. Довести, що функція $f(x) = |x|$ не має похідної в точці $x = 0$.

┌ Обчислимо односторонні границі:

$$\lim_{\Delta x\to 0-0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-0} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0+0} = \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+0} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Оскільки односторонні границі різні, то це означає, що границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta f(0)}{\Delta x}$ не існує, тобто функція $f(x) = |x|$ в точці $x = 0$ похідної не має. ┘

8. Довести, що функція $y = \sqrt[3]{x}$ не має похідної в точці $x = 0$.

┌ Відповідно до формули (1) знайдемо границю:

$\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta f(0)}{\Delta x} \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{0+\Delta x} - \sqrt[3]{0}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}} = \infty$. Отже, похідна функції $y = \sqrt[3]{x}$ в точці $x = 0$ не існує. ┘

Вправи для самостійного розв’язання

Обчислити за означенням похідні функцій:

9. $y = c$, де c – стала. **10.** $y = x$.

11. $y = \sqrt{x}$. **12.** $y = \dfrac{1}{x}$.

13. $y = \dfrac{1}{x^2}$.

14. Довести, що функція $y = \sqrt{x}$ не має похідної в точці $x = 0$.

15. Довести, що функція $y = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ не має похідної в точці $x = 0$.

Відповіді:

9. $y' = 0$. **10.** $y' = 1$.

11. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x \in (0, +\infty)$. **12.** $y' = -\dfrac{1}{x^2}$.

13. $y' = -\dfrac{2}{x^3}$.

2. Таблиця похідних основних елементарних функцій

I. $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$ (n – будь-яке дійсне число)

II. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$

Зокрема, при $a = e$

II°. $\left(e^x\right)' = e^x$

III. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a} \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

Зокрема, при $a = e$

III°. $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$

IV. $\left(\sin x\right)' = \cos x$

V. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$

VI. $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

VII. $\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

VIII. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

IX. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

X. $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

XI. $\left(\operatorname{arc\,ctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Таблицю похідних потрібно вивчити **напам'ять**!

Скориставшись табличною похідною **I**, обчислити похідні функцій:

16. $y = x$.

⌈ $\left(x\right)' = \left(x^1\right)' = 1\cdot x^{1-1} = x^0 = 1$ (в табличній формулі **I** поклали $n = 1$).

Отже, $\left(x\right)' = 1$. ⌋

17. $y = \dfrac{1}{x}$.

⌈ $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1\cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$ (в табличній формулі **I** поклали $n = -1$).

Отже, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$. ⌋

18. $y = x^2$.

$\ulcorner$ $\left(x^2\right)' = 2x^{2-1} = 2x$ (в табличній формулі **I** поклали $n = 2$).

Отже, $\left(x^2\right)' = 2x$. $\lrcorner$

19. $y = \dfrac{1}{x^2}$.

$\ulcorner$ $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)' = \left(x^{-2}\right)' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}$ (в табличній формулі **I** поклали $n = -2$). $\lrcorner$

20. $y = \sqrt{x}$.

$\ulcorner$ $\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (в табличній формулі **I** поклали $n = \dfrac{1}{2}$).

Отже, $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. $\lrcorner$

21. $y = \sqrt[3]{x}$.

$\ulcorner$ $\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ (в табличній формулі **I** поклали $n = \dfrac{1}{3}$).

Отже, $\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. $\lrcorner$

22. $y = \sqrt[5]{x}$.

$\ulcorner$ $\left(\sqrt[5]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{5}}\right)' = \dfrac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} = \dfrac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{x^{\frac{4}{5}}} = \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^4}} = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$ (в табличній формулі **I** поклали $n = \dfrac{1}{5}$). $\lrcorner$

23. $y = \sqrt[n]{x}$.

Γ $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ (в табличну формулу **I** підставили замість n число $\frac{1}{n}$).

Отже, $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$. $\lrcorner$

24. $y = x^2\cdot\sqrt[6]{x}$.

Γ $\left(x^2\cdot\sqrt[6]{x}\right)' = \left(x^2\cdot x^{\frac{1}{6}}\right)' = \left(x^{2+\frac{1}{6}}\right)' = \left(x^{\frac{13}{6}}\right)' = \frac{13}{6}x^{\frac{13}{6}-1} = \frac{13}{6}x^{\frac{7}{6}} =$

$$= \frac{13}{6}\sqrt[6]{x^7} = \frac{13}{6}\sqrt[6]{x^6\cdot x^1} = \frac{13}{6}\sqrt[6]{x^6}\cdot\sqrt[6]{x} = \frac{13}{6}x\sqrt[6]{x}\,. \quad \lrcorner$$

Зауваження. Додатково до таблиці основних похідних доцільно **запам’ятати** також похідні, знайдені у прикладах **16**, **17**, **18**, **20**, **21**, **23**.

Обчислити похідні функцій, скориставшись табличною похідною **II** :

25. $y = 2^x$.

Γ $\left(2^x\right)' = 2^x\ln 2$ (в табличній похідній **II** поклали $a = 2$). $\lrcorner$

26. $y = 10^x$.

Γ $\left(10^x\right)' = 10^x\ln 10$ (в табличній похідній **II** покласти $a = 10$). $\lrcorner$

27. $y = e^x$.

Γ $\left(e^x\right)' = e^x\ln e = e^x$, оскільки $\ln e = 1$ (це таблична формула $\mathbf{II^o}$, яку дістаємо з формули **II** при $a = e$, де e – Неперове число, $e \approx 2{,}71$). $\lrcorner$

Обчислити похідні вказаних функцій, скориставшись табличною похідною **III** :

28. $y = \log_3 x$.

⌈ $\left(\log_3 x\right)' = \dfrac{1}{x\ln 3}$ (в табличній похідній **III** поклали $a = 3$). ⌋

29. $y = \lg x$.

⌈ $\left(\lg x\right)' = \dfrac{1}{x\ln 10}$ (в табличній похідній **III** поклали $a = 10$). ⌋

30. $y = \log_{\frac{2}{3}} x$.

⌈ $\left(\log_{\frac{2}{3}} x\right)' = \dfrac{1}{x\ln\frac{2}{3}}$ (в табличній похідній **III** поклали $a = \dfrac{2}{3}$). ⌋

31. $y = \ln x$.

⌈ $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x\ln e} = \dfrac{1}{x}$ (це таблична формула $\mathbf{III^o}$, яку дістаємо з формули **III** при $a = e$, враховуючи, що $\ln e = 1$). ⌋

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Обчислити похідні функцій:

32. $y = x^3$.

33. $y = x^5$.

34. $y = \sqrt[4]{x^3}$.

35. $y = \sqrt[7]{x^5}$.

36. $y = \sqrt[4]{x}$.

37. $y = \sqrt[7]{x}$.

38. $y = \dfrac{1}{x^3}$.

39. $y = \dfrac{1}{x^5}$.

40. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

41. $y = x\cdot\sqrt[3]{x}$.

42. $y = 3^x$.

43. $y = \left(\dfrac{4}{3}\right)^x$.

44. $y = \left(\dfrac{2}{5}\right)^x$.

45. $y = \log_5 x$.

46. $y = \log_{\frac{7}{2}} x$.

Відповіді:

32. $3x^2$.

33. $5x^4$.

34. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$.

35. $\frac{5}{7\sqrt[7]{x^2}}$.

36. $\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$.

37. $\frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}$.

38. $-\frac{3}{x^4}$.

39. $-\frac{5}{x^6}$.

40. $-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$.

41. $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$.

42. $3^x \ln 3$.

43. $\left(\frac{4}{3}\right)^x \ln\frac{4}{3}$.

44. $\left(\frac{2}{5}\right)^x \ln\frac{2}{5}$.

45. $\frac{1}{x\ln 5}$.

46. $\frac{1}{x\ln\frac{7}{2}}$.

3. Основні правила диференціювання функцій

1º. Похідна сталої функції $y = c$ дорівнює нулю, тобто $(c)' = 0$.

2º. $\left(c\cdot f(x)\right)' = c\cdot f'(x)$, де c – стала.

3º. $(u\pm v)' = u'\pm v'$, де $u = u(x)$; $v = v(x)$.

Це правило узагальнюється на довільне скінченне число доданків:

$$(u\pm v\pm w\pm\ldots\pm z)' = u'\pm v'\pm w'\pm\ldots\pm z'.$$

4º. $(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$.

5º. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$.

6º. Нехай $y = f\left[u(x)\right]$ – складна функція, тобто $y = f(u)$, де $u = u(x)$. Тут u – проміжний аргумент, x – незалежна змінна. Тоді

$$y' = f'(u)\cdot u'(x).$$

Правило. Похідна складної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції $f(u)$ по проміжному аргументу u і похідної внутрішньої функції $u(x)$ по незалежній змінній x.

3.1. Похідна лінійної комбінації функцій

Знайти похідні функцій, скориставшись правилами $\mathbf{1^o}$, $\mathbf{2^o}$, $\mathbf{3^o}$:

47. $y = 5$.

$\ulcorner$ $y' = (5)' = 0$ (в $\mathbf{1^o}$ поклали $c = 5$). $\lrcorner$

48. $y = \sin\dfrac{\pi}{8}$.

$\ulcorner$ $y' = \left(\sin\dfrac{\pi}{8}\right)' = 0$ (в $\mathbf{1^o}$ поклали $c = \sin\dfrac{\pi}{8}$). $\lrcorner$

49. $y = \arcsin\dfrac{1}{4} + \operatorname{arctg} 3$.

$\ulcorner$ $y' = \left(\arcsin\dfrac{1}{4} + \operatorname{arctg} 3\right)' = 0$ (в $\mathbf{1^o}$ поклали $c = \arcsin\dfrac{1}{4} + \operatorname{arctg} 3$). $\lrcorner$

50. $y = \cos 10^\circ$.

$\ulcorner$ $y' = \left(\cos 10^\circ\right)' = 0$ (в $\mathbf{1^o}$ поклали $c = \cos 10^\circ$). $\lrcorner$

51. $y = 5x^7$.

$\ulcorner$ $y' = \left(5x^7\right)' = 5\left(x^7\right)' = 5 \cdot 7x^6 = 35x^6$ (використали правило $\mathbf{2^o}$, яке стверджує, що сталий множник виноситься за знак похідної, і взяли похідну функції $f(x) = x^7$ за табличною формулою $\mathbf{I}$, поклавши $n = 7$). $\lrcorner$

52. $y = -4\sin x$.

$\ulcorner$ $y' = (-4\sin x)' = -4(\sin x)' = -4\cos x$ (сталий множник винесли за знак похідної і скористались табличною похідною $\mathbf{IV}$). $\lrcorner$

53. $y = \operatorname{arctg} x + \arccos x$.

$\ulcorner$ $y' = (\operatorname{arctg} x + \arccos x)' = (\operatorname{arctg} x)' + (\arccos x)' =$

$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(скористалися правилом $\mathbf{2^o}$, яке стверджує, що похідна суми функцій дорівнює сумі похідних цих функцій, та табличними похідними **X** і **IX**). $\lrcorner$

54. $y=x^3-\dfrac{1}{x^4}+6\sqrt[3]{x^2}$.

$\ulcorner$ **В**икористовуючи властивості степенів

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}, \qquad a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},$$

подамо задану функцію у вигляді $y=x^3-x^{-4}+6\cdot x^{\frac{2}{3}}$. Використаємо правило $\mathbf{3^o}$ диференціювання алгебраїчної суми та формулу диференціювання степеневої функції $\left(x^n\right)'=n\,x^{n-1}$. Одержимо

$$y'=\left(x^3-x^{-4}+6\cdot x^{\frac{2}{3}}\right)'=\left(x^3\right)'-\left(x^{-4}\right)'+\left(6x^{\frac{2}{3}}\right)'=$$

$$=3x^2-(-4)\,x^{-4-1}+6\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=3x^2+4x^{-5}+4x^{-\frac{1}{3}}=3x^2+\frac{4}{x^5}+\frac{4}{x^{\frac{1}{3}}}=$$

$$=3x^2+\frac{4}{x^5}+\frac{4}{\sqrt[3]{x}}. \quad \lrcorner$$

55. $y=9x^5-\dfrac{4}{x^3}+\sqrt[3]{x^7}-3x+4$.

$\ulcorner$ Міркуючи аналогічно до прикладу **54**, одержимо

$$y'=\left(9x^5-\frac{4}{x^3}+\sqrt[3]{x^7}-3x+4\right)'=\left(9x^5\right)'-\left(\frac{4}{x^3}\right)'+\left(\sqrt[3]{x^7}\right)'-(3x)'+(4)'=$$

$$=9\left(x^5\right)'-4\left(x^{-3}\right)'+\left(x^{\frac{7}{3}}\right)'-3(x)'+(4)'=$$

$$=9\cdot5x^4-4(-3)\,x^{-3-1}+\frac{7}{3}x^{\frac{7}{3}-1}-3\cdot1\cdot x^{1-1}+0=45x^4+12x^{-4}+\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}-3x^0=$$

$$=45x^4+\frac{12}{x^4}+\frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}-3=45x^4+\frac{12}{x^4}+\frac{7}{3}x\sqrt[3]{x}-3$$

$$\left(x^0=1;\ \sqrt[3]{x^4}=\sqrt[3]{x^3\cdot x}=\sqrt[3]{x^3}\cdot\sqrt[3]{x}=x\sqrt[3]{x}\right).$$ ⌟

56. $y=\dfrac{5x^2}{\sqrt[5]{x^2}}+30\sqrt[5]{x}+6x\sqrt[3]{x}$.

⌜ Використаємо підхід, реалізований у прикладах **54** і **55**, та властивості степенів: $a^m a^n=a^{m+n}$; $\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.

Спочатку перепишемо задану функцію в іншому вигляді:

$$y=\frac{5x^2}{\sqrt[5]{x^2}}+30\sqrt[5]{x}-6x\sqrt[3]{x}=5\frac{x^2}{x^{\frac{2}{5}}}+30x^{\frac{1}{5}}-6x\cdot x^{\frac{1}{3}}=$$

$$=5x^{2-\frac{2}{5}}+30x^{\frac{1}{5}}-6x^{1+\frac{1}{3}}=5x^{\frac{8}{5}}+30x^{\frac{1}{5}}-6x^{\frac{4}{3}}.$$

Тепер знайдемо похідну цієї функції:

$$y'=\left(5x^{\frac{8}{5}}+30x^{\frac{1}{5}}-6x^{\frac{4}{3}}\right)'=5\left(x^{\frac{8}{5}}\right)'+30\left(x^{\frac{1}{5}}\right)'-6\left(x^{\frac{4}{3}}\right)'=$$

$$=5\cdot\frac{8}{5}x^{\frac{8}{5}-1}+30\cdot\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}-6\cdot\frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1}=8x^{\frac{3}{5}}+6x^{-\frac{4}{5}}-8x^{\frac{1}{3}}=$$

$$=8\sqrt[5]{x^3}+\frac{6}{x^{\frac{4}{5}}}-8\sqrt[3]{x}=2\left(4\sqrt[5]{x^3}+\frac{3}{\sqrt[5]{x^4}}-4\sqrt[3]{x}\right).$$ ⌟

57. $y=x^5\left(2-\dfrac{x}{3}+3x^2\right)$.

⌜ Похідну заданої функції можна знайти безпосередньо за правилом $\mathbf{4^o}$. Але простіше розкрити спочатку дужки, а далі скористатись правилами $\mathbf{2^o}$ та $\mathbf{3^o}$:

$$y'=\left(2x^5-\frac{x^6}{3}+3x^7\right)'=10x^4-\frac{1}{3}\cdot 6x^5+21x^6=10x^4-2x^5+21x^6.$$ ⌟

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Знайти похідні функцій:

58. $y=\cos\dfrac{\pi}{10}$.

59. $y=\arcsin\dfrac{1}{6}+\operatorname{arctg}2$.

60. $y=-\frac{2}{3}\operatorname{tg}x$.

61. $y=\arcsin x+\log_3 x$.

62. $y=\operatorname{ctg}x-6\cos x$.

63. $y=x^3+3\sin x+2e^x$.

64. $y=4\ln x-\frac{2}{3}\operatorname{arctg}x+5\arccos x$.

65. $y=a\sqrt{x}+x\sqrt{a}$ (a – стала).

66. $y=\sqrt{x}+\frac{5}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3x^3}$.

67. $y=x^5\left(x^3+\frac{x}{2}-2\right)$.

Відповіді:

58. 0.

59. 0.

60. $-\frac{2}{3\cos^2 x}$.

61. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{x\ln 3}$.

62. $-\frac{1}{\sin^2 x}+6\sin x$.

63. $3x^2+3\cos x+2e^x$.

64. $\frac{4}{x}-\frac{2}{3\left(1+x^2\right)}-\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}$.

65. $\frac{a}{2\sqrt{x}}+\sqrt{a}$.

66. $\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{5}{3x\sqrt[3]{x}}+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}$.

67. $8x^7+3x^5-10x^4$.

3.2. Похідна добутку та частки функцій

Знайти похідні функцій, скориставшись правилом $\mathbf{4^o}$:

68. $y=\left(x^2-1\right)\operatorname{tg}x$.

Γ Користуючись правилами диференціювання $\mathbf{4^o}$, $\mathbf{3^o}$ і $\mathbf{1^o}$, а також табличними похідними **I** і **VI**, маємо

$$y'=\left(x^2-1\right)'\operatorname{tg}x+\left(x^2-1\right)\left(\operatorname{tg}x\right)'=2x\operatorname{tg}x+\left(x^2-1\right)\frac{1}{\cos^2 x}=$$

$$=2x\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{x^2-1}{\cos^2 x}=\frac{2x\sin x\cdot\cos x+x^2-1}{\cos^2 x}=\frac{x\sin 2x+x^2-1}{\cos^2 x}$$

(тут привели до спільного знаменника і скористались формулою $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$). $\lrcorner$

69. $y = \left(x^3 + 2\right)\cdot \sin x$.

$\ulcorner$ $y' = \left(x^3 + 2\right)' \cdot \sin x + \left(x^3 + 2\right)\cdot\left(\sin x\right)' = 3x^2 \sin x + \left(x^3 + 2\right)\cos x$. $\lrcorner$

70. $y = \arcsin x \cdot \ln x$.

$\ulcorner$ $y' = \left(\arcsin x\right)' \cdot \ln x + \arcsin x \cdot \left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \ln x + \arcsin x \cdot \dfrac{1}{x} =$

$= \dfrac{\ln x}{\sqrt{1 - x^2}} + \dfrac{\arcsin x}{x}$ (див. похідні **VIII** і **III°** таблиці). $\lrcorner$

71. $y = \log_5 x \cdot 4^x$.

$\ulcorner$ $y' = \left(\log_5 x\right)' \cdot 4^x + \log_5 x\left(4^x\right)' = \dfrac{1}{x\ln 5}\cdot 4^x + \log_5 x \cdot 4^x \ln 4 =$

$= \dfrac{4^x}{x\ln 5} + \ln 4 \log_5 x \cdot 4^x = \dfrac{4^x\left(1 + x\ln 4 \ln 5 \log_5 x\right)}{x\ln 5}$ (див. похідні **III** і **II** таблиці). $\lrcorner$

Знайти похідні функцій, скориставшись правилом **5°** і таблицею похідних:

72. $y = \dfrac{e^x}{\operatorname{ctg} x}$.

$\ulcorner$ Використаємо похідну частки (правило **5°**) двох функцій:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} .$$

Вважаючи $e^x = u$, а $\operatorname{ctg} x = v$, одержимо

$$y' = \frac{\left(e^x\right)' \operatorname{ctg} x - e^x \left(\operatorname{ctg} x\right)'}{\operatorname{ctg}^2 x} = \frac{e^x \operatorname{ctg} x - e^x \left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)}{\operatorname{ctg}^2 x} =$$

$$= \frac{e^x \dfrac{\cos x}{\sin x} + e^x \dfrac{1}{\sin^2 x}}{\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \frac{e^x \dfrac{\sin x \cos x + 1}{\sin^2 x}}{\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} =$$

$$= \frac{e^x \sin^2 x(\sin x \cos x + 1)}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = \frac{e^x (1 + \sin x \cos x)}{\cos^2 x} = \frac{e^x (2 + \sin 2x)}{2\cos^2 x}. \quad \lrcorner$$

73. $y = \dfrac{\arccos x}{x^2 + e^x}$.

$\ulcorner$ Використаємо правила $\mathbf{5^o}$, $\mathbf{3^o}$ та формули $\mathbf{IX}$, $\mathbf{II^o}$:

$$y' = \frac{(\arccos x)'\left(x^2 + e^x\right) - \arccos x\left(x^2 + e^x\right)'}{\left(x^2 + e^x\right)^2} =$$

$$= \frac{-\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\left(x^2 + e^x\right) - \arccos x\left(2x + e^x\right)}{\left(x^2 + e^x\right)^2} =$$

$$= -\frac{x^2 + e^x + \arccos x\left(2x + e^x\right)\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}\left(x^2 + e^x\right)^2}. \quad \lrcorner$$

74. $y = \dfrac{1 + 10^x}{1 - 10^x}$.

$$\ulcorner \quad y' = \left(\frac{1 + 10^x}{1 - 10^x}\right)' = \frac{\left(1 + 10^x\right)'\left(1 - 10^x\right) - \left(1 + 10^x\right)\left(1 - 10^x\right)'}{\left(1 - 10^x\right)^2} =$$

$$= \frac{10^x \ln 10\left(1 - 10^x\right) - \left(1 + 10^x\right)\left(-10^x \ln 10\right)}{\left(1 - 10^x\right)^2} = \frac{10^x \ln 10\left(1 - 10^x + 1 + 10^x\right)}{\left(1 - 10^x\right)^2} =$$

$$= \frac{2 \cdot 10^x \ln 10}{\left(1 - 10^x\right)^2}$$

(використали правила $\mathbf{5^o}$, $\mathbf{3^o}$, $\mathbf{1^o}$ та формулу $\mathbf{II}$). $\lrcorner$

75. $y = \dfrac{\ln x}{x^n}$.

$$\ulcorner \quad y' = \left(\frac{\ln x}{x^n}\right)' = \frac{(\ln x)' x^n - \ln x\left(x^n\right)'}{\left(x^n\right)^2} = \frac{\dfrac{1}{x} \cdot x^n - \ln x \cdot n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} =$$

$$= \frac{x^{n-1} - n \cdot x^{n-1} \ln x}{x^{2n}} = \frac{x^{n-1}\left(1 - n \ln x\right)}{x^{2n}} = x^{n-1-2n}\left(1 - n \ln x\right) =$$

$$= x^{-(n+1)}\left(1 - n\ln x\right) = \frac{1 - n\ln x}{x^{n+1}}$$

(використали правило $\mathbf{5^o}$, формули $\mathbf{III^o}$ і $\mathbf{I}$ та властивості степенів $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$, $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$). $\lrcorner$

76. $y = \dfrac{\arcsin x}{1 + \arccos x}$.

$\ulcorner$

$$y' = \left(\frac{\arcsin x}{1 + \arccos x}\right)' = \frac{\left(\arcsin x\right)'\left(1 + \arccos x\right) - \arcsin x\left(1 + \arccos x\right)'}{\left(1 + \arccos x\right)^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\left(1 + \arccos x\right) - \arcsin x\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right)}{\left(1 + \arccos x\right)^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\left(1 + \arccos x + \arcsin x\right)}{\left(1 + \arccos x\right)^2} = \frac{1 + \arccos x + \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}\left(1 + \arccos x\right)^2} =$$

$$= \frac{1 + \dfrac{\pi}{2}}{\sqrt{1 - x^2}\left(1 + \arccos x\right)^2} = \frac{2 + \pi}{2\sqrt{1 - x^2}\left(1 + \arccos x\right)^2}$$

(використали правила $\mathbf{5^o}$, $\mathbf{3^o}$ і $\mathbf{1^o}$, табличні формули **VIII** і **IX** та формулу $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$). $\lrcorner$

Окремо розглянемо похідну частки функцій, коли чисельник або знаменник є сталою величиною. Нехай маємо функцію $y = \dfrac{c}{v}$ $\left(c = const,\ v = v(x)\right)$. Тоді за правилом $\mathbf{5^o}$

$$y = \frac{c' \cdot v - c \cdot v'}{v^2} = \frac{0 \cdot v - c \cdot v'}{v^2} = \frac{-cv'}{v^2} = -\frac{c}{v^2}v'.$$

Тому доцільно запам’ятати, що

$$\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c}{v^2}v'. \qquad (2)$$

77. $y = \dfrac{1}{x^2 + 5x - 4}$.

$\ulcorner$ За формулою (2)

$$y' = -\frac{1}{\left(x^2+5x-4\right)^2}\cdot\left(x^2+5x-4\right)' = -\frac{1}{\left(x^2+5x-4\right)^2}\left(2x+5\right) =$$

$$= -\frac{2x+5}{\left(x^2+5x-4\right)^2}. \quad \lrcorner$$

78. $y = \dfrac{1}{\arccos x} + \dfrac{4}{5^x}$.

$\ulcorner$ За правилом диференціювання суми та формулою (2) маємо

$$y' = \left(\frac{1}{\arccos x}\right)' + \left(\frac{4}{5^x}\right)' = -\frac{1}{\arccos^2 x}\left(\arccos x\right)' - \frac{4}{5^{2x}}\left(5^x\right)' =$$

$$= -\frac{1}{\arccos^2 x}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \frac{4}{5^{2x}}\cdot 5^x \ln 5 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arccos^2 x} - \frac{4\ln 5}{5^x}. \quad \lrcorner$$

Якщо маємо функцію виду $y = \dfrac{u}{c} = \dfrac{1}{c}\cdot u$ ($c = const$, $u = u(x)$), то за правилом **2°** сталий множник $\dfrac{1}{c}$ $(c \neq 0)$ можна виносити за знак похідної $y' = \dfrac{1}{c}\cdot u'$. Тому доцільно запам'ятати, що

$$\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}. \qquad (3)$$

79. $y = \dfrac{x^5 + 3^x}{\log_3 5}$.

$\ulcorner$ За формулою (3)

$$y' = \frac{\left(x^5 + 3^x\right)'}{\log_3 5} = \frac{5x^4 + 3^x \ln 3}{\log_3 5} \quad \left(\log_3 5 = const\right). \quad \lrcorner$$

80. $y = \dfrac{3\,\mathrm{tg}\, x}{\sin\alpha}$.

$\ulcorner$ За формулою (3)

$$y' = \frac{(3\operatorname{tg} x)'}{\sin\alpha} = \frac{3(\operatorname{tg} x)'}{\sin\alpha} = \frac{3\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\sin\alpha} = \frac{3}{\sin\alpha\cos^2 x} \quad (\sin\alpha = const). \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Обчислити похідні функцій:

81. $y = 5x + x^6 - \sin 2$.

82. $y = 2\sqrt{x} + 0,2x^5$.

83. $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2\sqrt[3]{x^2}$.

84. $y = x\ln x$.

85. $y = (x^2+1)\operatorname{arctg} x$.

86. $y = e^x(\sin x + \cos x)$.

87. $y = \frac{x^2+1}{\ln x}$.

88. $y = \frac{1+\cos x}{\sin x}$.

89. $y = \frac{x-1}{\log_2 x}$.

90. $y = \frac{1-e^x}{1+e^x}$.

91. $y = \frac{3}{1-x^5}$.

92. $y = \frac{1}{x^3 - x^2 + 1}$.

93. $y = \frac{x^2-5x+3}{a^2+5}$.

94. $y = \frac{3-x^8}{\sqrt{e}}$.

Відповіді:

81. $5+6x^5$.

82. $\frac{1}{\sqrt{x}} + x^4$.

83. $\frac{4}{3\sqrt[3]{x}}$.

84. $1+\ln x$.

85. $2x\operatorname{arctg} x + 1$.

86. $2e^x\cos x$.

87. $\frac{x^2(2\ln x - 1) - 1}{x\ln^2 x}$.

88. $-\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}$.

89. $\frac{x\ln x - x + 1}{x\ln^2 x}\ln 2$.

90. $-\frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$.

91. $\dfrac{15x^4}{\left(1-x^5\right)^2}$.

92. $-\dfrac{3x^2-2x}{\left(x^3-x^2+1\right)^2}$.

93. $\dfrac{2x-5}{a^2+5}$.

94. $-\dfrac{8x^7}{\sqrt{e}}$.

3.3. Похідна складної функції

Знайти похідні функцій, скориставшись правилом $\mathbf{6^o}$:

95. $y=\sqrt{x^2+5}$.

$\ulcorner$ Поклавши $u=x^2+5$, маємо $y=\sqrt{u}$. Тому за правилом $\mathbf{6^o}$

$$y'=\underbrace{\left(\sqrt{u}\right)'}_{\substack{\text{похідна зовнішньої}\\ \text{функції по проміж-}\\ \text{ному аргументу } u}}\cdot\underbrace{u'}_{\substack{\text{похідна внут-}\\ \text{рішньої функції}\\ \text{по незалежній}\\ \text{змінній } x}}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+2}}\left(x^2+5\right)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x^2+5}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}.$$

Можна було б відразу продиференціювати функцію за правилом $\mathbf{6^o}$, не вводячи проміжний аргумент:

$$y'=\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x^2+5}}}_{\substack{\text{похідна від квадрат-}\\ \text{ного кореня із функції}}}\cdot\underbrace{2x}_{\substack{\text{похідна від}\\ \text{функції, що}\\ \text{стоїть під}\\ \text{коренем}}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}.\ \lrcorner$$

96. $y=\sqrt[3]{x^4+\sin x}$.

$\ulcorner$ Поклавши $u=x^4+\sin x$, одержимо $y=\sqrt[3]{u}$. За правилом $\mathbf{6^o}$

$$y'=\left(\sqrt[3]{u}\right)'\cdot u'=\frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}\cdot u'=\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(x^4+\sin x\right)^2}}\left(x^4+\sin x\right)'=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(x^4+\sin x\right)^2}}\left(4x^3+\cos x\right)=\frac{4x^3+\cos x}{3\sqrt[3]{\left(x^4+\sin x\right)^2}}.\ \lrcorner$$

97. $y=\left(5x^2+7x+2\right)^3$.

$\ulcorner$ Поклавши $u=5x^2+7x+2$, одержимо $y=u^3$. Надалі будемо писати так: $y=u^3$; $u=5x^2+7x+2$. За правилом $\mathbf{6^o}$:

$$y' = \left(u^3\right)' \cdot u' = 3u^2 \cdot u' = 3\left(5x^2 + 7x + 2\right)^2 \left(5x^2 + 7x + 2\right)' =$$

$$= 3\left(5x^2 + 7x + 2\right)^2 \left(10x + 7\right). \quad \lrcorner$$

98. $y = \sin 15x$.

$\ulcorner$ $y = \sin u$; $u = 15x$.

$$y' = \left(\sin u\right)' \cdot u' = \cos u \cdot u' = \cos 15x \left(15x\right)' = \cos 15x \cdot 15 = 15 \cos x. \quad \lrcorner$$

99. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x} \quad \left(x > 0\right)$.

$\ulcorner$ $y = \operatorname{arctg} u$; $u = \sqrt{x}$.

$$y' = \left(\operatorname{arctg} u\right)' \cdot u' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u' = \frac{1}{1+x} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\left(1+x\right)}. \quad \lrcorner$$

100. $y = \dfrac{2}{\left(3x^2 - 5\right)^3}$.

$\ulcorner$ $y = \dfrac{2}{u}$; $u = \left(3x^2 - 5\right)^3$, де u – також складна функція від x.

$$y' = \left(\frac{2}{u}\right)' \cdot u' = -\frac{2}{u^2} \cdot u' = -\frac{2}{\left(3x^2 - 5\right)^6} \cdot 3\left(3x^2 - 5\right)^2 6x;$$

$$y' = \frac{36}{\left(3x^2 - 5\right)^4}. \quad \lrcorner$$

101. $y = 7^{\frac{1}{4x}}$.

$\ulcorner$ $y = 7^u$; $u = \dfrac{1}{4x}$.

$$y' = \left(7^u\right)' \cdot u' = 7^u \ln 7 \cdot u' = 7^{\frac{1}{4x}} \ln 7 \cdot \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{4x^2} 7^{\frac{1}{4x}} \ln 7. \quad \lrcorner$$

Після деякого числа вправ студент сам відмовляється від введення проміжного аргументу u, розуміючи його в тих місцях, де він потрібен.

102. $y = \log_5\left(x^2 + 4\right)$.

$\ulcorner$ $$y' = \frac{1}{\left(x^2+4\right)\ln 5}\left(x^2+4\right)' = \underbrace{\frac{1}{\left(x^2+4\right)\ln 5}}_{\substack{\text{похідна логарифмічної}\\ \text{функції}}} \cdot \underbrace{2x}_{\substack{\text{похідна}\\ \text{аргументу}\\ \text{логарифма}}} = \frac{2x}{\left(x^2+4\right)\ln 5}\,.$$ $\lrcorner$

103. $y = \left(1+2\operatorname{ctg} x\right)^4$.

$\ulcorner$ $$y' = 4\left(1+2\operatorname{ctg} x\right)^3\left(1+2\operatorname{ctg} x\right)' = \underbrace{4\left(1+2\operatorname{ctg} x\right)^3}_{\substack{\text{похідна степеневої}\\ \text{функції}}}\underbrace{2\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}_{\substack{\text{похідна основи}\\ \text{степеня}}} =$$

$$= -8\frac{\left(1+2\operatorname{ctg} x\right)^3}{\sin^2 x}\,.$$ $\lrcorner$

104. $y = 10\sin\frac{x}{5}$.

$\ulcorner$ $$y' = 10\cos\frac{x}{5}\cdot\left(\frac{x}{5}\right)' = 10\cos\frac{x}{5}\cdot\frac{1}{5} = 2\cos\frac{x}{5}\,.$$ $\lrcorner$

105. $y = 2\cos\left(7x+3\right)$.

$\ulcorner$ $$y' = 2\cdot\left[-\sin\left(7x+3\right)\right]\cdot\left(7x+3\right)' = -2\sin\left(7x+3\right)\cdot 7 =$$

$$= -14\sin\left(7x+3\right).$$ $\lrcorner$

106. $y = \arcsin\left(x-2\right)$.

$\ulcorner$ $$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(x-2\right)^2}}\cdot\left(x-2\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(x^2-4x+4\right)}}\cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}}\,.$$ $\lrcorner$

107. $y = \ln\left(1+5x\right)$.

$\ulcorner$ $$y' = \frac{1}{1+5x}\cdot\left(1+5x\right)' = \frac{1}{1+5x}\cdot 5 = \frac{5}{1+5x}\,.$$ $\lrcorner$

108. $y = \operatorname{arctg} x^3$.

$\ulcorner$ $$y' = \frac{1}{1+\left(x^3\right)^2}\cdot\left(x^3\right)' = \frac{3x^2}{1+x^6}\,.$$ $\lrcorner$

109. $y = \sin\ln x$.

$\ulcorner$ $$y' = \cos\ln x \cdot (\ln x)' = \cos\ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos\ln x}{x}. \quad \lrcorner$$

110. $y = \cos^2 x$.

$\ulcorner$ $$y' = 2\cos x \cdot (\cos x)' = 2\cos x \cdot (-\sin x) = -2\sin x \cos x = -\sin 2x. \quad \lrcorner$$

111. $y = \ln\sin x$.

$\ulcorner$ $$y' = \frac{1}{\sin x}(\sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x. \quad \lrcorner$$

112. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

$\ulcorner$ $$y' = \left(\left(x^2 + x + 1\right)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}\left(x^2 + x + 1\right)^{-\frac{3}{2}}\left(x^2 + x + 1\right)' =$$

$$= -\frac{1}{2\left(x^2 + x + 1\right)^{\frac{3}{2}}}(2x + 1) = -\frac{2x + 1}{2\left(x^2 + x + 1\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad \lrcorner$$

113. $y = \operatorname{ctg}^4 3x^2$.

$\ulcorner$ $$y' = 4\operatorname{ctg}^3 3x^2 \cdot \left(\operatorname{ctg} 3x^2\right)' = 4\operatorname{ctg}^3 3x^2 \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 3x^2}\right)3 \cdot 2x =$$

$$= -\frac{24x\operatorname{ctg}^3 3x^2}{\sin^2 3x^2}. \quad \lrcorner$$

114. $y = \sqrt[3]{x\ln x}$.

$\ulcorner$ $$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x\ln x)^2}} \cdot (x \cdot \ln x)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x\ln x)^2}}\left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \frac{1 + \ln x}{3\sqrt[3]{(x\ln x)^2}}. \quad \lrcorner$$

115. $y = \operatorname{tg}\dfrac{1 + x}{x}$.

$\ulcorner$ $$y' = \frac{1}{\cos^2\frac{1 + x}{x}} \cdot \left(\frac{1 + x}{x}\right)' = \frac{1}{\cos^2\frac{1 + x}{x}} \cdot \frac{1 \cdot x - (1 + x) \cdot 1}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \frac{1+x}{x}} \cdot \frac{x-1-x}{x^2} = -\frac{1}{x^2 \cos^2 \frac{1+x}{x}}. \quad \lrcorner$$

116. $y = \sqrt{\sin^2 x + 5\cos^5 4x}$.

$\ulcorner$ $$y' = \frac{1}{2\sqrt{\sin^2 x + 5\cos^5 4x}} \left[\left(\sin^2 x\right)' + 5\left(\cos^5 4x\right)' \right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin^2 x + 5\cos^5 4x}} \left[2\sin x \cos x + 5 \cdot 5\cos^4 4x \cdot (-\sin 4x) \cdot 4 \right] =$$

$$= \frac{\sin 2x - 100 \sin 4x \cos^4 4x}{2\sqrt{\sin^2 x + 5\cos^5 4x}}. \quad \lrcorner$$

117. $y = \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$\ulcorner$

$$y' = \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2} - \arccos x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)}{1-x^2} = \frac{-1 + \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} =$$

$$= \frac{x \arccos x - \sqrt{1-x^2}}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}. \quad \lrcorner$$

118. $y = \sqrt[3]{1 - \ln^2 x}$.

$\ulcorner$ $$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(1-\ln^2 x\right)^2}} \left(-2\ln x\right) \cdot \frac{1}{x} = -\frac{2\ln x}{3x\sqrt[3]{\left(1-\ln^2 x\right)^2}}. \quad \lrcorner$$

119. $y = \ln\left(x^3 - 2x^2 + x\right)$.

$\ulcorner$ $$y' = \frac{1}{x^3 - 2x^2 + x} \cdot \left(3x^2 - 2 \cdot 2x + 1\right) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}. \quad \lrcorner$$

120. $y = \log_7\left(x^3 + 5\right)$.

$\ulcorner$ $$y' = \frac{1}{\left(x^3+5\right)\ln 7} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{\left(x^3+5\right)\ln 7}. \quad \lrcorner$$

121. $y = 10^{3x^2-7}$.

$\ulcorner$ $$y' = 10^{3x^2-7} \ln 10 \cdot 6x = 6\ln 10 \; x 10^{3x^2-7}. \quad \lrcorner$$

122. $y=\cos\left(7^{x}\right)$.

$\ulcorner$ $y'=-\sin\left(7^{x}\right)\cdot 7^{x}\ln 7=-7^{x}\ln 7\sin\left(7^{x}\right)$. $\lrcorner$

123. $y=\sqrt[5]{1-e^{2x}}$.

$\ulcorner$ $$y'=\frac{1}{5\sqrt[5]{\left(1-e^{2x}\right)^{4}}}\cdot\left(-e^{2x}\cdot 2\right)=-\frac{2e^{2x}}{5\sqrt[5]{\left(1-e^{2x}\right)^{4}}}.$$ $\lrcorner$

124. $y=\operatorname{tg}\sqrt[3]{1+x^{4}}$.

$\ulcorner$ $$y'=\frac{1}{\cos^{2}\sqrt[3]{1+x^{4}}}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(1+x^{4}\right)^{2}}}\cdot 4x^{3}=\frac{4x^{3}}{3\sqrt[3]{\left(1+x^{4}\right)^{2}}\cos^{2}\sqrt[3]{1+x^{4}}}.$$ $\lrcorner$

125. $y=\arccos\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

$\ulcorner$ $$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{-(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^{2}}=$$

$$=-\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x-1+x}}\cdot\frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}}\cdot\frac{-1-x-1+x}{(1+x)^{2}}=-\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{2x}}\cdot\frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}}\cdot\frac{-2}{(1+x)^{2}}=$$

$$=\frac{2(1+x)}{\sqrt{2x}\,2\sqrt{1-x}\,(1+x)^{2}}=\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}.$$ $\lrcorner$

126. $y=\log_{3}(x+\sin x)$.

$\ulcorner$ $$y'=\frac{1}{(x+\sin x)\ln 3}\cdot(1+\cos x)=\frac{1+\cos x}{(x+\sin x)\ln 3}.$$ $\lrcorner$

127. $y=\sin^{4}\left(\dfrac{1-\ln x}{x}\right)$.

$\ulcorner$ $$y'=4\sin^{3}\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)\cdot\cos\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)\cdot\frac{-\frac{1}{x}\cdot x-(1-\ln x)\cdot 1}{x^{2}}=$$

$$=4\sin^{3}\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)\cdot\cos\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)\cdot\frac{-1-1+\ln x}{x^{2}}=$$

$$=\frac{4}{x^{2}}(\ln x-2)\sin^{3}\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)\cdot\cos\left(\frac{1-\ln x}{x}\right).$$ $\lrcorner$

128. $y = x\arcsin(\ln x)$.

$\ulcorner$ $y' = 1\cdot\arcsin(\ln x) + x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}\cdot\dfrac{1}{x} = \arcsin(\ln x) + \dfrac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}$. $\lrcorner$

129. $y = \dfrac{\ln\sin x}{\ln\cos x}$.

$$\ulcorner\quad y' = \frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x\cdot\ln\cos x - \ln\sin x\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{\ln^2\cos x} =$$

$$= \frac{\operatorname{ctg} x\ln\cos x + \operatorname{tg} x\ln\sin x}{\ln^2\cos x}. \quad \lrcorner$$

130. $y = x^2\sqrt{1+\sqrt{x}}$.

$$\ulcorner\quad y' = 2x\sqrt{1+\sqrt{x}} + x^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x\sqrt{1+\sqrt{x}} + \frac{x^2}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}} =$$

$$= \frac{8x\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)+x^2}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}} = \frac{8x\sqrt{x}+8x^2+x^2}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}} = \frac{8x\sqrt{x}+9x^2}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}} = \frac{x\left(8+9\sqrt{x}\right)}{4\sqrt{1+\sqrt{x}}}. \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Обчислити похідні функцій:

131. $y = \sqrt{x^2+2}$.

132. $y = \sqrt{3x^2+5x+1}$.

133. $y = \sqrt[3]{x^2+\cos x}$.

134. $y = \left(1-\sqrt[5]{x}\right)^5$.

135. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+5}}$.

136. $y = \dfrac{1}{\arccos x}$.

137. $y = \cos 9x$.

138. $y = \sin x - \dfrac{1}{3}\sin^3 x$.

139. $y = \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$.

140. $y = \operatorname{ctg}\dfrac{x-3}{4}$.

141. $y = \sqrt{1+2\operatorname{ctg} x}$.

142. $y = \cos(\cos x)$.

143. $y = \cos\sqrt{1+x^3}$.

144. $y = \left(1+\cos^2 x\right)^8$.

145. $y = \arccos\dfrac{3x-1}{\sqrt{5}}$.

146. $y = \arcsin\dfrac{3}{x}$.

147. $y = \operatorname{arctg}^4 \dfrac{1}{x}$.

148. $y = \ln(\cos x)$.

149. $y = \ln(\arcsin 3x)$.

150. $y = \ln^5(\sin x)$.

151. $y = 2^{\cos x}$.

152. $y = e^{\operatorname{arctg} 3x}$.

153. $y = e^{\sqrt{\ln x}}$.

154. $y = \cos x\sqrt{1+\sin^2 x}$.

155. $y = \operatorname{arcctg} \dfrac{x+1}{x-1}$.

156. $y = \operatorname{ctg} \dfrac{1-e^x}{1+e^x}$.

157. $y = \log_3(x^2 - \sin x)$.

158. $y = \sin 3x \ln x$.

159. $y = 10^{1+\cos^3 2x}$.

160. $y = \cos^2 x \cdot \cos x^2$.

Відповіді:

131. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$.

132. $\dfrac{6x+5}{2\sqrt{3x^2+5x+1}}$.

133. $\dfrac{2x-\sin x}{3\sqrt[3]{(x^2+\cos x)^2}}$.

134. $-\dfrac{\left(1-\sqrt[5]{x}\right)^4}{\sqrt[5]{x^4}}$.

135. $-\dfrac{x}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}$.

136. $\dfrac{1}{\arccos^2 x \cdot \sqrt{1-x^2}}$.

137. $-9\sin 9x$.

138. $\cos^3 x$.

139. $\operatorname{tg}^4 x$.

140. $-\dfrac{1}{4\sin^2 \dfrac{x-3}{4}}$.

141. $-\dfrac{1}{\sqrt{1+2\operatorname{ctg} x} \cdot \sin^2 x}$.

142. $\sin(\cos x) \cdot \sin x$.

143. $-\dfrac{3x^2 \sin\sqrt{1+x^3}}{2\sqrt{1+x^3}}$.

144. $-8(1+\cos^2 x)^7 \cdot \sin 2x$.

145. $-\dfrac{3}{\sqrt{4+6x-9x^2}}$.

146. $-\dfrac{3}{|x|\sqrt{x^2-9}}$.

147. $-\dfrac{4\operatorname{arctg}^3 \dfrac{1}{x}}{1+x^2}$.

148. $-\operatorname{tg} x$.

149. $\dfrac{3}{\arcsin 3x\sqrt{1-9x^2}}$.

150. $5\ln^4 \sin x \cdot \operatorname{ctg} x$.

151. $-2^{\cos x} \sin x \cdot \ln 2$.

152. $\dfrac{3e^{\operatorname{arctg} 3x}}{1+9x^2}$.

153. $\dfrac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$.

154. $-\dfrac{2\sin^3 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

155. $\dfrac{1}{1+x^2}$.

156. $\dfrac{2e^x}{\left(1+e^x\right)^2} \cdot \dfrac{1}{\sin^2 \dfrac{1-e^x}{1+e^x}}$.

157. $\dfrac{2x-\cos x}{\left(x^2-\sin x\right)\ln 3}$.

158. $3\cos 3x \ln x + \dfrac{\sin 3x}{x}$.

159. $-6\ln 10 \cdot 10^{1+\cos^3 2x} \cos^2 2x \cdot \sin 2x$.

160. $y = -2\cos x\left(\sin x \cos x^2 + x\cos x \sin x^2\right)$.

4. Диференціювання функцій, заданих неявно

Якщо кожному числу x з множини X ставиться у відповідність єдине число y так, що пара чисел $(x; y)$ задовольняє рівняння $F(x, y) = 0$, то кажуть, що *функцію* $y = f(x)$, $x \in X$ *, задано неявно.*

Незважаючи на те, що рівняння $F(x, y) = 0$ не розв'язане відносно y, можна знайти похідну $y' = y'(x)$. Для цього потрібно:

1) обидві частини рівняння $F(x, y) = 0$ продиференціювати по x, вважаючи, що y є функцією від x;

2) одержане рівняння розв'язати відносно y'.

Знайти похідні функцій, що задані неявно:

161. $5x + 3y - 7 = 0$.

$\ulcorner$ 1) Продиференціюємо по x обидві частини рівняння, враховуючи, що y є функцією від x:

$$5 + 3y' = 0.$$

2) Розв'яжемо рівняння відносно y':

$$3y' = -5,\ y' = -\frac{5}{3}. \quad \lrcorner$$

162. $x^3+y^3-3axy=0$, де $a=const$.

⌈ 1) Продиференціюємо по x обидві частини рівняння, враховуючи, що y є функцією від x:

$$3x^2+3y^2y'-3a\left(1\cdot y+xy'\right)=0$$

(за правилом диференціювання складної функції $\left(y^3\right)'=3y^2y'$).

2) Розв'яжемо одержане рівняння відносно y':

$$3x^2+3y^2y'-3ay-3axy'=0,\quad y^2y'-axy'=ay-x^2,$$

$$y'\left(y^2-ax\right)=ay-x^2,\quad y'=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}.$$ ⌋

163. $\operatorname{arctg} y-y+x=0$.

⌈ 1) Диференціюємо задане співвідношення, розглядаючи y як функцію від x:

$$\frac{1}{1+y^2}y'-y'+1=0$$

(за правилом диференціювання складної функції $\left(\operatorname{arctg} y\right)'=\dfrac{1}{1+y^2}\cdot y'$).

2) Розв'язуємо рівняння відносно y':

$$\frac{y'}{1+y^2}-y'=-1,\quad y'\left(\frac{1}{1+y^2}-1\right)=-1,\quad y'\cdot\frac{1-1-y^2}{1+y^2}=-1,$$

$$y'\left(-\frac{y^2}{1+y^2}\right)=-1,\quad y'=\frac{1+y^2}{y^2}.$$ ⌋

164. $y\ln x=x\ln y$.

⌈ 1) При диференціюванні по x обох частин рівності скористаємося в лівій частині правилом похідної добутку, а в правій частині – як правилом похідної добутку, так і тим, що $\ln y$ є складною функцією від x:

$$y'\cdot\ln x+y\cdot\frac{1}{x}=1\cdot\ln y+x\cdot\frac{1}{y}\cdot y'$$

2) Розв’язуємо рівняння відносно y':

$$y'\ln x - y'\cdot\frac{x}{y} = \ln y - \frac{y}{x}, \quad y'\left(\ln x - \frac{x}{y}\right) = \ln y - \frac{y}{x},$$

$$y'\frac{y\ln x - x}{y} = \frac{x\ln y - y}{x}, \quad y' = \frac{y(x\ln y - y)}{x(y\ln x - x)}. \ \lrcorner$$

165. $x^3 + \ln y - x^2e^y = 0$.

$\ulcorner$ 1) Диференціюючи ліву і праву частини рівняння по x, одержуємо

$$3x^2 + \frac{1}{y}y' - \left(2xe^y + x^2e^y y'\right) = 0.$$

2) Розв’язуємо рівняння відносно y':

$$3x^2 + \frac{y'}{y} - 2xe^y - x^2e^y y' = 0, \quad y'\left(\frac{1}{y} - x^2e^y\right) = 2xe^y - 3x^2,$$

$$y'\cdot\frac{1 - x^2ye^y}{y} = x\left(2e^y - 3x\right), \quad y' = \frac{xy\left(2e^y - 3x\right)}{1 - x^2ye^y}. \ \lrcorner$$

166. $y = \operatorname{tg}(x+y)$.

$\ulcorner$ 1) $y' = \dfrac{1}{\cos^2(x+y)}\cdot(1+y')$.

2) $y' = \dfrac{1}{\cos^2(x+y)} + \dfrac{y'}{\cos^2(x+y)}, \quad y'\left(1 - \dfrac{1}{\cos^2(x+y)}\right) = \dfrac{1}{\cos^2(x+y)},$

$$y'\cdot\frac{\cos^2(x+y) - 1}{\cos^2(x+y)} = \frac{1}{\cos^2(x+y)}, \quad y' = \frac{1}{\cos^2(x+y) - 1}. \ \lrcorner$$

167. $3^x + 3^y = 3^{x+y}$.

$\ulcorner$ 1) $3^x\ln 3 + 3^y\ln 3\cdot y' = 3^{x+y}\ln 3\cdot(1+y')$. Поділимо обидві частини на $\ln 3$:

$$3^x + 3^y\cdot y' = 3^{x+y} + 3^{x+y}\cdot y'.$$

2) $y'\left(3^y - 3^{x+y}\right) = 3^{x+y} - 3^x$,

$$y' = \frac{3^{x+y} - 3^x}{3^y - 3^{x+y}} = \frac{3^x\cdot 3^y - 3^x}{3^y - 3^x\cdot 3^y} = \frac{3^x\left(3^y - 1\right)}{3^y\left(1 - 3^x\right)} = 3^{x-y}\,\frac{3^y - 1}{1 - 3^x}. \ \lrcorner$$

168. $x^2-3xy^2+y^2=5$.

$\ulcorner$ 1) $2x-3\left(1\cdot y^2+x\cdot 2yy'\right)+2yy'=0$.

2) $2x-3y^2-6xyy'+2yy'=0$, $\quad 2yy'(1-3x)=3y^2-2x$,

$$y'=\frac{3y^2-2x}{2y(1-3x)}. \quad \lrcorner$$

169. $y=1+xe^y$.

$\ulcorner$ 1) $y'=1\cdot e^y+xe^y\cdot y'$.

2) $y'-xe^y\cdot y'=e^y$, $\quad y'\left(1-xe^y\right)=e^y$, $\quad y'=\dfrac{e^y}{1-xe^y}$. $\lrcorner$

170. $\cos(xy)=x$.

$\ulcorner$ 1) $-\sin(xy)\cdot\left(1\cdot y'+x\cdot y'\right)=1$.

2) $-y'\sin(xy)-xy'\sin(xy)=1$, $\quad y'\cdot\sin(xy)(1+x)=-1$,

$$y'=-\frac{1}{(1+x)\sin(xy)}. \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Обчислити похідні функцій, що задані неявно:

171 $5x^2+3xy-2y^2+2=0$. **172.** $x^3+y^3-a=0$.

173. $y^5-5axy+x^5=0$. **174.** $a^x-e^{x-y}=0$.

175. $x^3+ax^2y+bxy^2+y^3=0$. **176.** $2y\ln y=x$.

177. $y=\cos(x+y)$. **178.** $y=x+\operatorname{arctg} y$.

179. $y^2\cos x=a^2\sin 3x$.

180. $x-y=\arcsin x-\arcsin y+0{,}25$.

Відповіді:

171 $\dfrac{10x+3y}{4y-3x}$. **172.** $-\dfrac{x^2}{y^2}$.

173. $\dfrac{ay-x^4}{y^4-ax}$. **174.** $1-\ln a$.

175. $-\dfrac{3x^2+2axy+by^2}{ax^2+2bxy+3y^2}$. **176.** $\dfrac{1}{2\left(1+\ln y\right)}$.

177. $-\dfrac{\sin\left(x+y\right)}{1+\sin\left(x+y\right)}$. **178.** $\dfrac{1+y^2}{y^2}$.

179. $\dfrac{3a^2\cos 3x+y^2\sin x}{2y\cos x}$. **180.** $\dfrac{\sqrt{1-y^2}\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{1-x^2}\left(1-\sqrt{1-y^2}\right)}$.

5. Диференціювання функцій, що задані параметрично

Нехай функція $y=f\left(x\right)$ задана параметрично

$$\begin{cases} x=\varphi\left(t\right) \\ y=\psi\left(t\right) \end{cases},\ t\ \text{– параметр},\ t\in T.$$

Її похідна обчислюється за формулою

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}, \tag{4}$$

де y'_x – похідна функції $y=f\left(x\right)$ (надалі цю похідну будемо позначати y'); y'_t – похідна функції y по змінній t; x'_t – похідна функції x по змінній t.

Обчислити похідні функцій, що задані параметрично:

181. $\begin{cases} x=\operatorname{tg} t \\ y=\sin t. \end{cases}$

⌈ Маємо $x'_t=\dfrac{1}{\cos^2 t}$, $y'_t=\cos t$. Ці значення похідних підставляємо у формулу $\left(4\right)$: $y'=\dfrac{y'_t}{x_t}=\dfrac{\cos t}{\dfrac{1}{\cos^2 t}}=\cos^3 t$. ⌋

182. $\begin{cases} x=2\cos t-\cos 2t \\ y=2\sin t-\sin 2t. \end{cases}$

⌈ Маємо $x'_t=-2\sin t+\sin 2t\cdot 2=2\left(\sin 2t-\sin t\right)$,
$y'_t=2\cos t-\cos 2t\cdot 2=2\left(\cos t-\cos 2t\right)$. За формулою $\left(4\right)$

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2(\cos t - \cos 2t)}{2(\sin 2t - \sin t)} = \frac{\cos t - \cos 2t}{\sin 2t - \sin t} = \frac{2\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{3t}{2}} = \operatorname{tg}\frac{3t}{2}$$

(тут використали формули $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$,

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$). $\lrcorner$

183. $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$, $t \neq -1$, $(a = const)$.

$\ulcorner$ $$x'_t = \frac{3a(1+t^3) - 3at \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{3a(1+t^3 - 3t^3)}{(1+t^3)^2} = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2},$$

$$y'_t = \frac{3a \cdot 2t(1+t^3) - 3at^2 \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{3at(2+2t^3-3t^3)}{(1+t^3)^2} = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}.$$

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3at(2-t^3)(1+t^3)^2}{(1+t^3)^2\, 3a(1-2t^3)} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}. \quad \lrcorner$$

184. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases}$

$\ulcorner$ $$x'_t = \frac{2t}{1+t^2};\quad y'_t = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{1+t^2-1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t^2(1+t^2)}{(1+t^2)2t} = \frac{t}{2}. \quad \lrcorner$$

185. $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t. \end{cases}$

$\ulcorner$ $$x'_t = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t(\sin t + \cos t),$$

$$y'_t = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t(\cos t - \sin t),$$

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}. \quad \square$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Обчислити похідні функцій, що задані параметрично:

186. $\begin{cases} x = a(1 - t) \\ y = at. \end{cases}$

187. $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$

188. $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t. \end{cases}$

189. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

190. $\begin{cases} x = \dfrac{1 - t}{1 + t} \\ y = \dfrac{2t}{1 + t}. \end{cases}$

191. $\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t. \end{cases}$

192. $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t. \end{cases}$

193. $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$

194. $\begin{cases} x = t(1 - \sin t) \\ y = t \cos t. \end{cases}$

195. $\begin{cases} x = \dfrac{1 + t^3}{t^2 - 1} \\ y = \dfrac{t}{t^2 - 1}. \end{cases}$

Відповіді:

186. -1.

187. $\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2t$.

188. $\operatorname{tg} t$.

189. $\operatorname{ctg} \frac{t}{2}$.

190. -1.

191. $-\operatorname{ctg} t$.

192. $-\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t$.

193. $-\operatorname{tg} t$.

194. $\dfrac{\cos t - t \sin t}{1 - \sin t - t \cos t}$.

195. $\dfrac{1 + t^2}{t(2 + 3t - t^3)}$.

6. Похідні вищих порядків

Якщо функція $y = f\left(x\right)$ *диференційовна на* деякому *інтервалі* (тобто має похідну в кожній точці інтервалу), то за означенням *похідна другого порядку (друга похідна)* цієї функції знаходиться за формулою $y'' = \left(y'\right)'$. Таким чином, друга похідна від заданої функції є похідна від її першої похідної.

Аналогічно *похідна третього порядку (третя похідна)* $y''' = \left(y''\right)'$ і т.д.

Знайти похідні вказаних порядків для заданих функцій:

196. $y = \dfrac{\sin x}{x}$; $y'' = ?$.

⌜ Для знаходження y'' потрібно знайти y':

$$y' = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{\cos x \cdot x - \sin x}{x^2};$$

$$y'' = \left(y'\right)' = \left(\frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2}\right)' =$$

$$= \frac{\left[1 \cdot \cos x + x\left(-\sin x\right) - \cos x\right] \cdot x^2 - \left(x\cos x - \sin x\right) \cdot 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{\left(\cos x - x\sin x - \cos x\right) \cdot x^2 - 2x\left(x\cos x - \sin x\right)}{x^4} =$$

$$= \frac{x\left(x\cos x - x^2 \sin x - x\cos x - 2x\cos x + 2\sin x\right)}{x^4} =$$

$$= \frac{2\sin x - x^2 \sin x - 2x\cos x}{x^3}. \quad ⌟$$

197. $y = x^5 - 7x^3 + 2$; $y''' = ?$.

⌜ Знайдемо спочатку y':

$$y' = 5x^4 - 7 \cdot 3x^2 = 5x^4 - 21x^2;$$

$$y'' = \left(y'\right)' = \left(5x^4 - 21x^2\right)' = 20x^3 - 21 \cdot 2x = 20x^3 - 42x.$$

$$y''' = \left(y''\right)' = \left(20x^3 - 42x\right)' = 60x^2 - 42 = 6\left(10x^2 - 7\right). \quad ⌟$$

198. $y = 3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 8$ **;** $y^{(4)} = ?$.

$\ulcorner$ Тут $y^{(4)}$ – четверта похідна від заданої функції. Знайдемо y':

$$y' = 12x^3 + 15x^2 - 8x\,; \quad y'' = (y')' = 36x^2 + 30x - 8\,;$$

$$y''' = (y'')' = 72x + 30\,; \quad y^{(4)} = (y''')' = 72\,. \quad \lrcorner$$

199. $y = \sin^2 x$; $y^{(5)} = ?$.

$\ulcorner$ Щоб знайти п’яту похідну від заданої функції потрібно знайти послідовно перші чотири похідні.

$$y' = \left(\sin^2 x\right)' = 2\sin x \cos x = \sin 2x\,; \; y'' = (\sin 2x)' = \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x\,;$$

$$y''' = (2\cos 2x)' = -2\sin 2x \cdot 2 = -4\sin 2x\,;$$

$$y^{(4)} = (-4\sin 2x)' = -4\cos 2x \cdot 2 = -8\cos 2x\,;$$

$$y^{(5)} = (-8\cos 2x)' = -8(-\sin 2x)\cdot 2 = 16\sin 2x\,. \quad \lrcorner$$

200. $y = \sqrt{x+5}$; $y^{(4)} = ?$.

$\ulcorner$ $$y' = \left(\sqrt{x+5}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}\,;$$

$$y'' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x+5}}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+5}}\right)' = \frac{1}{2}\left((x+5)^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(x+5)^{-\frac{1}{2}-1} =$$

$$= -\frac{1}{4}(x+5)^{-\frac{3}{2}}\,;$$

$$y''' = \left(-\frac{1}{4}(x+5)^{-\frac{3}{2}}\right)' = -\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)(x+5)^{-\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{8}(x+5)^{-\frac{5}{2}}\,;$$

$$y^{(4)} = \left(\frac{3}{8}(x+5)^{-\frac{5}{2}}\right)' = \frac{3}{8}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)(x+5)^{-\frac{5}{2}-1} = -\frac{15}{16}(x+5)^{-\frac{7}{2}} =$$

$$= -\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{(x+5)^{\frac{7}{2}}} = -\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x+5)^7}} = -\frac{15}{(x+5)^3\sqrt{(x+5)}}\,. \quad \lrcorner$$

201. Показати, що функція $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + e^x$, де C_1, C_2 – сталі, задовольняє рівняння $y'' - 4y' + 4y = e^x$.

⌐ Щоб показати, що функція y задовольняє рівняння, потрібно знайти похідні y' та y'', ці похідні та саму функцію y підставити в рівняння і пересвідчитися, що воно перетворюється у тотожність.

$$y' = C_1 e^{2x} \cdot 2 + C_2 \left(1 \cdot e^{2x} + x \cdot e^{2x} \cdot 2\right) + e^x = 2C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x} + 2C_2 x e^{2x} + e^x =$$

$$= 2C_1 e^{2x} + C_2 \left(1 + 2x\right) e^{2x} + e^x;$$

$$y'' = 2C_1 e^{2x} \cdot 2 + C_2 \left[2e^{2x} + \left(1 + 2x\right) e^{2x} \cdot 2\right] + e^x =$$

$$= 4C_1 e^{2x} + 2C_2 e^{2x} + 2C_2 \left(1 + 2x\right) e^{2x} + e^x .$$

Підставимо y, y' та y'' у рівняння:

$$4C_1 e^{2x} + 2C_2 e^{2x} + 2C_2 \left(1 + 2x\right) e^{2x} + e^x - 4\left[2C_1 e^{2x} + C_2 \left(1 + 2x\right) e^{2x} + e^x\right] +$$

$$+4\left(C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + e^x\right) = e^x .$$

Поділимо обидві частини рівняння на $e^x \neq 0$ і розкриємо дужки:

$$4C_1 + 2C_2 + 2C_2 + 4C_2 x + 1 - 8C_1 - 4C_2 - 8xC_2 - 4 + 4C_1 + 4C_2 x + 4 = 1,$$

$$1 \equiv 1 .$$ ⌟

Вправи для самостійного розв'язання

Обчислити похідні вищих порядків:

202. $y = \left(1 + x^2\right) \operatorname{arctg} x$; $y'' = ?$.

203. $y = 1 - x^2 - x^4$; $y''' = ?$.

204. $y = \cos^2 x$; $y''' = ?$.

205. $y = x^3 \ln x$; $y^{(4)} = ?$.

206. $y = \dfrac{1}{1 - x}$; $y^{(5)} = ?$.

Відповіді:

202. $\dfrac{2x}{1 + x^2} + 2 \operatorname{arctg} x$.

203. $-24x$.

204. $4 \sin 2x$.

205. $\dfrac{6}{x}$.

206. $y = \dfrac{5!}{\left(1 - x\right)^6}$, де $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$.

7. Застосування похідної

7.1. Дотична до кривої

Якщо крива задана рівнянням $y=f(x)$, то рівняння *дотичної* до неї в точці $M_0(x_0;y_0)$ має вигляд

$$y-y_0=y'(x_0)(x-x_0), \qquad (5)$$

де $y'(x_0)=k$ – кутовий коефіцієнт дотичної; $y_0=f(x_0)$.

Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ в точці $M_0(x_0,y_0)$:

208. $y=x^3-4x+6$; $M_0(1;3)$.

⌜ Знайдемо похідну заданої функції: $y'=3x^2-4$. За умовою

$x_0=1$. Тому $y'(1)=3(1)^2-4=3-4=-1$.

Тоді шукане рівняння дотичної

$y-3=(-1)(x-1) \Leftrightarrow y-3=-x+1 \Leftrightarrow x+y-4=0$. ⌟

209. $y=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$; $M_0\left(0;-\sqrt{3}\right)$.

⌜ $y'=2\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot 4=8\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$;

$$y'(0)=8\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=8\cos\frac{\pi}{3}=8\cdot\frac{1}{2}=4.$$

Тоді шукане рівняння дотичної

$y+\sqrt{3}=4(x-0) \Leftrightarrow y+\sqrt{3}=4x \Leftrightarrow 4x-y-\sqrt{3}=0$. ⌟

210. В якій точці дотична до параболи $y=x^2$: а) паралельна до прямої $y=2x-4$; б) перпендикулярна до прямої $x+y=1$?

⌜ а) В рівнянні (5) $y'(x_0)=k$ – кутовий коефіцієнт дотичної. Відомо (див. розділ 3), що дві прямі паралельні, якщо їх кутові коефіцієнти рівні.

Задана пряма має кутовий коефіцієнт $k_1=2$.

Знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної до параболи:

$$y'=2x;\ k=y'(x_0)=2x_0.$$

Так як за умовою має бути $k=k_1$, то $2x_0=2 \Leftrightarrow x_0=1$. Оскільки точка дотику $M_0(x_0,y_0)$ належить параболі, то $y_0=x_0^2=1$.

Таким чином, $M_0(1;1)$ – шукана точка.

б) Пряма $x+y=1$ має кутовий коефіцієнт $k_2=-1$. Відома умова перпендикулярності двох прямих (див. розділ 3): $k\cdot k_2=-1$. Звідси $2x_0(-1)=-1 \Leftrightarrow 2x_0=1 \Leftrightarrow x_0=\dfrac{1}{2}$.

Знайдемо ординату шуканої точки: $y_0=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$.

Таким чином, $M_0\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right)$ – шукана точка. $\lrcorner$

211. Записати рівняння дотичної до кривої $y=2x^5+3x^3+4x-5$ в точці з абсцисою $x_0=0$.

$\ulcorner$ Знайдемо ординату точки дотику: $y_0=f(0)=-5$.

Знайдемо похідну: $y'=10x^4+9x^2+4$; $y'(0)=4$.

Рівняння дотичної матиме вигляд

$y-(-5)=4(x-0) \Leftrightarrow y+5=4x \Leftrightarrow 4x-y+5=0$. $\lrcorner$

212. Знайти рівняння дотичної до кривої $y=x^2-9x-4$ в точці з абсцисою $x=-1$.

$\ulcorner$ Ордината точки дотику $y_0=f(-1)=1+9-4=6$.

Знайдемо похідну: $y'=2x-9$, $y'(-1)=-2-9=-11$.

Отже, рівняння дотичної $y-6=-11(x+1) \Leftrightarrow y-6=-11x-11 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 11x+y+5=0$. $\lrcorner$

213. При якому значенні незалежної змінної дотичні до кривих $y=x^2$ і $y=\dfrac{4}{3}x^3$ перпендикулярні?

$\ulcorner$ Щоб дотичні до кривих були перпендикулярні, потрібно, щоб їх кутові коефіцієнти задовольняли умову

$$k_1\cdot k_2=-1, \qquad (6)$$

де $k_1=y'(x_0)$, $y=x^2$; $k_2=y'(x_0)$, $y=\dfrac{4}{3}x^3$.

Знайдемо похідні. Якщо $y = x^2$, то $y' = 2x$; якщо $y = \frac{4}{3}x^3$, то $y' = 4x^2$. Тоді $k_1 = 2x_0$; $k_2 = 4x_0^{\;2}$. Підставляючи значення k_1 і k_2 у співвідношення (6), одержимо:

$$2x_0 \cdot 4x_0^{\;2} = -1 \;\Leftrightarrow\; 8x_0^{\;3} = -1 \;\Leftrightarrow\; x_0^{\;3} = -\frac{1}{8} \;\Leftrightarrow\; x_0 = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}.$$

Отже, $x_0 = -\frac{1}{2}$. ⌋

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

214. Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^3$ в точці $M_0(2;8)$.

215. Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^4 + 3$ в точці $M_0(1;4)$.

216. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = \ln(2x-1)$ в точці з абсцисою $x = 1$.

217. При якому значенні незалежної змінної дотичні до кривих $y = x^3$ і $y = x^4$ паралельні?

218. В якій точці дотична до лінії $y = \ln x$: а) паралельна прямій $y = x + 5$; б) перпендикулярна до прямої $y = -\frac{1}{2}x + 3$?

219. Записати рівняння дотичної до графіка функції $y = \mathrm{tg}\,2x$ в точці з абсцисою $x_0 = 0$.

Відповіді:

214. $12x - y - 16 = 0$.

215. $4x - y = 0$.

216. $2x - y - 2 = 0$.

217. $x_1 = 0,\; x_2 = \frac{3}{4}$.

218. а) $(1;0)$; б) $(0,5;-\ln 2)$.

219. $2x - y = 0$.

7.2. Дослідження функцій на монотонність

Функція $y = f(x)$ *зростає* (*спадає*) на (a,b), якщо для будь-яких чисел $x_1 < x_2$ з (a,b) виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна на інтервалі (a,b). Якщо $y' = f'(x) > 0$ ($y' = f'(x) < 0$) при всіх $x \in (a,b)$, то функція зростає (спадає) на (a,b).

При розв'язуванні задач, в яких потрібно знайти інтервали монотонності (зростання, спадання) функції, треба перш за все знайти область визначення функції.

Знайти інтервали монотонності функцій:

220. $y = 2x + \cos x$.

⌈ $D(f) = (-\infty, +\infty)$ ($D(f)$ – область визначення функції).

Знайдемо похідну: $y' = 2 - \sin x$.

Оскільки $y' > 0$ при всіх $x \in D(f)$, то функція зростає на інтервалі $(-\infty, +\infty)$, тобто на всій області визначення. ⌋

221. $y = -\ln(x^3 - 1)$.

⌈ Область визначення $D(f) = (1, +\infty)$.

Знайдемо похідну: $y' = -\dfrac{1}{x^3 - 1} \cdot (x^3 - 1)' = -\dfrac{3x^2}{x^3 - 1}$.

Оскільки $y' < 0$ при всіх $x \in D(f)$ ($x^3 - 1 > 0$ і $x^2 > 0$, $x \in D(f)$), то функція спадає на інтервалі $(1, +\infty)$, тобто на всій області визначення. ⌋

222. $y = \dfrac{e^x}{x}$.

┌ $D(f)=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.

Знайдемо похідну: $y'=\dfrac{e^x\cdot x-e^x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$.

1) Знайдемо інтервали зростання. Для цього накладемо умову $y'>0$: $\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}>0$. Розв'язуємо дану нерівність і знаходимо $x>1$.

Отже, функція зростає на інтервалі $(1,+\infty)$.

2) Знайдемо інтервали спадання. Для цього накладемо умову $y'<0$: $\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}<0$. Розв'язуємо дану нерівність: $x<0$ або $0<x<1$.

Отже, функція спадає на інтервалах $(-\infty,0)$ та $(0,1)$. ┘

Зауваження. Оскільки будь-яка елементарна функція неперервна в своїй області визначення, то нерівність $y'<0$ можна і не розв'язувати. Досить знайти інтервали зростання функції, а ті інтервали, які входять в область визначення функції але не є інтервалами зростання, будуть інтервалами спадання функції (за умови, що на цих інтервалах похідна не дорівнює тотожно нулю).

223. $y=\ln\left(1-x^2\right)$.

┌ $D(f)$: $1-x^2>0 \Leftrightarrow |x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$. Отже, $D(f)=(-1,1)$.

Знайдемо y': $y'=\dfrac{1}{1-x^2}\cdot(-2x)=-\dfrac{2x}{1-x^2}$.

Знайдемо інтервали зростання функції. Для цього накладемо умову $y'>0$: $-\dfrac{2x}{1-x^2}>0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1)>0$. Розв'яжемо дану нерівність методом інтервалів, враховуючи, що $x(x-1)(x+1)=0$ при $x=0$, $x=-1$, $x=1$:

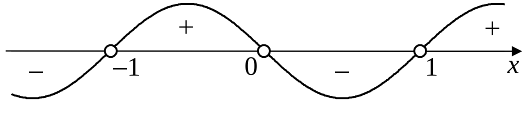

Рис. 1

З рис. 1 маємо $x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

Але інтервал $(1,+\infty)$ не входить в $D(f)$. Отже, функція зростає на інтервалі $(-1,0)$.

Відповідно до зробленого зауваження функція спадає на інтервалі $(0,1)$. ┘

224. $y=\dfrac{2x^2}{1-x^2}$.

┌ $D(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

Знайдемо y':

$$y'=2\frac{2x\left(1-x^2\right)-x^2(-2x)}{\left(1-x^2\right)^2}=2\frac{2x\left(1-x^2+x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{4x}{\left(1-x^2\right)^2}.$$

Знайдемо інтервали зростання функції. Для цього накладемо умову $y'>0$: $\dfrac{4x}{\left(1-x^2\right)^2}>0$. Розв'язуємо дану нерівність і знаходимо $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Отже, функція зростає на інтервалах $(0,1)$ та $(1,+\infty)$.

Згідно із зробленим зауваженням функція спадає на інтервалах $(-\infty,-1)$ та $(-1,0)$. ┘

225. $y=4x^3-21x^2+18x+20$.

┌ $D(f)=(-\infty,+\infty)$.

Знайдемо y': $y'=12x^2-42x+18=6\left(2x^2-7x+3\right)$.

Знайдемо інтервали зростання функції. Для цього накладемо умову $y'>0$: $6\left(2x^2-7x+3\right)>0 \Leftrightarrow 2x^2-7x+3>0$. Спочатку розв'яжемо квадратне рівняння $2x^2-7x+3=0$ і розкладемо праву частину нерівності на множники:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{7\pm\sqrt{49-4\cdot2\cdot3}}{4}=\frac{7\pm5}{4},$$

$$x_1=3,\ x_2=\frac{1}{2};$$

$$2x^2-7x+3>0 \Leftrightarrow 2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)>0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)>0.$$

Розв'яжемо нерівність методом інтервалів:

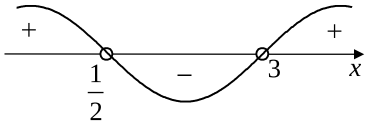

Рис. 2

З рис. 2 маємо $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)$.

Отже, функція зростає на інтервалах $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ та $(3, +\infty)$, а спадає на інтервалі $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$. ⌋

Вправи для самостійного розв'язання

Знайти інтервали монотонності функцій:

226. $y = x^2 e^{-x}$.

227. $y = \left(x^2 - 9\right)^{\frac{3}{2}}$.

228. $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

229. $y = x \ln x$.

230. $y = x\left(1 + 2\sqrt{x}\right)$.

231. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$.

Відповіді:

226. Функція спадає на інтервалах $(-\infty, 0)$ та $(2, +\infty)$ і зростає на інтервалі $(0, 2)$.

227. На інтервалі $(-\infty, -3)$ функція спадає, а на $(3, +\infty)$ – зростає.

228. Функція спадає на інтервалах $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ і зростає на інтервалі $(-1, 1)$.

229. На інтервалі $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ функція спадає, а на $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ – зростає.

230. На інтервалі $(0, +\infty)$ функція зростає.

231. На інтервалах $\left(-\infty,-1\right)$ та $\left(3,+\infty\right)$ функція зростає, а на $\left(-1,3\right)$ – спадає.

7.3. Дослідження функцій на екстремуми

Функція $y=f\left(x\right)$ має у точці x_0 *локальний максимум* (*мінімум*), якщо знайдеться окіл точки x_0 (тобто інтервал виду $\left(x_0-\delta, x_0+\delta\right)$, де $\delta>0$), що для усіх $x\neq x_0$ з цього околу виконується нерівність $f\left(x\right)<f\left(x_0\right)$ ($f\left(x\right)>f\left(x_0\right)$).

Дослідження функції на екстремуми (максимуми, мінімуми) доцільно виконувати за такою схемою:

1) Знайти похідну y'.

2) Розв’язати рівняння $y'=0$, а також визначити ті значення x, при яких y' не існує (іншими словами: знайти *критичні точки I роду*). Функція може мати екстремуми лише в критичних точках I роду.

3) Всі критичні точки розмістити в порядку зростання. Нехай в інтервал $\left(a,b\right)$ з області визначення $D\left(f\right)$ функції потрапили точки $x_1<x_2<\ldots<x_n$.

4) На кожному з інтервалів $\left(a,x_1\right),\left(x_1,x_2\right),\ldots,\left(x_n,b\right)$ потрібно взяти будь-яку точку і встановити в цій точці знак похідної y' (похідна зберігає знак в кожному інтервалі між двома сусідніми критичними точками).

5) Аналізуємо знаки y' при переході зліва направо через кожну критичну точку: якщо знак змінюється з “+” на “–”, то в критичній точці функція має максимум; якщо знак змінюється з “–” на “+”, то – мінімум. Якщо ж у двох сусідніх інтервалах знак похідної y' зберігається, то екстремуму в критичній точці немає.

6) Знайти значення функції $y=f\left(x\right)$ в точках, в яких вона досягає екстремуму (*екстремальні значення* функції).

Зауваження. При дослідженні функції на екстремуми потрібно перш за все знайти область визначення функції.

Дослідити на екстремуми функції:

232. $y=\left(1-x^2\right)^3$.

$\ulcorner$ $D(f)=R$.

1) $y' = 3\left(1-x^2\right)^2 \cdot (-2x) = -6x\left(1-x^2\right)^2$.

2) Знаходимо критичні точки I роду:

а) $y' = 0 \Leftrightarrow -6x\left(1-x^2\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x(1-x)^2(1+x)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1; \end{array}\right.$$

б) точки, в яких y' не існує, відсутні.

3) Розмістимо критичні точки в порядку зростання: -1; 0; 1. В результаті одержимо інтервали: $(-\infty,-1)$; $(-1,0)$; $(0,1)$; $(1,+\infty)$.

4) Визначимо знак похідної на кожному з інтервалів.

На інтервалі $(-\infty,-1)$ візьмемо, наприклад, точку $x=-2$:

$$y'(-2) = -6(-2)\left[1-(-2)^2\right]^2 = 108 > 0.$$

На інтервалі $(-1,0)$ візьмемо, наприклад, точку $x=-\frac{1}{2}$:

$$y'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{27}{16} > 0.$$

На інтервалі $(0,1)$ візьмемо точку $x=\frac{1}{2}$: $y'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{27}{16} < 0$.

На інтервалі $(1,+\infty)$ візьмемо точку $x=2$: $y'(2) = -108 < 0$.

Результати досліджень занесемо до таблиці:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	+	0	-	0	-

Табл. 1

5) З таблиці бачимо, що похідна змінює знак при переході лише через точку $x=0$. Оскільки знак змінюється з “+” на “-”, то в цій точці функція має максимум.

6) Значення функції в точці максимуму $y_{\max} = f(0) = 1$. $\lrcorner$

Зауваження. За результатами розв’язання задачі **232** можна визначити також інтервали монотонності функції $y=\left(1-x^2\right)^3$. Так, з таблиці 1 випливає, що функція зростає на інтервалі $(-\infty, 0)$ і спадає на інтервалі $(0, +\infty)$. Це зауваження стосується також прикладів **233** – **236**.

233. $y = x\sqrt{1-x^2}$.

Г $D(f)$: $1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

1) $y' = 1\cdot\sqrt{1-x^2} + x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x) = \sqrt{1-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} =$

$$= \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2) Знаходимо критичні точки I роду:

а) $y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x^2 = 0 \\ \sqrt{1-x^2} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \left(1-\sqrt{2}x\right)\left(1+\sqrt{2}x\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \end{array}\right.$$

б) похідна y' не існує при $x = -1$ та $x = 1$.

Точками екстремуму функції можуть бути лише точки $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ і $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Саме вони лежать всередині області визначення $D(f) = [-1,1]$ функції. В точках $x = -1$ та $x = 1$ функція не може мати локальних екстремумів, оскільки ці точки лежать не всередині області визначення $D(f)$, а на її межі.

3) Розмістимо критичні точки в порядку зростання і, враховуючи $D(f)$, маємо $-1 < -\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$. Інтервали: $\left(-1, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

4) Визначимо знак похідної на кожному з інтервалів.

На інтервалі $\left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ візьмемо, наприклад, точку $x = -0,8$:

$$y'(-0,8) = \frac{1-2(-0,8)^2}{\sqrt{1-(0,8)^2}} = -\frac{7}{15} < 0.$$

На інтервалі $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ візьмемо точку $x = 0$:

$$y'(0) = \frac{1-2\cdot 0}{\sqrt{1-0}} = 1 > 0.$$

На інтервалі $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ візьмемо точку $x = 0,8$: $y'(0,8) = -\frac{7}{15} < 0$.

Результати досліджень занесемо до таблиці:

x	$\left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$
y'	$-$	0	+	0	$-$

5) З таблиці бачимо, що похідна змінює знак при переході через обидві точки $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

При переході через точку $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ знак змінюється з “$-$” на “+”. Отже, в цій точці функція має мінімум.

При переході через точку $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ знак похідної змінюється з “+” на “$-$”. Тому в цій точці функція має максимум.

6) $y_{\min} = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$;

$$y_{\max} = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}. \quad ┘$$

234. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$.

┌ $D(f) = R$.

1) $y' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - \frac{5}{2}x + 6 = x^2 - 5x + 6$.

2) Знаходимо критичні точки І роду:

а) $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3; \end{array}\right.$

б) точки, в яких y' не існує, відсутні.

3) Розмістимо критичні точки в порядку зростання: 2; 3. В результаті одержимо інтервали: $(-\infty, 2)$; $(2, 3)$, $(3, +\infty)$.

4) Визначимо знак похідної на кожному з інтервалів.

На інтервалі $(-\infty, 2)$ візьмемо, наприклад, точку $x = 0$:

$$y'(0) = 6 > 0.$$

На інтервалі $(2, 3)$ візьмемо точку $x = \frac{5}{2}$:

$$y'\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{2} + 6 = -\frac{1}{4} < 0.$$

На інтервалі $(3, +\infty)$ візьмемо точку $x = 4$:

$$y'(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 + 6 = 16 - 20 + 6 = 2 > 0.$$

Результати досліджень занесемо до таблиці:

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	+	0	$-$	0	+

5) З таблиці бачимо, що похідна змінює знак при переході через обидві точки $x = 2$ і $x = 3$.

При переході через точку $x = 2$ знак змінюється з "+" на "$-$". Отже, в цій точці функція має максимум.

При переході через точку $x = 3$ знак похідної змінюється з "$-$" на "+". Тому в цій точці функція має мінімум.

6) Екстремальні значення функції:

$$y_{\max} = f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{5}{2} \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 = \frac{8}{3} - 10 + 12 = \frac{14}{3};$$

$$y_{\min} = f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{5}{2} \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 = 9 - \frac{45}{2} + 18 = \frac{9}{2}. \quad \lrcorner$$

235. $y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x + 2}$.

$\ulcorner$ $D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$.

1) $y' = \dfrac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x+2) - \sqrt[3]{x^2}}{(x+2)^2} = \dfrac{2(x+2) - 3x}{3\sqrt[3]{x}(x+2)^2} = \dfrac{4 - x}{3\sqrt[3]{x}(x+2)^2}$.

2) Знаходимо критичні точки I роду:

а) $y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{4 - x}{3\sqrt[3]{x}(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x = 0 \\ 3\sqrt[3]{x}(x+2)^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 4 \in D(f)$;

б) похідна не існує при $x = 0 \in D(f)$, оскільки вираз у знаменнику похідної при цьому значенні x дорівнює нулю.

3) Розмістимо критичні точки в порядку зростання: 0; 4. Враховуючи область визначення функції, одержимо інтервали: $(-2, 0)$; $(0, 4)$; $(4, +\infty)$.

4) Визначимо знак похідної на кожному з інтервалів.

На інтервалі $(-2, 0)$ візьмемо, наприклад, точку $x = -1$:

$$y'(-1) = \frac{4 - (-1)}{3\sqrt[3]{-1}(-1+2)^2} = -\frac{5}{3} < 0.$$

На інтервалі $(0, 4)$ візьмемо точку $x = 1$: $y'(1) = \dfrac{1}{9} > 0$.

На інтервалі $(4, +\infty)$ візьмемо точку $x = 5$: $y'(5) = -\dfrac{1}{3 \cdot 49\sqrt[3]{5}} < 0$.

Результати досліджень занесемо до таблиці:

x	$(-2, 0)$	0	$(0, 4)$	4	$(4, +\infty)$
y'	$-$	не існує	+	0	$-$

5) З таблиці бачимо, що похідна змінює знак при переході через обидві критичні точки $x = 0$ і $x = 4$.

Оскільки при переході через точку $x = 0$ знак похідної змінюється з “$-$” на “+”, то в цій точці функція має мінімум.

При переході через точку $x = 4$ знак змінюється з “+” на “$-$”. Отже, в цій точці функція має максимум.

6) Значення функції в точках екстремуму:

$$y_{\min} = f(0) = 0;$$

$$y_{\max} = f(4) = \frac{\sqrt[3]{2}}{3}. \quad ⌋$$

236. $y=\left(x^2-2x\right)\ln x-\dfrac{3}{2}x^2+4x$.

Г $D\left(f\right)=\left(0,+\infty\right)$.

1) $y'=\left(2x-2\right)\ln x+\left(x^2-2x\right)\cdot\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{2}\cdot 2x+4=$

$$=2\left(x-1\right)\ln x+x-2-3x+4=2\left(x-1\right)\ln x-2x+2=$$

$$=2\left(x-1\right)\ln x-2\left(x-1\right)=2\left(x-1\right)\left(\ln x-1\right).$$

2) Знаходимо критичні точки I роду:

а) $y'=0 \Leftrightarrow 2\left(x-1\right)\left(\ln x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ \ln x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in D\left(f\right) \\ x=e\in D\left(f\right) \end{array}\right.$

($e\approx 2,71$);

б) точки, в яких y' не існує, відсутні.

3) Розмістимо критичні точки в порядку зростання: 1; e. В результаті одержимо інтервали: $\left(0,1\right)$; $\left(1,e\right)$; $\left(e,+\infty\right)$.

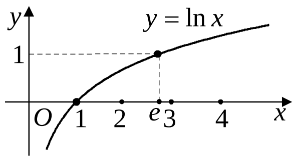

Рис. 3

4) Визначимо знак похідної на кожному з інтервалів.

На інтервалі $\left(0,1\right)$ візьмемо точку $x=\dfrac{1}{2}$:

$$y'\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\ln\frac{1}{2}-1\right)=-\left(\ln 1-\ln 2-1\right)=\ln 2+1>0.$$

На інтервалі $\left(1,e\right)$ візьмемо точку $x=2$:

$$y'\left(2\right)=2\left(2-1\right)\left(\ln 2-1\right)=2\left(\ln 2-1\right)<0 \text{ (див. рис. 3).}$$

На інтервалі $\left(e,+\infty\right)$ візьмемо точку $x=3$:

$$y'\left(3\right)=2\left(3-1\right)\left(\ln 3-1\right)=4\left(\ln 3-1\right)>0 \text{ (див. рис. 3).}$$

Результати досліджень занесемо до таблиці:

x	$\left(0,1\right)$	1	$\left(1,e\right)$	e	$\left(e,+\infty\right)$
y'	+	0	-	0	+

5) З таблиці бачимо, що похідна змінює знак при переході через обидві критичні точки $x=1$ і $x=e$.

Оскільки при переході через точку $x=1$ знак похідної змінюється з “+” на “-”, то в цій точці функція має максимум.

При переході через точку $x = e$ знак похідної змінюється з “ $-$ ” на “+”. Тому функція в цій точці має мінімум.

6) Значення функції в точках екстремуму:

$$y_{\max} = f(1) = (1-2)\ln 1 - \frac{3}{2}\cdot 1 + 4\cdot 1 = 0 - \frac{3}{2} + 4 = \frac{5}{2};$$

$$y_{\min} = f(e) = \left(e^2 - 2e\right)\ln e - \frac{3}{2}e^2 + 4e = e^2 - 2e - \frac{3}{2}e^2 + 4e =$$

$$= 2e - \frac{1}{2}e^2 = e\left(2 - \frac{1}{2}e\right). \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Дослідити на екстремуми функції:

237. $y = x^2(x-6)$. **238.** . $y = \dfrac{4x}{x^2+4}$.

239. $y = x^3 - 3x^2 + 3x$. **240.** $y = 3 - 2\sqrt[3]{x^2}$.

241. $y = x^2 e^{-x}$.

Відповіді:

237. $y_{\max} = f(0) = 0$; $y_{\min} = f(4) = -32$.

238. $y_{\min} = f(-2) = -1$; $y_{\max} = f(2) = 1$.

239. Немає екстремумів. **240.** $y_{\max} = f(0) = 3$.

241. $y_{\min} = f(0) = 0$; $y_{\max} = f(2) = \dfrac{4}{e^2}$.

7.4. Найбільше та найменше значення неперервної функції на відрізку

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона досягає на цьому відрізку свого найбільшого і найменшого значень, які позначаються M і m, де $M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$; $m = \min\limits_{[a,b]} f(x)$. Ці значення досягаються або в точках локального екстремуму, які є критичними точками I роду, або на кінцях відрізка.

Для знаходження найбільшого та найменшого значень функції на відрізку $[a,b]$ потрібно обчислити значення функції в усіх критичних точках I роду, які належать відрізку $[a,b]$, і в точках $x=a$, $x=b$ (кінцях відрізка), після чого серед цих значень вибрати найбільше і найменше. Це і будуть відповідно M і m.

Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку:

242. $y = x + \frac{1}{x}$, $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$.

$\ulcorner$ $y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$.

Знаходимо критичні точки I роду:

а) $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1; \end{array}\right.$

б) точки з області визначення функції, в яких y' не існує, відсутні. Отже, маємо критичні точки $x=-1$ та $x=1$.

Відрізку $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ належить лише точка $x=1$: $f(1) = 2$. Знаходимо значення функції на кінцях відрізка: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$, $f(3) = \frac{10}{3}$.

Порівнюємо числа 2, $\frac{5}{2}$, $\frac{10}{3}$. Найбільше серед них $\frac{10}{3}$, а найменше 2.

Отже, $M = \max\limits_{\left[\frac{1}{2},3\right]} f(x) = \frac{10}{3}$; $m = \min\limits_{\left[\frac{1}{2},3\right]} f(x) = 2$. $\lrcorner$

243. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - \frac{1}{3}$, $[0,5]$.

$\ulcorner$ Знаходимо похідну y':

$$y' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3 = x^2 - 4x + 3$$

Знаходимо критичні точки I роду:

а) $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1,\ x = 3$;

б) точки, в яких y' не існує, відсутні.

Отже, маємо критичні точки $x=1$, $x=3$, які належать відрізку $[0,5]$.

Обчислимо значення функції в точках $x=1$, $x=3$ і на кінцях відрізка: $f(1)=\frac{1}{3}-2+3-\frac{1}{3}=1$, $f(3)=\frac{1}{3}\cdot 3^3-2\cdot 3^2+3\cdot 3-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$, $y(0)=-\frac{1}{3}$, $f(5)=\frac{19}{3}$.

Серед знайдених чисел вибираємо найбільше і найменше: $M=\max\limits_{[0,5]} f(x)=f(5)=\frac{19}{3}$, $m=\min\limits_{[0,5]} f(x)=f(0)=f(3)=-\frac{1}{3}$. ⌋

244. $y=3x-x^3$, $[-2,3]$.

⌈ Знаходимо y' і критичні точки I роду:

$$y'=3-3x^2=3\left(1-x^2\right),$$

$$y'=0 \Leftrightarrow 3\left(1-x^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\in[-2,3] \\ x=1\in[-2,3]. \end{array}\right.$$

Обчислюємо значення функції в критичних точках і на кінцях відрізка: $f(-1)=-2$, $f(1)=2$, $f(-2)=2$, $f(3)=-18$.

Порівнюємо одержані значення і маємо

$$M=\max_{[-2,3]} f(x)=f(1)=f(-2)=2,$$

$$m=\min_{[-2,3]} f(x)=f(3)=-18. \quad ⌋$$

245. $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$, $[0,1]$.

⌈ $$y'=\frac{(-1+2x)\left(1+x-x^2\right)-\left(1-x+x^2\right)(1-2x)}{\left(1+x-x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{(2x-1)\left(1+x-x^2+1-x+x^2\right)}{\left(1+x-x^2\right)^2}=\frac{2(2x-1)}{\left(1+x-x^2\right)^2}.$$

а) $y'=0 \Leftrightarrow \dfrac{2(2x-1)}{\left(1+x-x^2\right)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=0 \\ \left(1+x-x^2\right)^2\neq 0 \end{array}\right. \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$;

б) точки з області визначення заданої функції, в яких y' не існує, відсутні.

Обчислимо значення функції в критичній точці $x = \frac{1}{2} \in [0,1]$ і на кінцях відрізка:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5}, \quad f(0) = 1, \quad f(1) = 1.$$

Порівнявши одержані значення, маємо

$$M = \max_{[0,1]} f(x) = f(0) = f(1) = 1,$$

$$m = \min_{[0,1]} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{5}. \quad \lrcorner$$

246. $y = \sin 2x - x, \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$

$\ulcorner$ $y' = 2\cos 2x - 1,$

$y' = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in Z \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{12} + k\pi, \ k \in Z.$$

Відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ належать лише точки $x = -\frac{\pi}{12}$ та $x = \frac{\pi}{12}$.

$$f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \sin 2\left(-\frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{12} = -\sin\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi - 6}{12},$$

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin 2 \cdot \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{6 - \pi}{12},$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\pi + \frac{\pi}{2} = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \sin\pi - \frac{\pi}{2} = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Порівнявши одержані значення, маємо

$$M = \max_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

$$m = \min_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}. \quad \lrcorner$$

Вправи для самостійного розв'язання

Знайти найбільше та найменше значення неперервної функції на відрізку:

247. $y = -3x^4 + 6x^2, \quad [-2, 2]$. **248.** $y = x + 2\sqrt{x}, \quad [0, 4]$.

249. $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2, \quad [-1, 1]$. **250.** $y = \sqrt{100 - x^2}, \quad [-6, 8]$.

251. $y = \dfrac{x-1}{x+1}, \quad [0, 4]$.

Відповіді:

247. $M = 3,\ m = -24$. **248.** $M = 8,\ m = 0$.

249. $M = 2,\ m = -12$. **250.** $M = 10,\ m = 6$.

251. $M = \dfrac{3}{5},\ m = -1$.

7.5. Обчислення границь функцій за правилом Лопіталя

Правило Лопіталя використовують для знаходження границь диференційовних функцій, якщо є невизначеності типу $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Нехай виконується співвідношення

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

або

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right),$$

де a – число або один із символів $\infty, +\infty, -\infty$. Тоді

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f'(x)}{\lim\limits_{x \to a} g'(x)},$$

якщо границя справа існує (не обов'язково скінченна).

Правило Лопіталя можна застосовувати кілька разів.

Аналогічне правило має місце і для односторонніх границь.

Знайти границі функцій, використовуючи правило Лопіталя:

252. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2\ln x}$.

$$\ulcorner\ \left(\frac{0}{0}\right)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2-1\right)'}{\left(2\ln x\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{2\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}x^2=1.\ \lrcorner$$

253. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$.

$$\ulcorner\ \left(\frac{0}{0}\right)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos 3x\right)'}{\left(x^2\right)'}=\left(\frac{0}{0}\right)\ \lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(3\sin 3x\right)'}{\left(2x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{9\cos 3x}{2}=\frac{9}{2}=4{,}5.\ \lrcorner$$

254. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$.

$$\ulcorner\ \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^x\right)'}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{2x}{e^x}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(2x\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2}{e^x}=0.\ \lrcorner$$

255. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

$$\ulcorner\ \left(\frac{0}{0}\right)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2}{1-\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.\ \lrcorner$$

256. $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{\cos x\ln\left(x-a\right)}{\ln\left(e^x-e^a\right)}$.

$$\ulcorner\ \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\ \lim_{x\to a+0}\frac{\cos x\ln\left(x-a\right)}{\ln\left(e^x-e^a\right)}=\cos a\cdot\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\ \lim_{x\to a+0}\frac{\ln\left(x-a\right)}{\ln\left(e^x-e^a\right)}=$$

$$= \cos a \cdot \left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x \to a+0} \frac{e^x - e^a}{(x-a)e^x} = \frac{\cos a}{e^a} \cdot \left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x \to a+0} \frac{e^x - e^a}{x - a} = \frac{\cos a}{e^a} \lim_{x \to a+0} \frac{e^x}{1} =$$

$$= \frac{\cos a}{e^a} \cdot e^a = \cos a . \quad \lrcorner$$

257. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x}$.

$$\ulcorner \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 5x} \cdot 5}{\frac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3} = \left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{5 \cdot \cos^2 3x}{3 \cos^2 5x} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{5 \cdot 2\cos 3x(-\sin 3x) \cdot 3}{3 \cdot 2 \cos 5x(-\sin 5x) \cdot 5} = \left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos 5x} \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(-\sin 3x) \cdot 3}{(-\sin 5x) \cdot 5} \cdot (-1) = -\frac{3}{5} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = -\frac{3}{5} \cdot (-1) = \frac{3}{5} . \quad \lrcorner$$

Наведемо приклад, коли правило Лопіталя застосувати не можна.

258. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \sin x}$.

$$\ulcorner \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \lim_{x \to \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \to \infty} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} .$$

Оскільки границя праворуч не існує, то застосовувати правило Лопіталя для знаходження заданої границі не можна. Шукану границю можемо знайти, поділивши попередньо чисельник і знаменник на x:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1, \text{ так як } \lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \quad (|\sin x| \le 1). \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Знайти границі функцій, використовуючи правило Лопіталя:

259. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16}$.

260. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{\ln x}$.

261. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$.

262. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}$.

263. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln\sin x}{\ln\sin 3x}$.

264. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-\cos 2x}{e^{x}-\cos x}$.

265. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg} x}-e^{x}}{\operatorname{tg} x-x}$.

266. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

267. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^{2}+e^{x}}{2x^{3}+e^{2x}}$.

268. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$.

Відповіді:

259. $\dfrac{1}{3}$.

260. $+\infty$.

261. 2.

262. $\dfrac{1}{2}$.

263. 1.

264. 2.

265. 1.

266. 2.

267. 0.

268. $\dfrac{1}{2}$.

8. Диференціал функції

Якщо функція $y=f\left(x\right)$ має похідну у точці x, то з формули (1) випливає, що приріст функції $\Delta f\left(x\right)$ можна записати у вигляді

$$\Delta f\left(x\right)=f'\left(x\right)\Delta x+o\left(\Delta x\right),\quad \Delta x\to 0.$$

Диференціалом функції $y=f\left(x\right)$ у точці x називають вираз $f'\left(x\right)\Delta x$ і позначають $df\left(x\right)$ або dy. *Диференціалом незалежної змінної* x вважають її приріст Δx і позначають dx. Отже, диференціал функції обчислюється за формулою

$$dy = f'(x)dx \qquad (6)$$

З формули (6) випливає, що позначення похідної $\frac{dy}{dx}$ можна розуміти як відношення двох диференціалів.

Обчислити диференціали функцій:

269. $y = x^2$.

$\ulcorner$ За формулою (6)

$$dy = \left(x^2\right)' dx = 2xdx . \quad \lrcorner$$

270. $y = \sin x$.

$\ulcorner$ За формулою (6)

$$dy = (\sin x)' dx = \cos x\, dx . \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>
Обчислити диференціали функцій:

271. $y = x$. **272.** $y = \ln x$.

Відповіді:

271. dx. **272.** $\frac{dx}{x}$.