Розділ 4. ФУНКЦІЯ. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

1. Функції однієї змінної та їх властивості

Нехай X – непорожня множина дійсних чисел. Якщо кожному числу $x \in X$ за певним правилом ставиться у відповідність єдине число y, то кажуть, що задано *функцію* f з *областю визначення* X. Для позначення функції використовують запис $y = f(x)$. При цьому x називають *незалежною змінною* або *аргументом* функції f, y – *залежною змінною* або *значенням функції* в точці x. Область визначення X позначають $D(f)$, а *множину значень* – $E(f) = \{y : y = f(x),\, x \in X\}$.

Послідовністю називають функцію з областю визначення $X = \{1, 2, \ldots\}$. Позначають послідовність символом $\{x_n\}$.

Графіком функції $y = f(x)$ називають множину точок площини xOy з координатами $(x;\ f(x))$, де $x \in D(f)$.

Якщо функціональна залежність y від x задана рівнянням $y = f(x)$, з якого можна виразити x як функцію змінної y – $x = \varphi(y)$, то функцію $x = \varphi(y)$ називають *оберненою* до функції $y = f(x)$ і позначають $x = f^{-1}(y)$. Тут y – незалежна змінна, а x – залежна. Якщо перепозначити звичним чином залежну і незалежну змінні, то графіки функцій $f(x)$ та $f^{-1}(x)$ будуть симетричними відносно прямої $y = x$.

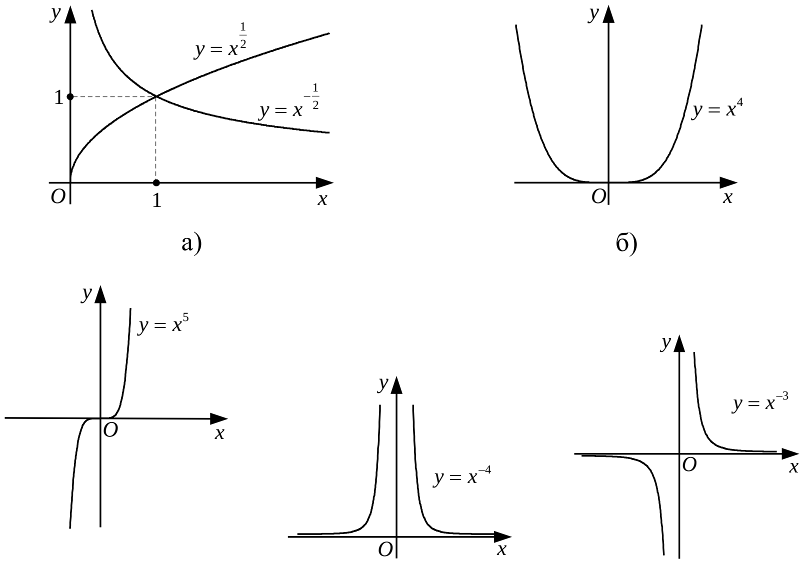
Основними елементарними функціями називають наступні функції:

1) Стала функція $y = c$, $c \in R$.

$D(f): x \in R$; $E(f): y \in \{c\}$.

2) Степенева функція $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$ (рис. 1).

Область визначення та множина значень степеневої функції залежать від значення показника α: наприклад, при цілому додатному α $D(f)$: $x \in (-\infty, +\infty)$; при цілому від'ємному α $D(f)$: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.



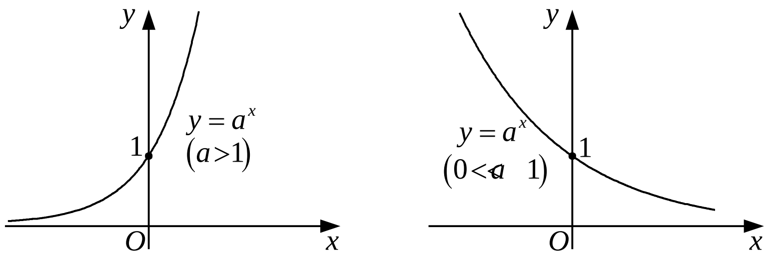
а) б)

в) г) д)

Рис. 1

3) Показникова функція $y = a^x$, де $a \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$ (рис. 2).

$D(f): x \in R$; $E(f): y \in (0, +\infty)$.

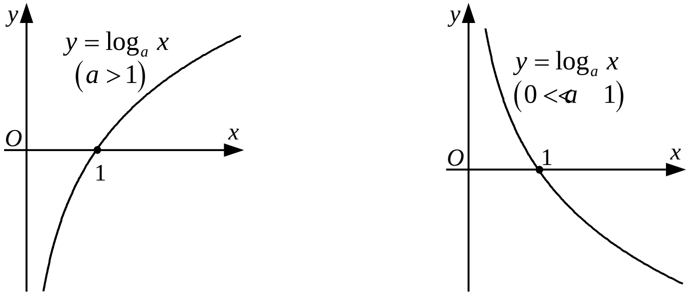


а) б)

Рис. 2

4) Логарифмічна функція $y = \log_a x$, де $a \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$ (рис. 3).

$D(f): x \in (0, +\infty)$; $E(f): y \in R$.



а) б)

Рис. 3

5) Тригонометричні функції:

*) синус $y = \sin x$ (рис. 4 а).

$$D(f): x \in R; \qquad E(f): y \in [-1, 1];$$

*) косинус $y = \cos x$ (рис. 4 б).

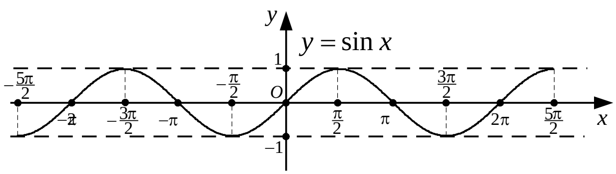
$$D(f): x \in R; \qquad E(f): y \in [-1, 1];$$

*) тангенс $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 4 в).

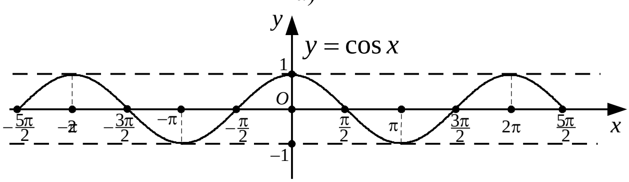
$$D(f): x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \ \frac{\pi}{2} + \pi k\right), \ \ k \in Z; \qquad E(f): y \in R;$$

*) котангенс $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 4 г).

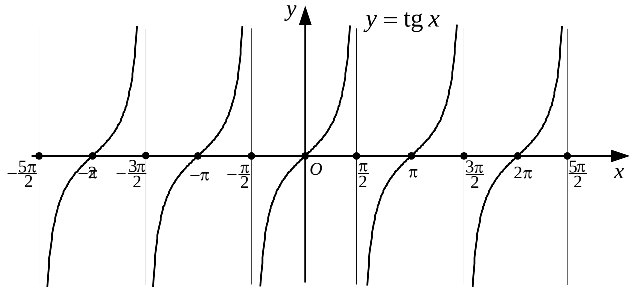
$$D(f): x \in (\pi k, \ \pi + \pi k), \ \ k \in Z; \qquad E(f): y = R.$$



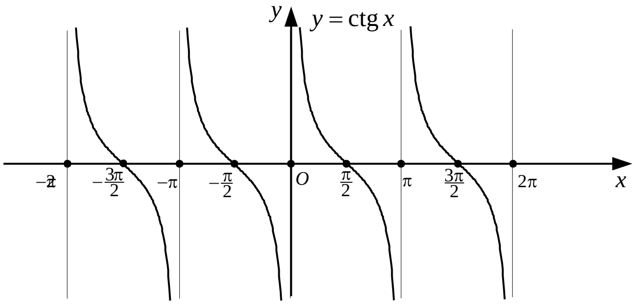
а)



б)



в)



г)

Рис. 4

6) Обернені тригонометричні функції:

*) арксинус $y = \arcsin x$ (рис. 5 а).

$$D(f): x \in [-1, 1]; \quad E(f): y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$$

*) арккосинус $y = \arccos x$ (рис. 5 б).

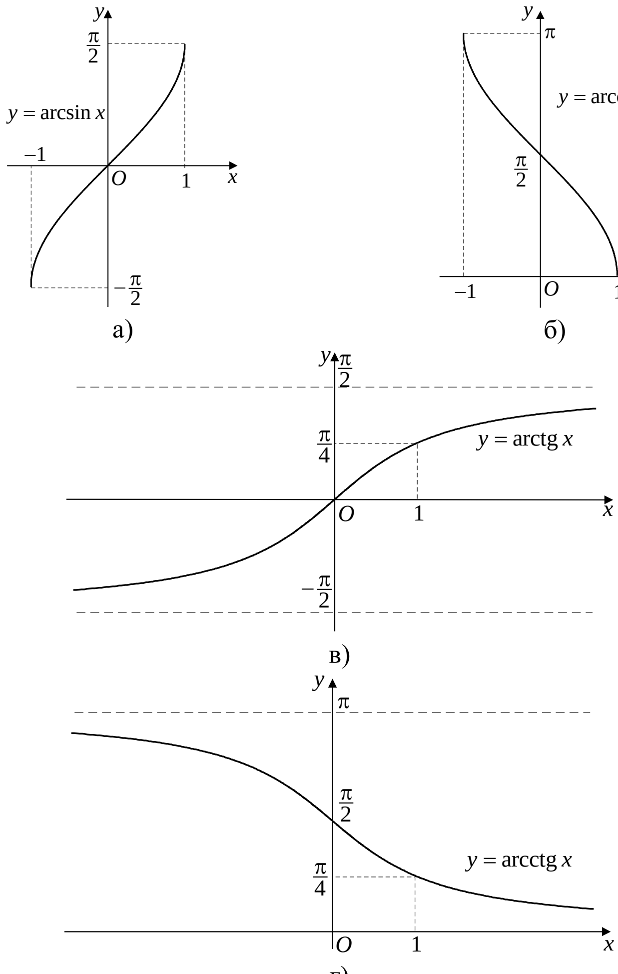
$$D(f): x \in [-1, 1]; \quad E(f): y \in [0, \pi];$$

*) арктангенс $y = \mathrm{arctg}\, x$ (рис. 5 в).

$$D(f): x \in R; \quad E(f): y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

*) арккотангенс $y = \mathrm{arcctg}\, x$ (рис. 5 г).

$$D(f): x \in R; \quad E(f): y \in (0, \pi).$$



а) б) в) г)

Рис. 5

Елементарними називають функції, що одержуються з основних елементарних функцій за допомогою операцій додавання, віднімання, множення, ділення та операції утворення складної функції, які застосовуються скінченну кількість разів. Операція утворення *складної* функції полягає у наступному: якщо $y = f(u)$, а $u = g(x)$, то функція $y = f(g(x))$ – складна (її ще називають *суперпозицією* функцій).

Функцію $f(x)$ називають *парною* (*непарною*), якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для довільного $x \in D(f)$ $f(-x) = f(x)$ $\left(f(-x) = -f(x)\right)$. Графік парної функції симетричний відносно осі Oy, графік непарної – відносно початку координат.

Функцію $f(x)$ називають *періодичною*, якщо існує таке число $T \neq 0$, що для довільного $x \in D(f)$:

1) $(x+T) \in D(f)$;

2) $f(x+T) = f(x)$.

Число T при цьому називають *періодом* функції $f(x)$, а найменше додатне число T_0, для якого виконуються вказані умови – *основним періодом* функції.

Якщо основний період функції $y = f(x)$ дорівнює T_0, то основний період функції $y = f(kx+b)$ знаходиться за формулою $T = \dfrac{T_0}{k}$.

1. Задано функцію $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$. Знайти: $f(0)$; $f(2)$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$; $f(a)$. Чи існує значення $f(1)$?

⌜ Обчислимо значення функції $f(x)$ у вказаних точках, підставляючи замість x в аналітичний вираз функції $\dfrac{x+3}{x-1}$ задані значення аргументу:

$$f(0) = \frac{0+3}{0-1} = \frac{3}{-1} = -3; \qquad f(2) = \frac{2+3}{2-1} = \frac{5}{1} = 5;$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}+3}{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{7}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{7}{2}\cdot\frac{2}{1} = -7; \qquad f(a) = \frac{a+3}{a-1}.$$

Значення $f(1)$ не існує, оскільки ділення на нуль змісту не має. ⌟

2. Записати перші чотири члени послідовності, заданої загальним членом

$$x_n = (-1)^n \frac{1}{n}.$$

$\ulcorner$ Підставляємо у формулу загального члена послідовності замість n по черзі натуральні числа $1, 2, 3, 4$:

$$x_1 = (-1)^1 \frac{1}{1} \Rightarrow x_1 = -1;$$

$$x_2 = (-1)^2 \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2};$$

$$x_3 = (-1)^3 \frac{1}{3} \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{3};$$

$$x_4 = (-1)^4 \frac{1}{4} \Rightarrow x_4 = \frac{1}{4}. \quad \lrcorner$$

3. Записати формулу загального члена послідовності:

$$\frac{1}{2};\ -\frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ -\frac{4}{5};\dots .$$

$\ulcorner$ Знак члена послідовності можна охарактеризувати виразом $(-1)^{n+1}$, а чисельник і знаменник пов'язані з номером члена послідовності наступним чином: $\frac{n}{n+1}$. Тому $x_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$. $\lrcorner$

4. Задано функції $y = u^2$, $u = x + 3$. Виразити y як функцію змінної x.

$\ulcorner$ Будуємо аналітичний вираз складної функції, підставляючи замість u у функцію $y(u)$ значення $u = x + 3$:

$$y = (x+3)^2 \quad \text{або} \quad y = x^2 + 6x + 9. \quad \lrcorner$$

5. Подати складну функцію $y = \sin^2 x$ у вигляді ланцюжка основних елементарних функцій.

$\ulcorner$ Записуючи аналітичний вираз функції у вигляді $y = (\sin x)^2$, бачимо, що $y = u^2$, $u = \sin x$. $\lrcorner$

6. Знайти області визначення функцій:

1) $y=\sqrt{x-1}$; 2) $y=\log_3(x+2)$;

3) $y=\dfrac{x+3}{x-1}$; 4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\arcsin 2x$.

⌈ 1) Область визначення функції $y=\sqrt{x}$ відома – $D(f): x\ge 0$. У випадку функції $y=\sqrt{x-1}$ ця умова набуває вигляду: $x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$.

Отже, $D(f): x\in[1, +\infty)$.

2) Скористаємось тим, що для функції $y=\log_a x$ $(a\in R,\ a>0,\ a\ne 1)$ область визначення $D(f): x>0$. Тому $x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$.

Отже, $D(f): x\in(-2, +\infty)$.

3) Оскільки для $y=\dfrac{1}{x}$ $D(f): x\ne 0$, то у нашому випадку $x-1\ne 0 \Leftrightarrow x\ne 1$.

Тому $D(y): x\in(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$.

4) Для існування функції слід вимагати виконання системи нерівностей, кожна з яких враховує область визначення відповідної основної елементарної функції:

$$\begin{cases}\sqrt{x}\ne 0\\ x\ge 0\\ -1\le 2x\le 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ne 0\\ x\ge 0\\ -\dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ -\dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow 0<x\le \frac{1}{2}.$$

Отже, $D(f): x\in\left(0, \dfrac{1}{2}\right]$. ⌋

7. Дослідити функції на парність і непарність:

1) $y=\dfrac{x+3}{x-1}$; 2) $y=x^3+x$;

3) $y=x^6+x$; 4) $y=|x|\cdot\cos x$.

⌈ 1) Область визначення даної функції (див. вправу 6) $x\in(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$ – не є симетричною відносно нуля. Тому функція ані парна, ані непарна (у цьому випадку ще кажуть, що функція $f(x)$ *загального вигляду*).

2) Область визначення функції $x \in R$ – симетрична відносно нуля. Тому обчислимо $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x)$.

Оскільки виконується умова $f(-x) = -f(x)$, то дана функція непарна.

3) Область визначення функції $x \in R$ – симетрична відносно нуля. Але вираз $f(-x) = (-x)^6 + (-x) = x^6 - x$ не дорівнює $-f(x) = -(x^6 + x)$ і не дорівнює $f(x) = x^6 + x$. Тому функція $f(x)$ ані парна, ані непарна.

4) Область визначення $x \in R$. Оскільки $f(-x) = |-x|\cos(-x) = |x|\cos x = f(x)$, то функція $f(x)$ – парна. ⌋

8. Знайти основні періоди функцій:

1) $y = \cos 3x$; 2) $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{4}$.

⌈ 1) Оскільки основний період функції $\cos x$ дорівнює 2π, то основним періодом функції $y = \cos 3x$ є число $T = \dfrac{2\pi}{3}$.

2) Основний період функції $\operatorname{tg} x$ дорівнює π. Тому основним періодом функції $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{4}$ є число $T = \dfrac{\pi}{\frac{1}{4}} = 4\pi$. ⌋

9. Дослідити функцію $y = \sin x^2$ на періодичність.

⌈ Припустимо, що функція y – періодична, тобто існує така стала $T > 0$, для якої $y(x+T) = y(x)$ для всіх x. Тоді для заданої функції маємо:

$$\sin(x+T)^2 = \sin x^2 \Leftrightarrow \sin(x+T)^2 - \sin x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{(x+T)^2 + x^2}{2}\sin\frac{(x+T)^2 - x^2}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(x^2+xT+\frac{T^2}{2}\right)\sin\left(xT+\frac{T^2}{2}\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \cos\left(x^2+xT+\dfrac{T^2}{2}\right)=0 \\ \sin\left(xT+\dfrac{T^2}{2}\right)=0. \end{array}\right.$$

Але, розв'язуючи кожне з цих рівнянь відносно T, ми одержимо значення T, яке залежить від x. А це суперечить припущенню, зробленому на початку розв'язання, що T – стала. Отже, припущення не вірне. Функція неперіодична. ⌋

10. Знайти функції, обернені до заданих:

1) $y=3x+1$; 2) $y=e^{4x}$.

⌈ 1) Виразимо з рівняння $y=3x+1$ змінну x через y: $y-1=3x$, $\frac{y-1}{3}=x$. Звідси шляхом заміни y на x та x на y одержуємо шукану обернену функцію $y=\frac{x-1}{3}$.

2) Прологарифмуємо обидві частини рівняння $y=e^{4x}$ за основою e:

$\ln y=\ln e^{4x} \Leftrightarrow \ln y=4x \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}\ln y$. Отже, оберненою до функції $y=e^{4x}$ є функція $y=\frac{1}{4}\ln x$.

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

11. Задано функцію $f(x)=x^2-4$. Знайти значення $f(0)$; $f(3)$; $f(a)$.

12. Задано функцію $\varphi(t)=ta^{-t}$. Знайти значення $\varphi(0)$; $\varphi(1)$; $\varphi\left(\frac{1}{a}\right)$; $\varphi(-a)$.

13. Записати перші п'ять членів послідовності, заданої формулою загального члена $x_n=\frac{3n-1}{2n+5}$.

14. Записати формулу загального члена послідовності:

1) $1;\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ -\frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ldots;$

2) $-1;\ 0;\ -1;\ 0;\ -1;\ldots.$

15. Задано функції $y=\frac{1}{\sqrt{z^2+1}}$, $z=\operatorname{tg}x$. Виразити y як функцію змінної x.

16. Подати складні функції за допомогою ланцюжків основних елементарних функцій:

1) $y=\sqrt{\cos x}$; 2) $y=e^{\operatorname{tg}^2 x}$.

17. Знайти області визначення функцій:

1) $y=\sqrt[3]{x+2}$; 2) $y=\frac{1}{x^2+1}$; 3) $y=\sqrt{4-x^2}$;

4) $y=\arccos\frac{x}{2}$; 5) $y=\frac{\sqrt{2-x}}{\log_2 x}$; 6) $y=\sin x+\frac{e^x}{\sqrt{|x|-2}}$.

18. Дослідити функції на парність та непарність:

1) $y=7x$; 2) $y=2x+1$; 3) $y=x^2\sin x$;

4) $y=\sqrt[3]{x}+x$; 5) $y=\ln\frac{x+1}{x-1}$; 6) $y=3^x+3^{-x}$.

19. Знайти основні періоди функцій:

1) $y=\cos\frac{x}{2}$; 2) $y=\operatorname{ctg}3x$.

20. Знайти функції, обернені до заданих:

1) $y=\frac{x}{2}$; 2) $y=x^2+1$; 3) $y=\frac{1}{x+2}$; 4) $y=2+\operatorname{arctg}\frac{x}{3}$.

Відповіді:

11. -4; 5; a^2-4.

12. 0; $\frac{1}{a}$; $a^{-\frac{a+1}{a}}$; $-a^{a+1}$.

13. $\frac{2}{7}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{8}{11}$; $\frac{11}{13}$; $\frac{14}{15}$.

14. 1) $(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$; 2) $\frac{(-1)^n-1}{2}$.

15. $y = |\cos x|$.

16. 1) $y = \sqrt{u}$, $u = \cos x$; 2) $y = e^{u}$, $u = v^{2}$, $v = \operatorname{tg} x$.

17. 1) R; 2) R; 3) $[-2, 2]$; 4) $[-2, 2]$; 5) $(0, 1) \cup (1, 2]$; 6) $(-\infty, -2) \cup (2 + \infty)$.

18. 1) непарна; 2) загального вигляду; 3) непарна; 4) непарна; 5) непарна; 6) парна.

19. 1) 4π; 2) $\frac{\pi}{3}$.

20. 1) $y = 2x$; 2) $y = \sqrt{x - 1}$; 3) $y = \frac{1 - 2y}{y}$; 4) $y = 3\operatorname{tg}(y - 2)$.

2. Побудова графіків функцій

При побудові графіків функцій використовують наступні прийоми: а) побудова "за точками" (для чого надають незалежній змінній кількох значень $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3$, …, $x = x_n$; обчислюють відповідні значення функції $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3)$, …, $y_n = f(x_n)$; будують в системі координат точки $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$, …, $(x_n; y_n)$, які сполучають плавною лінією); б) перетворення графіків (зсув, розтяг); в) дії над графіками ("додавання", "віднімання", "множення" графіків).

Якщо функція є парною або непарною, то побудова графіка спрощується завдяки його симетричності (див. підрозділ 1).

За відомим графіком функції $y = f(x)$ можна побудувати графіки функцій:

1) $y = f(-x)$ – графік симетричний графіку функції $y = f(x)$ відносно осі Oy;

2) $y = -f(x)$ – графік симетричний графіку функції $y = f(x)$ відносно осі Ox;

3) $y = f(x - a)$ – графік зсунутий відносно графіка функції $y = f(x)$ вздовж осі Ox на величину a (при $a > 0$ зсув вправо, при $a < 0$ – вліво);

4) $y = f(x) + b$ – графік зсунутий відносно графіка функції $f(x)$ вздовж осі Oy на величину b (при $b > 0$ зсув вгору, при $b < 0$ – вниз);

5) $y = A f(x)$ – графік розтягнутий відносно графіка функції $f(x)$ в A разів вздовж осі Oy;

6) $y = f(kx)$ $(k > 0)$ – графік розтягнутий відносно графіка функції $f(x)$ в $\frac{1}{k}$ разів вздовж осі Ox.

За допомогою вказаних перетворень можна побудувати графік складної функції вигляду $y = A f(k(x-a)) + b$, якщо відомий графік функції $y = f(x)$.

21. Побудувати графік функції $y = 2x + 1$.

⌐ Дана функція ані парна, ані непарна (див. задачу 18) і визначена на всій множині дійсних чисел. Оскільки графіком лінійної функції є пряма, то для її побудови достатньо знати лише дві точки цієї прямої.

Виберемо два довільні значення аргументу і обчислимо відповідні значення функції:

x	y
0	1
2	5

Побудуємо в координатній площині точки $M_1(0;1)$ та $M_2(2;5)$. Вони і визначать пряму, яка є графіком заданої функції (рис. 6). ⌟

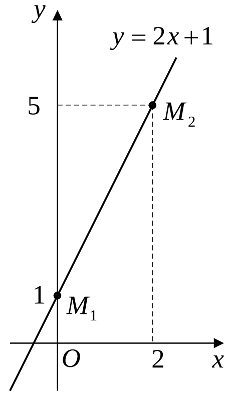


Рис. 6

22. Побудувати графік функції $y = x^2$.

⌐ Оскільки функція парна, то достатньо побудувати частину графіка для значень $x \ge 0$, а потім симетрично відобразити її відносно осі Oy.

Виберемо кілька невід'ємних значень аргументу і обчислимо відповідні значення функції:

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9

Зобразимо точки $(0;\,0)$, $(1;\,1)$, $(2;\,4)$, $(3;\,9)$ в системі координат і сполучимо їх плавною лінією.

Побудуємо лінію симетричну одержаній лінії відносно осі Oy.

Одержану лінію (рис. 7), яка є графіком функції $y=x^2$, називають параболою. ⌋

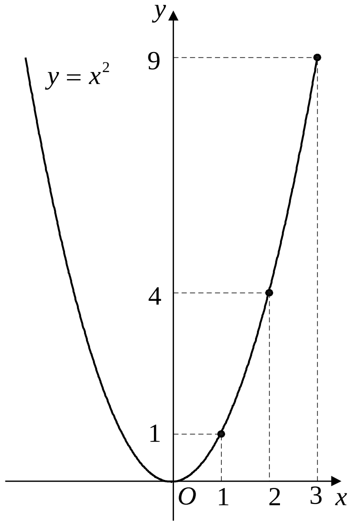


Рис. 7

23. За відомим графіком функції $y=x^2$ побудувати графіки функцій: 1) $y=2x^2$; 2) $y=(x-1)^2$; 3) $y=-x^2$; 4) $y=x^2-1$.

⌈ Використовуючи відомий графік функції $y=x^2$ (рис. 7) та наведені вище перетворення графіків нам слід:

у випадку 1) здійснити розтяг у 2 рази вздовж осі Oy (рис. 8);

у випадку 2) – зсув на 1 одиницю вправо вздовж осі Ox (рис. 9);

у випадку 3) – симетричне відображення відносно осі Ox (рис. 10);

у випадку 4) – зсув на 1 одиницю вниз вздовж осі Oy (рис. 11). ⌋

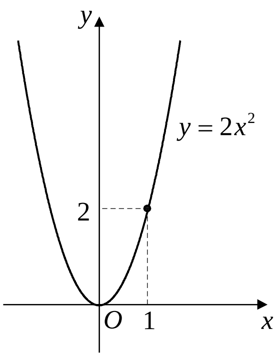


Рис. 8

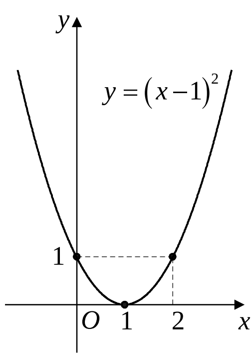


Рис. 9

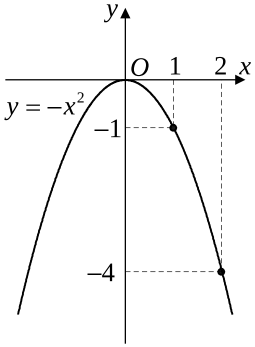


Рис. 10

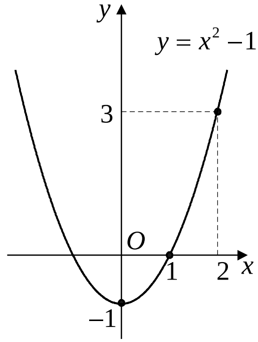


Рис. 11

24. Побудувати графік функції $y=\dfrac{1}{x}$.

⌈ Оскільки дана функція непарна, то виберемо кілька додатних значень аргументу та обчислимо відповідні значення функції:

x	y
$\frac{1}{3}$	3
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$

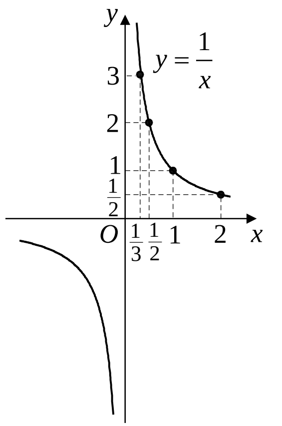


Рис. 12

Зобразимо відповідні точки в системі координат і сполучимо їх плавною лінією. Використовуючи симетричність графіка відносно початку координат, одержуємо графік функції, зображений на рис. 12. ⌋

25. Побудувати графік функції $y = e^{x-2}$.

⌈ Схематичний графік показникової функції $y = e^{x}$ ($y = a^{x}$, $a > 1$) зображений на рис. 2. Здійснюючи зсув цього графіка на 2 одиниці вправо вздовж осі Ox одержимо графік функції $y = e^{x-2}$ (рис. 13). ⌋

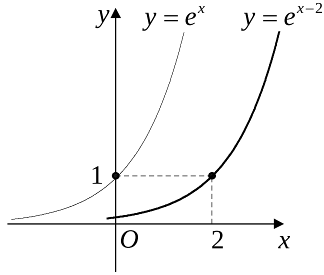


Рис. 13

26. Побудувати графік функції $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.

⌈ Подамо задану функцію у вигляді $y = 2\sin 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Графік функції $y = \sin x$ нам відомий (рис. 4). Графік функції $y = \sin 2x$ одержиться з початкового стисканням вздовж осі Ox у два рази. Графік $y = \sin 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ побудуємо зсувом попереднього на $\frac{\pi}{4}$ вправо і розтягом у два рази останнього графіка вздовж осі Oy отримаємо шуканий графік функції $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 14). ⌋

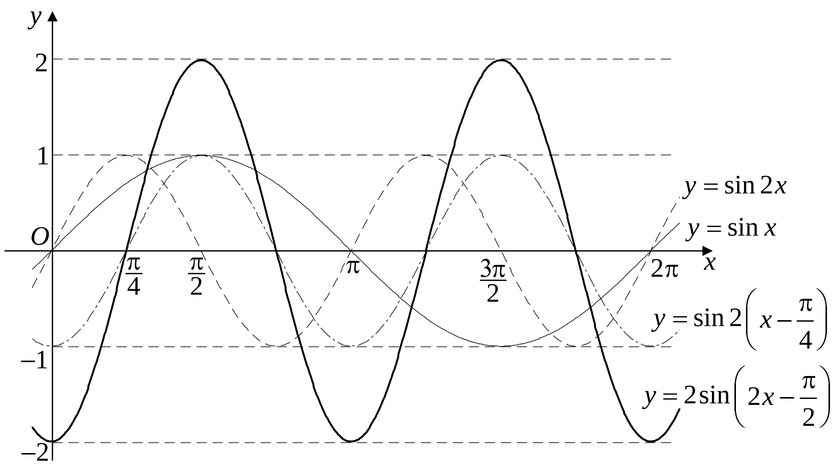


Рис. 14

27. Побудувати графік функції

$$y = \begin{cases} x+1, & \text{якщо } x \le 1, \\ 2, & \text{якщо } 1 < x < 2, \\ -x+4, & \text{якщо } x \ge 2. \end{cases}$$

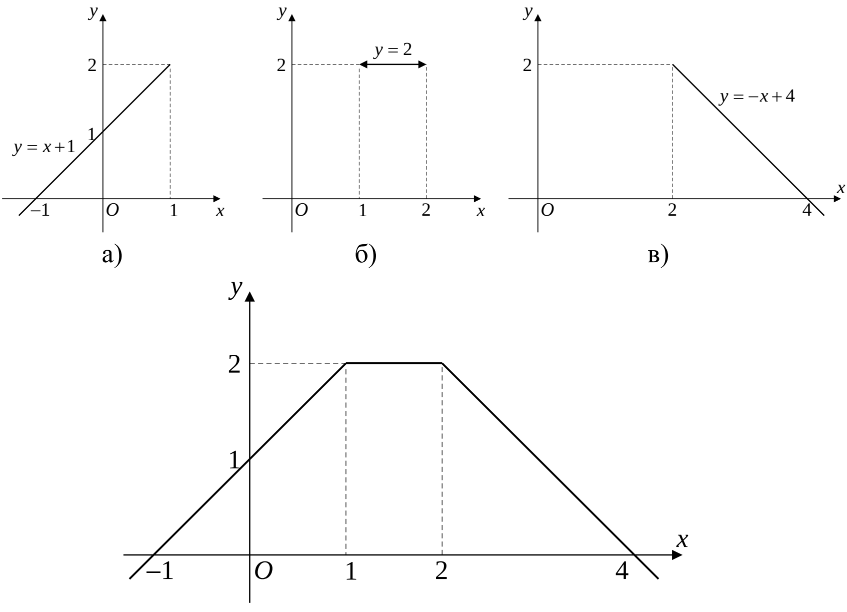
⌜ Дана функція не є елементарною.

При $x \le 1$ функція задана рівнянням $y = x+1$ і її графіком є промінь (рис. 15 а).

При $1 < x < 2$ функція задана рівнянням $y = 2$ і її графіком є пряма, на якій потрібно взяти відрізок, що відповідає значенням аргументу $x \in [1,\ 2]$ з виколотими кінцями (рис. 15 б) (ми позначимо виколоті точки стрілками на кінцях відрізка).

При $x \ge 2$ функція задана рівнянням $y = -x+4$ і її графіком є промінь (рис. 15 в).

"Збираючи" побудовані окремо частини, отримаємо графік заданої функції, який зображений на рис. 15 г. ⌟



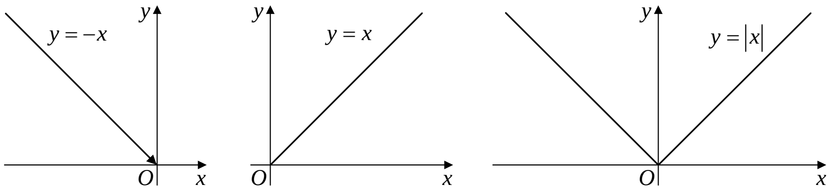
г)

Рис. 15

28. Побудувати графіки функцій: 1) $y = |x|$; 2) $y = |x-1|$.

┌ 1) Подаючи дану функцію у вигляді $y = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x < 1, \\ x, & \text{якщо } x \ge 1, \end{cases}$

отримаємо можливість реалізувати описану у попередньому прикладі процедуру, яка ілюструється рис. 16.



а) б) в)

Рис. 16

2) Зсувом графіка функції $y = |x|$ (рис. 16 в)) на одиницю вправо одержимо графік функції $y = |x-1|$ (рис. 17). ┘

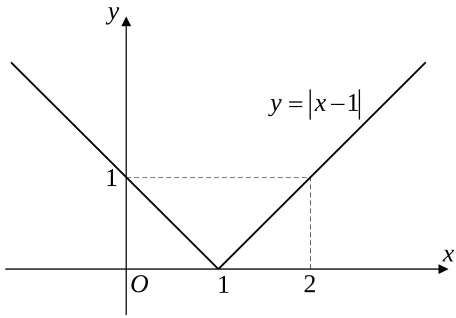


Рис. 17

29. Побудувати графік функції $y = x + \cos x$.

┌ Графік заданої функції можна побудувати "додаванням" відомих графіків функцій $y = x$ та $y = \cos x$ (рис. 18). ┘

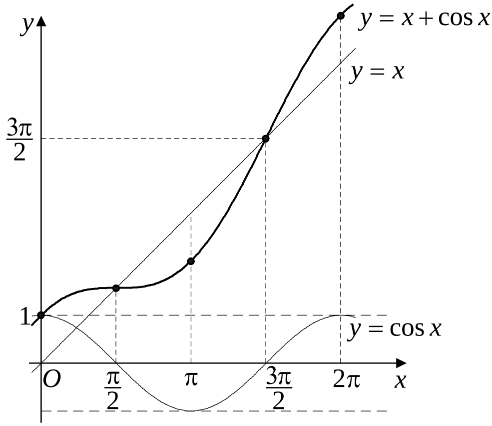


Рис. 18

30. Побудувати графік функції $y = x\sin x$.

⌈ Графік заданої функції можна побудувати “множенням” відомих графіків функцій $y = x$ та $y = \sin x$ (рис. 19). ⌋

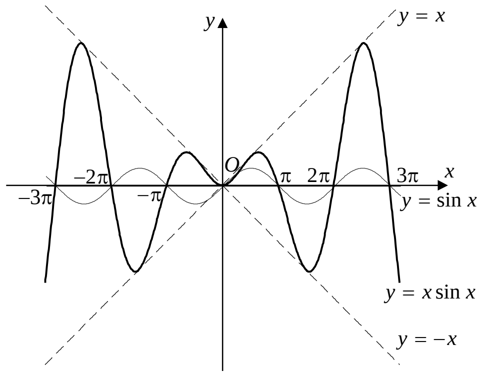


Рис. 19

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

Побудувати графіки функцій:

31. $y = -2x + 3$. **32.** $y = x^3$.

33. 1) $y = (x+1)^3$; 2) $y = 2x^3$; 3) $y = x^3 + 2$; 4) $y = -x^3$.

34. 1) $y = \sqrt{x}$; 2) $y = \sqrt{x-1}$; 3) $y = 2\sqrt{x}$; 4) $y = \sqrt{-x}$.

35. 1) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$; 2) $y=\log_2(x+1)$.

36. 1) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$; 2) $y=3\sin x$; 3) $y=2\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

37. 1) $y=2\arcsin x$; 2) $y=\arccos\frac{x}{2}$; 3) $y=2\operatorname{arctg}(x-3)$.

38. 1) $y=\begin{cases}-1, & \text{якщо } x<0,\\ 1, & \text{якщо } x>0;\end{cases}$ 2) $y=2|x-2|$.

39. 1) $y=x+1+\sin x$; 2) $y=\frac{1}{x}\sin x$.

3. Границя функції

Число a називають *границею послідовності* $\{x_n\}$, якщо для довільного $\varepsilon>0$ знайдеться число N_0, що для всіх $n>N_0$ виконується нерівність $|x_n-a|<\varepsilon$. При цьому кажуть, що послідовність $\{x_n\}$ *збігається* до числа a. Позначення: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ або $x_n\to a$.

Число A називають *границею функції* $f(x)$ *в точці* x_0, якщо для довільного $\varepsilon>0$ знайдеться $\delta>0$, що для всіх значень x з області визначення функції, які задовольняють умову $0<|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$. Позначення: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ або $f(x)\to A$ при $x\to x_0$.

Число A називають *границею функції при* $x\to\infty$, якщо для довільного $\varepsilon>0$ знайдеться $\delta>0$, що для всіх значень x з області визначення функції, які задовольняють умову $|x|>\delta$, виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$. Позначення: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ або $f(x)\to A$ при $x\to\infty$.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, то функцію $f(x)$ називають *нескінченно малою* при $x\to x_0$.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$, то функцію $f(x)$ називають *нескінченно* *великою* при $x \to x_0$. Запис $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ означає, що для довільного (як завгодно великого) числа $M > 0$ знайдеться $\delta > 0$, що для всіх значень x таких, що $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > M$.

Властивості нескінченно малих:

1) Якщо функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ нескінченно малі при $x \to x_0$, то їх сума $f_1(x) + f_2(x)$ також є нескінченно малою при $x \to x_0$.

2) Якщо функція $f(x)$ нескінченно мала при $x \to x_0$, а функція $g(x)$ – обмежена, то їх добуток $f(x)g(x)$ є нескінченно малою функцією при $x \to x_0$.

Властивості нескінченно великих:

1) Якщо при $x \to x_0$ функція $f(x)$ – нескінченно велика, а функція $g(x)$ має границю, то нескінченно великими при $x \to x_0$ є:

сума $f(x) + g(x)$; добуток $g(x) \cdot f(x)$; частка $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

2) Якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ – нескінченно великі при $x \to x_0$, то їх добуток теж є нескінченно великою.

3) Якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ – нескінченно великі одного знаку при $x \to x_0$, то їх сума теж є нескінченно великою.

Зв'язок між нескінченно великими та нескінченно малими:

1) Якщо $f(x)$ при $x \to x_0$ – нескінченно велика функція, то функція $\alpha(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ – нескінченно мала.

2) Якщо при $x \to x_0$ функція $\alpha(x)$ нескінченно мала і не перетворюється в нуль, то функція $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ – нескінченно велика.

При обчисленні границь зручно використовувати ряд їх властивостей:

1° (арифметичні властивості границь).

Якщо існують $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ та $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, то а) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,

зокрема,

$$\lim_{x\to x_0}\left[c\cdot g(x)\right]=c\lim_{x\to x_0} g(x);$$

в) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ (якщо $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$).

2º (<u>границя суперпозиції функцій</u>).

Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=a$ та $\lim\limits_{t\to a} f(t)=A$, то існує також границя складної функції $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=A$. Дану рівність можна записати також у вигляді: $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=\lim\limits_{y\to a} f(y)$. На цій формулі ґрунтується обчислення границь методом заміни змінної, якщо покласти $y=g(x)$.

При обчисленні границь зручно користуватись тим, що коли x_0 належить області визначення елементарної функції $f(x)$, то (див. підрозділ 5)

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \tag{1}$$

Більш загально: якщо $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=a$, де a належить області визначення елементарної функції f, то

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x))=a\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right), \tag{2}$$

де x_0 – число або один із символів ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Використовуються також границі:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (*перша визначна* границя);

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$ (*друга визначна* границя).

40. Користуючись означенням границі послідовності, показати, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n}}=0$.

⌈ Загальний член послідовності $x_n=\frac{1}{\sqrt[5]{n}}$. Тому

$$x_n-0=\frac{1}{\sqrt[5]{n}}-0=\frac{1}{\sqrt[5]{n}}.$$

Задамо додатне число ε. Розглянемо нерівність $|x_n-0|<\varepsilon$, тобто $\frac{1}{\sqrt[5]{n}}<\varepsilon$. Оскільки обидві частини нерівності додатні, то вона рівносильна нерівності

$$\frac{1}{\varepsilon}<\sqrt[5]{n},\ \text{звідки}\ \ n>\frac{1}{\varepsilon^5}.$$

Отже, якщо за N_0 в означенні границі послідовності взяти число $N_0=\frac{1}{\varepsilon^5}$, то для всіх $n>N_0$ буде виконуватись умова $|x_n-0|<\varepsilon$. Це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n}}=0$. ⌋

41. Показати, що послідовність $\frac{3}{4};\frac{5}{7};\frac{7}{10};\ldots;\frac{2n+1}{3n+1};\ldots$ має границею число $\frac{2}{3}$.

⌈ Загальний член послідовності $x_n=\frac{2n+1}{3n+1}$. Тому

$$x_n-\frac{2}{3}=\frac{2n+1}{3n+1}-\frac{2}{3}=\frac{3(2n+1)-2(3n+1)}{3(3n+1)}=\frac{1}{3(3n+1)}.$$

Задамо додатне число ε. Розглянемо нерівність $\left|x_n-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$, тобто $\frac{1}{3(3n+1)}<\varepsilon$. Помножимо обидві частини останньої нерівності на $\frac{3n+1}{\varepsilon}$:

$$\frac{1}{3\varepsilon}<3n+1,\ \text{звідки}\ \ n>\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon}-1\right).$$

Отже, якщо за N_0 в означенні границі послідовності взяти число $N_0 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon} - 1\right)$, то для всіх $n > N_0$ виконуватиметься умова $\left|x_n - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$. Це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2}{3}$. ⌟

42. Довести, що $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$.

⌜ Запишемо “ланцюжок” означення границі для цього випадку.

Число c є границею функції $f(x) = c$ в точці x_0, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$, що для всіх значень x таких, що $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|c - c| = 0 < \varepsilon$.

Оскільки остання нерівність виконується для всіх $\varepsilon > 0$ при довільному $\delta > 0$, то маємо $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$. ⌟

Знайти границі функцій.

43. а) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2 - 3x + 2\right)$; б) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - x + 3}$.

⌜ а) Оскільки функція $f(x) = x^2 - 3x + 2$ $\left(D(f) = (-\infty, +\infty)\right)$ є елементарною, то для обчислення її границі можна застосувати властивість (1). Підставивши в аналітичний вираз функції замість аргументу x його граничне значення 2, одержимо

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2 - 3x + 2\right) = 2^2 - 3\cdot 2 + 2 = 0.$$

б) Значення $x = -1$ належить області визначення функції $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - x + 3}$ (знаменник не дорівнює нулю при $x = -1$). Тому скористаємось формулою (1):

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - x + 3} = \frac{(-1)^2 + 2(-1)}{(-1)^2 - (-1) + 3} = \frac{1 - 2}{1 + 1 + 3} = -\frac{1}{5}. \ ⌟$$

44. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$.

⌜ Скористатись формулою (1) у цьому випадку не можна, оскільки значення $x = 1$ не належить області визначення функції $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$.

Для знаходження заданої границі застосуємо формулу скороченого множення $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 1^2+1+1 = 3. \quad \lrcorner$$

У розглянутому щойно прикладі чисельник і знаменник дробу прямують до нуля при $x \to 1$. У такому випадку кажуть, що має місце невизначеність типу $\frac{0}{0}$.

Поряд з такою невизначеністю зустрічаються й інші, наприклад, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞ тощо. Якщо при обчисленні границі виникає одна з невизначеностей, то процес обчислення границі називають ще *розкриттям невизначеності*. Зручно класифікувати границі в залежності від типу невизначеності і розглядати відповідні методи розкриття невизначеностей у вигляді правил.

Правило 1. *Для того щоб знайти границю дробово-раціональної функції у випадку, коли при $x \to x_0$ чисельник і знаменник прямують до нуля (невизначеність $\frac{0}{0}$), потрібно скоротити дріб на $(x - x_0)$ і перейти до границі.*

Застосування правила 1 ґрунтується на розкладі чисельника та знаменника дробу на множники. Для цього можна скористатись, наприклад, формулами скороченого множення

$$x^2 \pm 2ax + a^2 = (x \pm a)^2; \qquad \text{(a)}$$

$$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a); \qquad \text{(в)}$$

$$x^3 \pm a^3 = (x \pm a)(x^2 \mp ax + a^2) \qquad \text{(c)}$$

або формулою розкладу квадратного тричлена на множники

$$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2), \qquad \text{(d)}$$

де x_1, x_2 – корені рівняння $ax^2+bx+c=0$.

45. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2+5x-6}$.

$\ulcorner$ Підстановкою значення $x=1$ переконуємось, що маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Скористаємось правилом 1, для чого спочатку розкладемо чисельник та знаменник дробу на множники.

Розглянемо рівняння $2x^2+x-3=0$. Його коренями є числа $x_1=1$ та $x_2=-\frac{3}{2}$. Тому за формулою (d):

$$2x^2+x-3=2(x-1)\left(x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right)=(x-1)(2x+3).$$

Аналогічно, розв'язавши рівняння $x^2+5x-6=0$, одержимо $x_1=1$, $x_2=-6$ та $x^2+5x-6=(x-1)(x+6)$.

Тому

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x-6}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x+3)}{(x-1)(x+6)}=\lim_{x\to1}\frac{2x+3}{x+6}=\frac{2\cdot1+3}{7+6}=\frac{5}{7}. \quad \lrcorner$$

46. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^4-x-2}{x^3+1}$.

$\ulcorner$ При $x=-1$ чисельник та знаменник перетворюються в нуль. Тому потрібно скористатись правилом 1.

У нашому випадку $x-x_0=x-(-1)=x+1$, отже, згідно з правилом 1, скорочувати дріб потрібно саме на вираз $(x+1)$. Знаменник дробу можна за допомогою формули (c) скороченого множення подати у вигляді: $x^3+1=x^3+1^3=(x+1)(x^2-x+1)$.

Для розкладу чисельника на множники виконаємо ділення многочлена на многочлен "кутом":

$$\begin{array}{r|l}
-\;x^4-x-2 & x+1 \\ \cline{2-2}
x^4+x^3 & x^3-x^2+x-2 \\ \cline{1-1}
-\;-x^3-x-2 & \\
-x^3-x^2 & \\ \cline{1-1}
-\;x^2-x-2 & \\
x^2+x & \\ \cline{1-1}
-\;-2x-2 & \\
-2x-2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Отже,
$x^4-x-2=(x+1)(x^3-x^2+x-2)$.

Тому одержимо

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^4-x-2}{x^3+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\left(x^3-x^2+x-2\right)}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{x^3-x^2+x-2}{x^2-x+1}=$$

$$=\frac{(-1)^3-(-1)^2+(-1)-2}{(-1)^2-(-1)+1}=\frac{-1-1-1-2}{1+1+1}=\frac{-5}{3}=-\frac{5}{3}.\quad \lrcorner$$

47. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$.

$\ulcorner$ При $x=-2$ знаменник не дорівнює нулю. Тому за формулою (1):

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{x^2-x-2}=\frac{(-2)^2+(-2)-2}{(-2)^2-(-2)-2}=\frac{0}{4}=0,$$

тобто функція $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$ є нескінченно малою при $x\to-2$. $\lrcorner$

48. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+1}{x^2-2x-3}$.

$\ulcorner$ При $x=3$ знаменник дробу дорівнює нулю. Тому властивістю (1) скористатись не можна. Але тут немає і невизначеності, оскільки чисельник дробу при $x=3$ дорівнює 10, тобто відмінний від нуля.

Ми вже перевірили, що знаменник дробу $\alpha(x)=x^2-2x-3$ є функцією нескінченно малою при $x\to3$. Отже функція $\dfrac{1}{\alpha(x)}=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$ є нескінченно великою, тобто $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{x^2-2x-3}=\infty$. За формулою (1) існує $\lim\limits_{x\to3}\left(x^2+1\right)=3^2+1=10$. Тому за властивостями нескінченно великих $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+1}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to1}\left[\left(x^2+1\right)\cdot\dfrac{1}{x^2-2x-3}\right]=\infty$. $\lrcorner$

49. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$.

$\ulcorner$ При $x=2$ чисельник і знаменник дробу дорівнюють нулю, тобто маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Але розкрити її за правилом 1 немає можливості, оскільки чисельник дробу не є многочленом. Скористаємось основною властивістю дробу і помножимо чисельник та знаменник дробу на вираз $\sqrt{x+7}+3$, який є спряженим до чисельника. Одержимо

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+7}\right)^2-3^2}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+7-9}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}=\frac{1}{\sqrt{2+7}+3}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}.$$

Зауважимо, що при множенні на спряжений вираз, ми розкрили дужки лише в чисельнику, перемноживши взаємно спряжені вирази за допомогою формули скороченого множення $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. У знаменнику ж ми дужки не розкривали, щоб зберегти множник $(x-2)$, на який потрібно скоротити дріб для розкриття невизначеності. ⌋

Розглянутий нами прийом можна узагальнити наступним правилом.

Правило 2. *Для того щоб знайти границю функції, яка є часткою двох ірраціональних функцій, у випадку, коли при $x\to x_0$ чисельник і знаменник прямують до нуля (невизначеність $\frac{0}{0}$), потрібно помножити чисельник та знаменник дробу на вираз спряжений до кожного ірраціонального виразу, скоротити після цього дріб на $(x-x_0)$ і перейти до границі.*

50. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$.

⌈ При $x=0$ чисельник та знаменник дорівнюють нулю. Дійсно $\sqrt{0^2+4}-2=\sqrt{4}-2=2-2=0$, $\sqrt{0^2+9}-3=\sqrt{9}-3=3-3=0$. Тому маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$, зумовлену саме ірраціональними виразами. Скористаємось правилом 2 та помножимо чисельник і знаменник дробу на спряжені вирази відповідно $\sqrt{x^2+4}+2$ і $\sqrt{x^2+9}+3$.

Одержимо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}^{\text{перемножаємо}}\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}{\underbrace{\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}_{\text{перемножаємо}}\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2-2^2}{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2-3^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+4}+2}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2+4-4}{x^2+9-9}\cdot\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+4}+2}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+4}+2}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+4}+2}=\frac{\sqrt{0^2+9}+3}{\sqrt{0^2+4}+2}=\frac{3+3}{2+2}=\frac{3}{2}. \;\lrcorner$$

51. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-1}}$.

$\ulcorner$ Підстановкою у функцію значення $x=1$ переконуємось у тому, що маємо невизначеність $\frac{0}{0}$, а отже, можемо скористатись правилом 2. Помножити чисельник і знаменник дробу потрібно на спряжені вирази як до чисельника так і до знаменника. Маємо

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{\left(\sqrt{3x+1}-2\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-1}\right)}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-1}}{\sqrt{3x+1}+2}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{\left(\sqrt{3x+1}\right)^2-2^2}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{3x-1}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-1}}{\sqrt{3x+1}+2}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{3x+1-4}{x+1-(3x-1)}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-1}}{\sqrt{3x+1}+2}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{3x-3}{-2x+2}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-1}}{\sqrt{3x+1}+2}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{3(x-1)}{-2(x-1)}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-1}}{\sqrt{3x+1}+2}\right]=\frac{3}{-2}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-1}}{\sqrt{3x+1}+2}=$$

$$=-\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+1}+\sqrt{3\cdot1-1}}{\sqrt{3\cdot1+1}+2}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{4}=-\frac{3\sqrt{2}}{4}\,. \quad ┘$$

У розглянутих вище прикладах обчислювалась границя функції при $x\to x_0$. Розглянемо знаходження границь при $x\to\infty$. Очевидно, правило (1) у цьому випадку застосовуватись не може.

52. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2+x-3\right)$.

┌ Використовуючи властивості нескінченно великих, маємо:

$x^2=x\cdot x$ – нескінченно велика при $x\to+\infty$, як добуток нескінченно великих;

$2x^2=2\cdot x^2$ – нескінченно велика при $x\to+\infty$, як добуток функції, що має границю на нескінченно велику;

$2x^2+x$ – нескінченно велика при $x\to+\infty$, як сума двох нескінченно великих;

$2x^2+x-3=\left(2x^2+x\right)-3$ – нескінченно велика при $x\to+\infty$, як сума нескінченно великої та функції, що має границю.

Отже, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2+x-3\right)=\infty$. ┘

53. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4x^2-x\right)$.

┌ Оскільки $4x^2$ та x є нескінченно великими, то маємо випадок невизначеності типу $\infty-\infty$. Розкрити таку невизначеність можна шляхом запису функції $4x^2-x$ у вигляді $4x^2-x=x\left(4x-1\right)$. Одержали добуток двох нескінченно великих, отже

$$\lim_{x\to+\infty}\left(4x^2-x\right)=\infty\,. \quad ┘$$

54. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a_nx^m+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\right)$, $a_i\in R$, $i=0,1,\ldots,n$.

┌ Подаючи функцію $f\left(x\right)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ у вигляді $f\left(x\right)=x\left[x\left(\ldots\left\{\left(a_nx+a_{n-1}\right)+a_{n-2}\right\}+\ldots+a_2\right)+a_1\right]+a_0$ і застосовуючи властивості нескінченно великих, одержуємо:

a_nx – нескінченно велика, як добуток нескінченно великої та функції, що має границю;

$\left(a_nx+a_{n-1}\right)$ – нескінченно велика, як сума нескінченно великої та функції, що має границю;

$x\left(a_n x + a_{n-1}\right)$ – нескінченно велика, як добуток нескінченно великих і т. д.

$x\left[x\left(\ldots\left\{\left(a_n x + a_{n-1}\right) + a_{n-2}\right\} + \ldots + a_2\right) + a_1\right] + a_0$ – нескінченно велика, як сума нескінченно великої $y_1 = x\left[x\left(\ldots\left\{\left(a_n x + a_{n-1}\right) + a_{n-2}\right\} + \ldots + a_2\right) + a_1\right]$ та функції $y_2 = a_0$, що має границю.

Отже, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a_n x^m + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right) = \infty$, тобто при $x \to \infty$ кожен многочлен є нескінченно великою функцією. $\lrcorner$

55. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2 + x - 3}{4x^2 - x}$.

$\ulcorner$ Для обчислення цієї границі не можна застосувати правило (1). Арифметичну властивість про границю частки застосувати також не можна, оскільки не існує границь чисельника та знаменника. Дійсно (див. приклади 53, 54), при $x \to \infty$ чисельник та знаменник нескінченно великі. Тобто, ми маємо невизначеність типу $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Щоб розкрити дану невизначеність, поділимо чисельник та знаменник дробу на x^2 і одержимо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2 + x - 3}{4x^2 - x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2} + \dfrac{x}{x^2} - \dfrac{3}{x^2}}{\dfrac{4x^2}{x^2} - \dfrac{x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2}}{4 - \dfrac{1}{x}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4 - \dfrac{1}{x}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 2 + \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} - \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} 4 - \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}} = \frac{2 + 0 - 0}{4 - 0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

У ході розв’язання скористались тим, що $\dfrac{1}{x}$ та $\dfrac{3}{x^2}$ є нескінченно малими при $x \to \infty$ (див. властивості нескінченно малих). $\lrcorner$

Розглянутий нами щойно прийом можна узагальнити наступним правилом.

Правило 3. *Для обчислення границі частки двох многочленів при* $x \to \infty$ (*невизначеність типу* $\dfrac{\infty}{\infty}$) *потрібно поділити чисельник та знаменник дробу на найвищий степінь змінної, що зустрічається під* *знаком границі, та скористатись тим, що всі функції вигляду* $\frac{a}{x^n}$ $(a \in R,\ n \in N)$ *при* $x \to \infty$ *є нескінченно малими.*

56. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x^2-3x+4}$.

⌈ Оскільки при $x \to \infty$ чисельник та знаменник дробу є нескінченно великими, маємо невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$, для розкриття якої скористаємось правилом 3: поділимо чисельник та знаменник на x^2 – найвищий степінь змінної:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x^2-3x+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{0}{1} = 0 .$$ ⌋

57. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3-3x+1}{x^2+4}$.

⌈ При $x \to \infty$ маємо невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Поділимо чисельник та знаменник на найвищий степінь змінної x^3. Одержимо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-3x+1}{x^2+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}} .$$

Скористатись арифметичною властивістю про границю частки не можна, оскільки границя знаменника дорівнює нулю, тобто функція $f(x) = \frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}$ є нескінченно малою. Але тоді функція $g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}}$ є нескінченно великою. Границя чисельника дорівнює 2. Тому за властивістю нескінченно великих

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}} = \infty .$$ ⌋

Узагальнення правила 3 на складніші випадки розглянемо на наступних прикладах.

58. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2-4}}{2x+3}$.

Γ Поділимо чисельник та знаменник дробу на x:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^2-4}}{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^2-4}}{x}}{\frac{2x}{x}+\frac{3}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^2-4}}{\sqrt[3]{x^3}}}{2+\frac{3}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{x^3+2x^2-4}{x^3}}}{2+\frac{3}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^3}}}{2+\frac{3}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^3}}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x}\right)}=\frac{1}{2}.$$

При обчисленні границі чисельника ми скористались частинним випадком властивості 2°, який можна сформулювати у вигляді наступного ***правила 4***: *при постійному показнику степеня можна переходити до границі в основі степеня за умови, що границя основи степеня існує*, тобто

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^k=\left[\lim_{x\to x_0}f(x)\right]^k.$$

Дійсно,

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^3}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^3}\right)}=\sqrt[3]{\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^3}}=$$

$$=\sqrt[3]{1+0-0}=\sqrt[3]{1}=1.$$ $\lrcorner$

59. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^6+2}+\sqrt[4]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^5+3}-\sqrt{x^4+4}}$.

Γ Поділимо чисельник та знаменник дробу на x^2:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^6+2}+\sqrt[4]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^5+3}-\sqrt{x^4+4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt[3]{x^6+2}}{x^2}+\frac{\sqrt[4]{x^2+1}}{x^2}}{\frac{\sqrt[4]{x^5+3}}{x^2}-\frac{\sqrt{x^4+4}}{x^2}}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{\sqrt[3]{x^6+2}}{\sqrt[3]{x^6}} + \dfrac{\sqrt[4]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^8}}}{\dfrac{\sqrt[4]{x^2+3}}{\sqrt[4]{x^8}} - \dfrac{\sqrt{x^4+4}}{\sqrt{x^4}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{\dfrac{x^6+2}{x^6}} + \sqrt[4]{\dfrac{x^2+1}{x^8}}}{\sqrt[4]{\dfrac{x^5+3}{x^8}} - \sqrt{\dfrac{x^4+4}{x^4}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x^6}} + \sqrt[4]{\dfrac{1}{x^6}+\dfrac{1}{x^8}}}{\sqrt[4]{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{3}{x^8}} - \sqrt{1+\dfrac{4}{x^4}}} = \frac{1+0}{0-1} = -1.$$

Дійсно, за правилом 4

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{1+\frac{2}{x^6}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x^6}\right)} = \sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty} 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^6}} = \sqrt[3]{1+0} = 1;$$

аналогічно,

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[4]{\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^8}} = 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[4]{\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^8}} = 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{4}{x^4}} = 1. \quad \lrcorner$$

60. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x}\right)$.

$\ulcorner$ При $x\to+\infty$ маємо невизначеність типу $(\infty-\infty)$. Помножимо та поділимо функцію, що стоїть під знаком границі, на вираз $\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x}\right)$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x+4}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+4-x}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}} = 0.$$

Скористались тим, що при $x\to+\infty$ кожна з функцій $\sqrt{x+4}$ та $\sqrt{x}$ є нескінченно великою. Тому їх сума $\sqrt{x+4}+\sqrt{x}$ також є нескінченно великою, а обернена до неї функція $\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}}$ є нескінченно малою. ⌋

Перейдемо до обчислення границь пов'язаних з першою визначною границею:

(I) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 .$$

61. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

⌈ При $x\to 0$ чисельник та знаменник є нескінченно малими. Тому маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Обчислимо цю границю двома способами.

1) Використовуючи (I) та властивості границь 1º б), 2º, одержуємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\sin 3x}{3x}=3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3 .$$

2) Інший спосіб розв'язування цієї вправи ґрунтується на заміні змінної під знаком границі (див. властивість 2º).

Нехай $3x=y$. Тоді $y\to 0$ при $x\to 0$. Враховуючи, що $x=\dfrac{y}{3}$, маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{\frac{y}{3}}=\lim_{y\to 0}\frac{3\sin y}{y}=3\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=3\cdot 1=3 .$$

Ми скористались границею (I) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=1$, яка не залежить від позначення змінної, тобто $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=1$. ⌋

62. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

⌈ Зробимо заміну змінної $y=\arcsin x$, звідки $x=\sin y$ і $y\to 0$ при $x\to 0$. Тому, з урахуванням (I) та арифметичних властивостей границь, одержимо

$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{y\to0}\frac{y}{\sin y}=\lim_{y\to0}\frac{1}{\frac{\sin y}{y}}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to0}\frac{\sin y}{y}}=\frac{1}{1}=1.\ \lrcorner$$

63. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}$.

$\ulcorner$ Скористаємось тим, що $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$ та границею (I):

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot1=1.$$

Ми скористались властивостями 1° границь та правилом (1), згідно з яким $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to0}\cos x}=\frac{1}{\cos 0}=\frac{1}{1}=1$. $\lrcorner$

64. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{\sin^2 3x}$.

$\ulcorner$ Щоб прийти до границі (I), слід помножити чисельник та знаменник дробу на 9 і скористатись правилом 4. Матимемо:

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sin^2 3x}=\lim_{x\to0}\frac{9x^2}{9\sin^2 3x}=\frac{1}{9}\cdot\lim_{x\to0}\frac{(3x)^2}{(\sin 3x)^2}=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2}=\frac{1}{9\cdot\left[\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}\right]^2}=\frac{1}{9\cdot1^2}=\frac{1}{9}.\ \lrcorner$$

З розглянутих прикладів випливають наступні узагальнення границі (I):

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1;\quad \lim_{x\to0}\frac{\sin^n x}{x^n}=1;\quad \lim_{x\to0}\frac{\sin kx}{kx}=1 \text{ тощо.}$$

65. а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\operatorname{tg}2x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\operatorname{tg}3x}{1-\cos 4x}$.

$\ulcorner$ а) Аналогічно попередньому

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\operatorname{tg}2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{5x}{2x}\cdot\cos 2x\right]=$$

$$=\frac{5}{2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\lim_{x\to0}\cos 2x=\frac{5}{2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}}\cdot\cos 0=$$

$$=\frac{5}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{1}\cdot1=\frac{5}{2}.$$

б) Використаємо формули $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$ і $\mathrm{tg}\,3x=\frac{\sin 3x}{\cos 3x}$ та перейдемо від границі добутку до добутку границь:

$$\lim_{x\to0}\frac{x\,\mathrm{tg}\,3x}{1-\cos 4x}=\lim_{x\to0}\frac{x\sin 3x}{2\sin^2\frac{4x}{2}\cdot\cos 3x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{(2x)^2}{\sin^2 2x}\cdot\frac{x\cdot3x}{(2x)^2}\cdot\frac{1}{\cos 3x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{3x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to0}\left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)^2\cdot\lim_{x\to0}\frac{3}{4\cos 3x}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}.\ \lrcorner$$

66. $\lim\limits_{x\to0}\left(x\sin 2x\,\mathrm{ctg}^2\,3x\right).$

⌐ У вправах 61 – 65 виникала невизначеність типу $\frac{0}{0}$. В даному випадку маємо невизначеність $0\cdot\infty$, оскільки $\lim\limits_{x\to0}\sin 2x=0$, $\lim\limits_{x\to0}\mathrm{ctg}^2\,3x=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos^2 3x}{\sin^2 3x}=\infty$. Розписуючи $\mathrm{ctg}\,3x$, одержимо:

$$\lim_{x\to0}x\sin 2x\,\mathrm{ctg}^2\,3x=\lim_{x\to0}\frac{x\sin 2x\cos^2 3x}{\sin^2 3x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{(3x)^2}{\sin^2 3x}\frac{\sin 2x}{2x}\frac{x\cdot2x\cos^2 3x}{(3x)^2}\right]=\lim_{x\to0}\frac{(3x)^2}{\sin^2 3x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{2\cos^2 3x}{9}=$$

$$=1\cdot1\cdot\frac{2}{9}=\frac{2}{9}.\ \lrcorner$$

67. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos 3x}.$

⌐ Перейдемо до нової змінної y, поклавши $y=x-\frac{\pi}{2}$. Тоді

$y \to 0$ при $x \to \frac{\pi}{2}$. Враховуючи, що $x = y + \frac{\pi}{2}$, одержимо:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(3y+\frac{3\pi}{2}\right)} = \lim_{y\to 0} \frac{-\sin y}{\sin 3y} = -\lim_{y\to 0}\left[\frac{\sin y}{y}\cdot\frac{3y}{\sin 3y}\cdot\frac{y}{3y}\right] =$$

$$= -\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{3y}{\sin 3y}\cdot\frac{1}{3} = -1\cdot 1\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

В ході розв'язання використали формули зведення $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$ та $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = \sin\alpha$. ⌟

68. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

⌜ При $x \to 1$ маємо невизначеність $0\cdot\infty$. Покладемо $y = 1 - x$. Звідки $x = 1 - y$ та $y \to 0$ при $x \to 1$. Тому одержимо

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \lim_{y\to 0} y\operatorname{tg}\frac{\pi(1-y)}{2} = \lim_{y\to 0} y\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}y\right) = \lim_{y\to 0} y\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}y =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{y\cos\frac{\pi}{2}y}{\sin\frac{\pi}{2}y} = \lim_{y\to 0}\left[\frac{\frac{\pi}{2}y}{\sin\frac{\pi}{2}y}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{2}y}{\frac{\pi}{2}}\right] = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}y}{\sin\frac{\pi}{2}y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\cos\frac{\pi}{2}y}{\frac{\pi}{2}} = 1\cdot\frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

В ході розв'язання скористались формулами $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha$,

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, властивостями границь 1° та границею (I). ⌟

69. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x - \sin\beta x}{x}$ $(\alpha \ne \beta)$.

⌜ Скористаємось властивостями границь:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x-\sin\beta x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{\sin\beta x}{x} = \alpha\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x} - \beta\lim_{x\to 0}\frac{\sin\beta x}{\beta x} =$$

$= \alpha\cdot 1 - \beta\cdot 1 = \alpha - \beta$. ⌟

Зауважимо, що при обчисленні границь від тригонометричних функцій не завжди виникає необхідність використовувати першу визначну границю. Переконаємось у цьому на наступних прикладах.

70. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\cos 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}$.

$\ulcorner$ а) Оскільки значення $x=0$ належить області визначення елементарної функції $y=\dfrac{\sin 3x}{\cos 2x}$, скористаємося правилом (1): $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\cos 2x}=\dfrac{\sin 0}{\cos 0}=\dfrac{0}{1}=0$.

б) З графіка функції $y=\cos x$ (рис. 4) робимо висновок, що при $x\to\infty$ границя функції $\cos x$ не існує.

в) Подамо функцію $y=\dfrac{\cos x}{x}$ у вигляді добутку $y=\cos x\cdot\dfrac{1}{x}$. Скористатись властивістю границь і перейти від границі добутку до добутку границь не можна, оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ не існує (див. попередній приклад). Але, оскільки функція $y=\cos x$ обмежена ($|\cos x|\le 1,\ x\in R$), а функція $y=\dfrac{1}{x}$ – нескінченно мала при $x\to\infty$, то за властивістю 2) нескінченно малих функція $y=\cos x\cdot\dfrac{1}{x}$ є нескінченно малою при $x\to\infty$. Отже, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0$. $\lrcorner$

Розглянемо обчислення границь, пов'язаних з другою визначною границею

(II.1) $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$$

(II.2) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Записи другої визначної границі у вигляді (II.1) та (II.2) еквівалентні. У цьому можна переконатись, здійснивши підстановку $\dfrac{1}{x}=y$ у кожній з цих границь. При розв'язанні вправ, пов'язаних з другою визначною границею, нам знадобиться наступна формула (наслідок формули (2)):

якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = a > 0$ *та* $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)$, *то*

$$\lim_{x\to x_0}\left[u(x)\right]^{v(x)} = \left[\lim_{x\to x_0} u(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)}, \tag{3}$$

де під x_0 *розуміємо число або один із символів* ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Розглянемо спочатку прості вправи, пов'язані з застосуванням формули (3).

71. а) $\lim\limits_{x\to 1} 2^{\frac{3x}{x+2}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} 3^{\frac{2x}{x+3}}$.

⌈ а) $\lim\limits_{x\to 1} 2^{\frac{3x}{x+2}} = \left[\lim\limits_{x\to 1} 2\right]^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x}{x+2}} = 2^{\frac{3\cdot 1}{1+2}} = 2^{\frac{3}{3}} = 2$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty} 3^{\frac{2x}{x+3}} = \left[\lim\limits_{x\to\infty} 3\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x+3}} = 3^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{1+\frac{3}{x}}} = 3^{\frac{2}{1}} = 3^2 = 9$. ⌋

72. $\lim\limits_{x\to 1} (3-x)^{\frac{2x}{x+3}}$.

⌈ $\lim\limits_{x\to 1} (3-x)^{\frac{2x}{x+3}} = \left[\lim\limits_{x\to 1}(3-x)\right]^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x}{x+3}} = [3-1]^{\frac{2\cdot 1}{1+3}} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. ⌋

73. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)^{\frac{2x+5}{x+1}}$.

⌈ $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)^{\frac{2x+5}{x+1}} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+5}{x+1}} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}\right)\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{5}{x}}{1+\frac{1}{x}}} =$$

$$= \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{2}{1}} = 2^2 = 4.$$ ⌋

74. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}}$.

⌈ Спроба знайти дану границю з використанням формули (3) приводить нас до невизначеності типу 1^∞. Дійсно, $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3x} = \infty$.

Тому зробимо підстановку $3x = y$, при якій $y \to 0$, якщо $x \to 0$. Використовуючи границю (II.1), одержимо

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e. \quad \rfloor$$

75. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1}{2}}$.

$\ulcorner$ Оскільки при $x \to \infty$ основа $\left(1+\dfrac{2}{3x+1}\right) \to 1$, а показник степеня $\dfrac{3x+1}{2} \to \infty$, то маємо невизначеність 1^{∞}. Проведемо заміну змінної. Нехай $\dfrac{3x+1}{2} = y$, звідки $\dfrac{2}{3x+1} = \dfrac{1}{y}$ та $y \to \infty$ при $x \to \infty$. Одержимо

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1}{2}} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e.$$

Ми використали другу визначну границю у вигляді (II. 2). $\rfloor$

У подальшому не будемо щоразу робити заміну змінної у подібних випадках, а розумітимемо, що формули (II.1) та (II.2) виконуються і у випадку, коли у них під x розуміти довільну функцію, яка прямує відповідно до нуля чи до нескінченності при $x \to x_0$, тобто

$$\lim_{x\to x_0}\left(1+f(x)\right)^{\frac{1}{f(x)}} = e \quad \text{(II.1')} \quad \text{та} \quad \lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e \quad \text{(II.2')}.$$

Ці узагальнення формул (II.1) та (II.2) дістаємо на основі границі суперпозиції функцій (властивість 2°).

Наприклад, будемо писати

$\lim\limits_{x\to 1}\left(1+3(x-1)\right)^{\frac{1}{3(x-1)}} = e$ (оскільки $3(x-1) \to 0$ при $x \to 1$);

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{x^2+4x+5}{2x-3}}\right)^{\frac{x^2+4x+5}{2x-3}} = e$$

(оскільки $\dfrac{x^2+4x+5}{2x-3}=\dfrac{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}}{\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}}\to\infty$ при $x\to\infty$) тощо.

76. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$.

⌈ Як і раніше, маємо невизначеність 1^∞. Перепишемо функцію, що стоїть під знаком границі так, щоб прийти до (II.2') і скористаємось формулою (2):

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{-x}\right)^{\frac{-x}{2}\cdot\frac{2}{-x}\cdot x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{-x}\right)^{\frac{-x}{2}\cdot(-2)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{-x}\right)^{\frac{-x}{2}}\right]^{-2}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{-x}{2}}\right)^{\frac{-x}{2}}\right]^{-2}=e^{-2}.$$

Для побудови потрібного показника $\dfrac{-x}{2}$ ми помножили і поділили на нього показник функції x. Такий прийом у подальшому будемо використовувати часто. ⌋

77. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x-3}$.

⌈ Знову маємо невизначеність 1^∞. Виділимо в основі цілу частину $\dfrac{2x+3}{2x+1}=\dfrac{(2x+1)+2}{2x+1}=1+\dfrac{2}{2x+1}$. Зауважимо, що для виділення цілої частини можна також скористатись діленням многочлена на многочлен. Але у випадку невизначеності 1^∞ (коли відомо, що основа прямує до 1) зручним є формальний спосіб, який полягає у додаванні та відніманні 1. Проілюструємо його на нашому прикладі:

$$\frac{2x+3}{2x+1}=1+\frac{2x+3}{2x+1}-1=1+\left(\frac{2x+3}{2x+1}-1\right)=1+\frac{2x+3-(2x+1)}{2x+1}=1+\frac{2}{2x+1}.$$

Отже, для того щоб можна було скористатись формулою (II.2'), показником степеня має бути вираз $\dfrac{2x+1}{2}$ (обернений до $\dfrac{2}{2x+1}$).

Тому помножимо і поділимо показник $x-3$ на $\dfrac{2x+1}{2}$ (від цього вираз $x-3$ не зміниться). Використовуючи формулу (3), одержимо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}\cdot\frac{2}{2x+1}\cdot(x-3)}=$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-6}{2x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{6}{x}}{2+\frac{1}{x}}}=e^{1}=e\,.$$

При знаходженні границі основи скористались формулою (II.2'), а при обчисленні границі показника – правилом 3.

Розглянемо інший спосіб розв’язання цієї вправи. Поділимо чисельник та знаменник дробу на $2x$ і одержимо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{2x}}{1+\frac{1}{2x}}\right)^{x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{x-3}}{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x-3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3}}{\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{3}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{\frac{2x}{3}\cdot\frac{3}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{3}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x\cdot\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{\frac{2x}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}\cdot 1}{1\cdot\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}}=e^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}=e^{1}=e\,.$$

Оскільки перший спосіб є більш стандартним, його ми і будемо використовувати у подальшому. ⌋

78. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x^2-2x+5}\right)^{x-1}$.

⌈ Переконуємось, що при $x\to\infty$ основа $\dfrac{x^2+3x+1}{x^2-2x+5}\to 1$, а показник $(x-1)\to\infty$. Тому виділення цілої частини в основі можна провести у вигляді $\frac{x^2+3x+1}{x^2-2x+5}=1+\left(\frac{x^2+3x+1}{x^2-2x+5}-1\right)=$

$=1+\frac{x^2+3x+1-\left(x^2-2x+5\right)}{x^2-2x+5}=1+\frac{5x-4}{x^2-2x+5}$. Перетворимо функцію так, щоб можна було скористатись формулою (ІІ.2'). Використовуючи формулу (3), одержимо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x^2-2x+5}\right)^{x-1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5x-4}{x^2-2x+5}\right)^{\frac{x^2-2x+5}{5x-4}}\right]^{\frac{(5x-4)(x-1)}{x^2-2x+5}}=$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5x-4}{x^2-2x+5}\right)^{\frac{x^2-2x+5}{5x-4}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-9x+4}{x^2-2x+5}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5-\frac{9}{x}+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}}=e^5. \quad \lrcorner$$

79. $\lim\limits_{x\to3}\left(2x-5\right)^{\frac{x}{x^2-9}}$.

$\ulcorner$ При $x\to3$: $\left(2x-5\right)\to1$, $\frac{x}{x^2-9}\to\infty$. Тому подамо основу у вигляді $1+f\left(x\right)$:

$$2x-5=1+\left(2x-5\right)-1=1+\left(2x-5-1\right)=1+\left(2x-6\right)=1+2\left(x-3\right).$$

Зауважимо, що $2\left(x-3\right)\to0$ при $x\to3$. Перетворимо функцію під знаком границі так, щоб можна було використати формулу (ІІ.1'). Враховуючи формулу (3), одержимо:

$$\lim_{x\to3}\left(2x-5\right)^{\frac{x}{x^2-9}}=\lim_{x\to3}\left[\left(1+2\left(x-3\right)\right)^{\frac{1}{2(x-3)}}\right]^{\frac{2(x-3)\cdot x}{x^2-9}}=$$

$$=\left[\lim_{x\to3}\left(1+2\left(x-3\right)\right)^{\frac{1}{2(x-3)}}\right]^{\lim\limits_{x\to3}\frac{2x}{x+3}}=e^{\frac{2\cdot3}{3+3}}=e^1=e. \quad \lrcorner$$

80. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+1\right)\left[\ln\left(3x-2\right)-\ln\left(3x+1\right)\right]$.

$\ulcorner$ Скориставшись властивостями логарифма $\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}$ та $k\ln a=\ln a^k$, одержуємо

$$(2x+1)\left[\ln(3x-2)-\ln(3x+1)\right]=(2x+1)\ln\frac{3x-2}{3x+1}=\ln\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x+1}.$$

Скористаємось наслідком формули (2):

якщо існує границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a>0$*, то*

$$\lim_{x\to x_0}\left[\log_b f(x)\right]=\log_b\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right].$$

Одержимо

$$\lim_{x\to+\infty}(2x+1)\left[\ln(3x-2)-\ln(3x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x+1}\right]=$$

$$=\ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x+1}\right].$$

Для закінчення розв'язання слід виділити цілу частину в основі $\frac{3x-2}{3x+1}=\frac{(3x+1)-3}{3x+1}=1+\frac{-3}{3x+1}$ і обчислити

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{-3}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1}{-3}}\right]^{\frac{-3(2x+1)}{3x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-6x-3}{3x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-6-\frac{3}{x}}{3+\frac{1}{x}}}=e^{-2}.$$

Тому

$$\ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x+1}\right]=\ln e^{-2}=-2\cdot\ln e=-2\cdot1=-2.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)\left[\ln(3x-2)-\ln(3x+1)\right]=-2$. ⌋

81. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}3x}$.

⌈ При $x\to0$: $\cos x\to1$, $\operatorname{ctg}^2 3x\to\infty$. Тому перетворимо функцію під знаком границі так, щоб можна було скористатись формулою (II.1'):

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 3x}=\lim_{x\to0}\left(1+(\cos x-1)\right)^{\operatorname{ctg}^2 3x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\frac{(\cos x-1)\cos^2 3x}{\sin^2 3x}}=$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\left[1+\left(\cos x-1\right)\right]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-(1-\cos x)\cdot\cos^2 3x}{\sin^2 3x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos^2 3x}{\sin^2 3x}}=$$

$$=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{(3x)^2}{\sin^2 3x}\cdot\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2\cos^2 3x}{(3x)^2}\right]}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{\sin^2 3x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2 3x}{18}}=e^{-1\cdot 1\cdot\frac{1}{18}}=e^{-\frac{1}{18}}.$$

Ми використали те, що $\left(\cos x-1\right)\to 0$ при $x\to 0$, відому формулу тригонометрії $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$ та обидві визначні границі. ⌋

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

82. За означенням границі послідовності показати, що послідовність

$$\frac{2}{5};\ \frac{3}{7};\ \frac{4}{9};\ldots;\frac{n+1}{2n+3};\ldots$$

має границею число $\dfrac{1}{2}$.

83. За допомогою властивості (1) знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+1}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\left(2x+5\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+x}}{1+\sqrt{2-x}}$.

84. Знайти границі, використовуючи правило 1:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{3x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+x-12}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+x-6}{x^2+x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x^3-3}{x^3+x-2}$.

85. Використовуючи властивості нескінченно малих та нескінченно великих, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2+2x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+3}{x^2+3x+2}$.

86. Знайти границі за допомогою правила 2:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x-2}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$;

в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{12+x}-3}{1-\sqrt{x+4}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{2-\sqrt{x^2+4}}$.

87. Використовуючи властивості нескінченно великих, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-x+4\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-x\right)$.

За допомогою правила 3 знайти границі:

88. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x^2+3x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x+5}{2x-3}$.

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+4}{x^2+x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-x^2+2x}{x^3+x^2+4}$.

89. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3+1}{x^2+2}-2x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+5}-\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[3]{x^2+3}+x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[7]{x^5+2}-\sqrt[3]{x^4-3}}{\sqrt[3]{x^9+1}}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+3}-\sqrt{x^3-3}\right)$.

За допомогою першої та другої визначних границь знайти границі:

90. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}$. **91.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{tg} ax}$.

92. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\cos x-\cos^5 x}$. **93.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$.

94. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\operatorname{arctg} 3x}$. **95.** $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} 7x$.

96. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2}$. **97.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\pi-2x\right)\operatorname{tg} x$.

98. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos 5x}{1-\cos 4x}$. **99.** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 2x}{\sin 7x}$.

100. $\lim\limits_{x\to 3}2^{\frac{x-3}{2}}$. **101.** $\lim\limits_{x\to+\infty}2^{\frac{3x-1}{x+2}}$.

102. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}$. **103.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x+5}\right)^{2x+5}$.

104. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$. **105.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1+2x}\right)^{x}$.

106. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{x}$. **107.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3x\right)^{\frac{4}{x}}$.

108. $\lim\limits_{x\to 1}(7x-6)^{\frac{1}{x-1}}$.

109. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{1-x^2}$.

110. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{4x}{2-x}}$.

111. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-2)\left[\ln(2x-1)-\ln(2x+1)\right]$.

112. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x^2-3\right)\left[\ln\left(x^2+4\right)-\ln\left(x^2-1\right)\right]$.

113. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

114. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\operatorname{tg}x)^{\frac{6}{x}}$.

115. $\lim\limits_{x\to 1}(1+5\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

116. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

117. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

Відповіді:

83. а) $\frac{1}{2}$; б) 11; в) 1.

84. а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{5}{7}$; в) $\frac{7}{3}$; г) $\frac{5}{2}$.

85. а) 0; б) ∞.

86. а) 2; б) $\frac{1}{32}$; в) $-\frac{1}{3}$; г) -2.

87. а) ∞; б) ∞.

88. а) 0; б) ∞; в) 2; г) 3.

89. а) 0; б) 1; в) 0; г) 0.

90. 7.

91. $\frac{1}{a}$.

92. $\frac{1}{2}$.

93. $\frac{1}{6}$.

94. $\frac{2}{3}$.

95. $\frac{1}{7}$.

96. $\frac{1}{2}$.

97. 2.

98. $-\frac{25}{16}$.

99. $\frac{2}{7}$.

100. 1.

101. 8.

102. e.

103. e.

104. e^3.

105. $\sqrt{e}$.

106. e^{-5}.

107. e^{12}.

108. e^{7}. **109.** e^{-2}. **110.** e^{-16}.
111. -3. **112.** 10. **113.** e^{-1}.
114. e^{12}. **115.** e^{5}. **116.** $e^{\operatorname{ctg} a}$.
117. $e^{-\frac{1}{2}}$.

4. Порівняння нескінченно малих

Нехай $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ – нескінченно малі при $x \to x_0$.

1. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то кажуть, що $\alpha(x)$ є нескінченно малою *вищого порядку* ніж $\beta(x)$ і записують $\alpha=o(\beta)$.

2. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A$, де A – відмінне від нуля число, то кажуть, що $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ – нескінченно малі *одного порядку*. Зокрема, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то нескінченно малі $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називають *еквівалентними* і записують $\alpha \sim \beta$.

3. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$, то кажуть, що $\alpha(x)$ є нескінченно малою *нижчого порядку* ніж $\beta(x)$. Але це означає, що $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$, тобто $\beta=o(\alpha)$.

4. Якщо $\left[\alpha(x)\right]^k$ та $\beta(x)$ – нескінченно малі одного порядку, то кажуть, що нескінченно мала $\beta(x)$ має *порядок* k у порівнянні з нескінченно малою $\alpha(x)$.

Властивості нескінченно малих:

1) Добуток двох нескінченно малих є нескінченною малою вищого порядку у порівнянні з кожним співмножником, тобто, якщо $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – нескінченно малі та $\gamma(x)=\alpha(x)\cdot\beta(x)$, то $\gamma=o(\alpha)$, $\gamma=o(\beta)$.

2) Нескінченно малі $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їх різниця $\alpha(x)-\beta(x)=\gamma(x)$ є нескінченно малою вищого порядку у порівнянні з $\alpha(x)$ та $\beta(x)$, тобто якщо $\gamma=o(\alpha)$, $\gamma=o(\beta)$, то $\alpha \sim \beta$.

3) Границя відношення двох нескінченно малих не зміниться, якщо одну з них або обидві замінити еквівалентними їм нескінченно малими.

Корисно **пам'ятати** наступні основні пари еквівалентних при $x\to 0$:

$\sin x \sim x$, $\operatorname{tg} x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $\operatorname{arctg} x \sim x$; $\ln(1+x) \sim x$, $e^x-1 \sim x$.

118. Порівняти нескінченно малі $\alpha=2x^2+x^3$ та $\beta=3x^2+x^5$ при $x\to 0$.

$\ulcorner$ Розглянемо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+x^3}{3x^2+x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+x}{3+x^3}=\dfrac{2}{3}$. Оскільки границя відношення є відмінним від нуля числом, то функції α та β – нескінченно малі одного порядку. $\lrcorner$

119. Порівняти нескінченно малі $\alpha=t\operatorname{tg}^2 t$ та $\beta=t\sin t$ при $t\to 0$.

$\ulcorner$ Розглянемо

$$\lim_{t\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{t\to 0}\frac{t\operatorname{tg}^2 t}{t\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t\cdot\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\cos^2 t}=\frac{\lim\limits_{t\to 0}\sin t}{\lim\limits_{t\to 0}\cos^2 t}=\frac{0}{1}=0.$$

Отже, α є нескінченно малою вищого порядку ніж β, тобто $\alpha=o(\beta)$. $\lrcorner$

120. Визначити порядок нескінченно малої $\alpha(x)=1-\cos x$ у порівнянні з нескінченно малою x.

$\ulcorner$ Оскільки, використовуючи першу визначну границю,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{1}{2^2}\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2},$$

то $\alpha(x)=1-\cos x$ є нескінченно малою другого порядку у порівнянні з x. ⌋

121. Визначити порядок нескінченно малої $\alpha(x)=\operatorname{tg} x-\sin x$ у порівнянні з нескінченно малою x.

⌈ На відміну від попереднього прикладу, де ми зробили припущення про порядок нескінченно малої, враховуючи вигляд першої визначної границі, зробити подібне припущення в цій вправі не можна. Тому будемо вважати, що порядок малості цієї функції дорівнює k і знайдемо таке k, щоб границя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^k}$ дорівнювала відмінному від нуля числу. Одержимо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x\cos x}{x^k}=$$

$$=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\ 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^k}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{2\cdot x\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^k}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^k}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{k-3}}.$$

Очевидно, що лише при $k=3$ границя скінченна і відмінна від нуля, а саме, дорівнює $\frac{1}{2}$. Тому функція $\alpha(x)=\operatorname{tg} x-\sin x$ – нескінченно мала третього порядку малості у порівнянні з x. ⌋

Зауважимо, що основні пари еквівалентних нескінченно малих (ст. 159) легко узагальнюються. Зокрема, при $x\to 0$:

$\sin kx\sim kx$;	$\sin^n x\sim x^n$;	$\sin^n kx\sim (kx)^n$;
$\operatorname{tg} kx\sim kx$;	$\operatorname{tg}^n x\sim x^n$;	$\operatorname{tg}^n kx\sim (kx)^n$;
$\arcsin kx\sim kx$;	$\arcsin^n x\sim x^n$;	$\arcsin^n kx\sim (kx)^n$;
$\operatorname{arctg} kx\sim kx$;	$\operatorname{arctg}^n x\sim x^n$;	$\operatorname{arctg}^n kx\sim (kx)^n$;
$\ln(1+kx)\sim kx$;	$\ln^n(1+x)\sim x^n$;	$\ln^n(1+kx)\sim (kx)^n$;

$e^{kx}-1 \sim kx$; $\qquad \left(e^{x}-1\right)^{n} \sim x^{n}$; $\qquad \left(e^{kx}-1\right)^{n} \sim (kx)^{n}$.

Це дає нам можливість з використанням властивості 3) (ст. 159) суттєво спростити розв'язання вправ, пов'язаних з визначними границями.

Повернемось, наприклад, до розв'язання вправи 65 а):

⌐ Оскільки $\sin 5x \sim 5x$, $\operatorname{tg} 2x \sim 2x$ при $x \to 0$, то маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x}=\frac{5}{2}. \quad ┘$$

Наведемо розв'язання вправи 65 б) з використанням вказаної властивості:

$$⌐ \lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{tg} 3x}{1-\cos 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{tg} 3x}{2\sin^{2} 2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 3x}{(2x)^{2}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3x^{2}}{4x^{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}.$$

Ми скористались еквівалентностями: $\operatorname{tg} 3x \sim 3x$; $\sin^{2} 2x \sim (2x)^{2}$. ┘

Цей прийом зручно використовувати при порівнянні нескінченно малих.

122. Порівняти нескінченно малі $\alpha=\ln(1+x\sin x)$ та $\beta=\operatorname{tg} x^{2}$ при $x \to 0$.

⌐ Розглянемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x\sin x)}{\operatorname{tg} x^{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x^{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Ми замінили чисельник та знаменник дробу еквівалентними нескінченно малими: $\ln(1+x\sin x) \sim x\sin x$, $\operatorname{tg} x^{2} \sim x^{2}$. Оскільки границя дорівнює одиниці, то нескінченно малі α та β еквівалентні. ┘

123. Порівняти нескінченно малі $\alpha=a^{x}-1$ та $\beta=x\ln a$ при $x \to 0$.

⌐ Відомо, що $e^{kx}-1 \sim kx$, якщо $x \to 0$. У нашому випадку $\alpha=a^{x}-1=\left(e^{\ln a}\right)^{x}-1=e^{x\ln a}-1 \sim (x\ln a)$. Тобто нескінченно малі α та β еквівалентні. ┘

124. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{x^5+x^3+x}$.

$\ulcorner$ Скориставшись еквівалентністю $\operatorname{tg}2x \sim 2x$ при $x\to 0$, одержимо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{x^5+x^3+x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x^5+x^3+x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x^4+x^2+1}=2. \quad \lrcorner$$

125. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\left(1+x-3x^2+2x^3\right)}{\ln\left(1+4x-5x^2+x^3\right)}$.

$\ulcorner$ При $x\to 1$ функції $x-3x^2+2x^3$ та $4x-5x^2-x^3$ є нескінченно малими. Тому, використовуючи еквівалентність $\ln\left(1+t\right)\sim t \quad \left(t\to 0\right)$, маємо

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(1+x-3x^2+2x^3\right)}{\ln\left(1+4x-5x^2+x^3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-3x^2+2x^3}{4x-5x^2+x^3}=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+1}{x^2-5x+4}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x-1\right)\left(2x-1\right)}{\left(x-1\right)\left(x-4\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{x-4}=\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}. \quad \lrcorner$$

<u>Вправи для самостійного розв’язання</u>

126. Порівняти нескінченно малі $\alpha=3x^3+x$ та $\beta=x^4-x^3+2x^2$ при $x\to 0$.

127. Порівняти нескінченно малі $\alpha=t\ln\left(1+t\right)$ та $\beta=t\sin t$ при $t\to 0$.

128. Визначити порядок нескінченно малої $y=xe^x$ у порівнянні з нескінченно малою x.

129. Визначити порядок нескінченно малої $y=\sqrt{\sin 2x}$ у порівнянні з нескінченно малою x.

130. Порівняти нескінченно малі $\alpha=x^2\sin^2 x$ та $\beta=x\operatorname{tg}x$, якщо $x\to 0$.

Знайти границі, використовуючи властивість 3) нескінченно малих.

131. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{\operatorname{tg}2x}$.

132. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{\ln^2\left(1+3x\right)}$.

133. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\ln(1-x)}$. **134.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1-4x)}{e^{2x}-1}$.

135. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin\left(e^{x-1}-1\right)}{\ln x}$.

Відповіді.

126. $\beta = o(\alpha)$. **127.** $\alpha \sim \beta$. **128.** 1. **129.** $\dfrac{1}{2}$.

130. $\alpha = o(\beta)$. **131.** $\dfrac{3}{4}$. **132.** $\dfrac{4}{9}$. **133.** -1.

134. -2. **135.** 1.

5. Неперервність функції

Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0, якщо

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

тобто границя функції у точці співпадає зі значенням функції в цій точці.

Якщо позначити $x - x_0 = \Delta x$ (*приріст аргументу*) та $f(x) - f(x_0) = \Delta f(x)$ (*приріст функції*), то умову неперервності можна записати у вигляді

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Якщо функція неперервна в кожній точці інтервалу (відрізка), то вона називається *неперервною на* цьому *інтервалі* (*відрізку*).

Якщо функція не є неперервною у точці x_0, то її називають *розривною* у цій точці, а саму точку x_0 називають *точкою розриву*.

Нехай x_0 – точка розриву функції $f(x)$. Якщо існують скінченні односторонні границі $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ та $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$, то x_0 називають точкою розриву *першого роду* ($x \to x_0 - 0$ означає, що $x \to x_0$ і $x < x_0$; $x \to x_0 + 0$ означає, що $x \to x_0$ і $x > x_0$).

Точки розриву першого роду поділяють на точки *усувного* розриву (коли $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$) та точки *неусувного* розриву або точки стрибка (коли $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$). *Стрибком* функції в точці x_0 у випадку неусувного розриву називають різницю $f(x_0+0)-f(x_0-0)$.

Зауважимо, що існування границі функції $f(x)$ в точці x_0 рівносильне умові $f(x_0-0)=f(x_0+0)$.

Точки розриву, які не є точками розриву першого роду, називають точками розриву *другого роду*.

Сума, різниця та добуток скінченного числа неперервних функцій є неперервною функцією. Частка двох неперервних функцій є неперервною функцією у тих точках, де знаменник не дорівнює нулю.

З означення неперервності функції в точці та властивостей границь випливає, що кожна елементарна функція неперервна у довільній точці своєї області визначення. Цей факт будемо використовувати при дослідженні функцій на неперервність.

136. Довести, що при $x=3$ функція $y=\dfrac{x+1}{x-3}$ має розрив та встановити його характер.

⌈ При $x=3$ функція має розрив, оскільки це значення не належить її області визначення. З'ясуємо характер розриву. Обчислимо: $\lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{x+1}{x-3}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{x+1}{x-3}=+\infty$. Отже, функція при $x\to 3$ не має скінченних односторонніх границь (і не визначена у цій точці). Тому $x=3$ є точкою розриву другого роду. ⌋

137. Дослідити функцію $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2}$ на неперервність.

⌈ Функція $y=\operatorname{arctg}t$ є основною елементарною функцією з областю визначення $t\in(-\infty,+\infty)$. Функція $t=\dfrac{1}{z}=z^{-1}$ також елементарна і визначена при $z\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, тобто $z\neq 0$. Але функція $z=x-2$ також елементарна і визначена при $x\in(-\infty,+\infty)$. Тобто єдиною точкою, що не належить області визначення функції $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2}$, є точка $x=2$. Тому $x=2$ є точкою розриву.

З'ясуємо характер цього розриву. При $x\to 2-0$ маємо $\dfrac{1}{x-2}\to-\infty$. Звідси $\lim\limits_{x\to 2-0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2}=-\dfrac{\pi}{2}$. При $x\to 2+0$ маємо

$\dfrac{1}{x-2} \to +\infty$. Звідси $\lim\limits_{x\to 2+0} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2} = \dfrac{\pi}{2}$. Односторонні границі скінченні, але не рівні. Тому $x=2$ є точкою неусувного розриву першого роду зі стрибком $f(2+0)-f(2-0)=\dfrac{\pi}{2}-\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi$.

Ми скористались графіком функції $y=\operatorname{arctg}x$ (рис. 5) для встановлення того, що $\operatorname{arctg}x \to \dfrac{\pi}{2}$ при $x\to+\infty$ та $\operatorname{arctg}x\to-\dfrac{\pi}{2}$ при $x\to-\infty$. ⌋

138. З'ясувати характер розриву функції $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ в точці $x=2$.

⌈ При $x=2$ функція не визначена. Оскільки $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x+2)=4$, то функція y має в точці $x=2$ усувний розрив. ⌋

139. Дослідити на неперервність функцію $y=2^{\frac{1}{x-1}}$.

⌈ При $x=1$ функція має розрив, оскільки це значення не належить її області визначення. З'ясуємо характер розриву. Для цього знайдемо односторонні границі функції при $x\to1$.

Якщо $x\to1-0$, то $\dfrac{1}{x-1}\to-\infty$ і $\lim\limits_{x\to1-0}2^{\frac{1}{x-1}}=0$.

Якщо $x\to1+0$, то $\dfrac{1}{x-1}\to+\infty$ і $\lim\limits_{x\to1+0}2^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$.

Оскільки права границя не є скінченною, то функція у точці $x=1$ має розрив другого роду.

При обчисленні односторонніх границь у цій вправі зручно використати схематичний графік функції $y=2^x$ (рис. 20), з якого:

якщо $x\to+\infty$, то $2^x\to+\infty$;

якщо $x\to-\infty$, то $2^x\to0$. ⌋

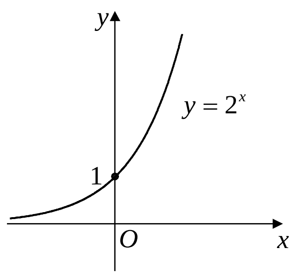


Рис. 20

140. Знайти точки розриву функції $y=\dfrac{2^{\frac{1}{x-2}}-1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}$ та дослідити їх характер.

⌈ Область визначення функції визначається системою нерівностей $\begin{cases} x-2\neq 0, \\ 2^{\frac{1}{x-2}}+1\neq 0, \end{cases}$

звідки $x\neq 2$.

Значення $x=2$ не належить області визначення функції. Отже, в цій точці функція має розрив.

Дослідимо характер розриву функції у точці $x=2$. Розглянемо односторонні границі.

Оскільки $\dfrac{1}{x-2}\to-\infty$ при $x\to 2-0$, то $\lim\limits_{x\to 2-0} 2^{\frac{1}{x-2}}=0$. Звідси

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{2^{\frac{1}{x-2}}-1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}=-1.$$

Оскільки $\dfrac{1}{x-2}\to+\infty$ при $x\to 2+0$, то $2^{\frac{1}{x-2}}\to+\infty$ і тому

$\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x-2}}}\to 0$. Звідси $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{2^{\frac{1}{x-2}}-1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}=\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{1-\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x-2}}}}{1+\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x-2}}}}=1$.

Отже, функція має у точці $x=2$ неусувний розрив першого роду зі стрибком $f(2+0)-f(2-0)=1-(-1)=2$. ⌋

141. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{якщо} \quad x\le 0, \\ \sin x, & \text{якщо} \quad 0<x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 2, & \text{якщо} \quad x\ge\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$\ulcorner$ Дана функція не є елементарною. Тому з того, що вона визначена при $x \in (-\infty, +\infty)$, висновок про відсутність точок розриву зробити не можна. Але функції $y = x$, $y = \sin x$ та $y = 2$ елементарні. Тому у внутрішніх точках відповідних проміжків їх задання $(-\infty, 0]$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ та $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$ розривів не існує. Отже, розриви функція $f(x)$ може мати лише у точках $x_1 = 0$ та $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

Розглянемо $x_1 = 0$:

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} x = 0,$$

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} \sin x = 0,$$

$$f(0) = 0.$$

Оскільки $f(0-0) = f(0+0) = f(0)$, то функція неперервна у точці $x_1 = 0$.

Розглянемо $x_2 = \frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} \sin x = \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}+0} 2 = 2,$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Оскільки $f\left(\frac{\pi}{2}-0\right) \neq f\left(\frac{\pi}{2}+0\right)$, то функція $f(x)$ має у точці $x_2 = \frac{\pi}{2}$ неусувний розрив першого роду зі стрибком

$$f\left(\frac{\pi}{2}+0\right) - f\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = 2 - 1 = 1.$$

Схематичний графік функції $f(x)$ наведено на рис. 21. $\lrcorner$

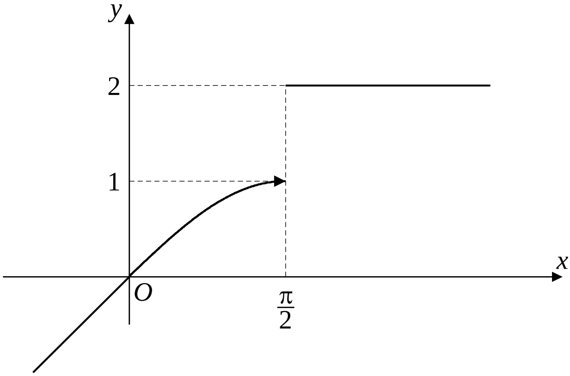


Рис. 21

Вправи для самостійного розв'язання

142. Довести, що при $x=5$ функція $y=\dfrac{x}{5-x}$ має розрив.

143. З'ясувати характер розриву функції $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}$ при $x=1$.

144. З'ясувати характер розриву функції $y=\dfrac{\sin x}{x}$ у точці $x=0$.

145. Дослідити функцію $y=\dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$ на неперервність.

146. Дослідити функцію $y=4^{\frac{2}{x-3}}$ на неперервність.

147. Дослідити функцію $y=\dfrac{x^3-8}{x-2}$ на неперервність.

148. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x<0, \\ x^2, & \text{якщо } x\geq 0. \end{cases}$$

149. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x)=\begin{cases} 1+\operatorname{tg}x, & \text{якщо } -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0, \\ \cos x, & \text{якщо } 0<x\le\dfrac{\pi}{2}, \\ \sin x, & \text{якщо } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$$

150. При якому значенні a функція $f(x)=\begin{cases} x-a, & \text{якщо } x<1, \\ 2x+1, & \text{якщо } x\ge 1 \end{cases}$ буде неперервною при $x\in(-\infty, +\infty)$?

Відповіді.

143. 1-го роду, неусувний.

144. 1-го роду, усувний.

145. $x_1=1$ та $x_2=3$ – точки розриву 2-го роду

146. $x=3$ – точка розриву 2-го роду.

147. $x=2$ – точка усувного розриву.

148. $x=0$ – точка розриву 2-го роду.

149. $x=\dfrac{\pi}{2}$ – точка неусувного розриву.

150. -2.