Міністерство освіти і науки України
Державний університет «Житомирська політехніка»

Затверджено науково-методичною радою Державного університету «Житомирська політехніка»
протокол від «__»_______ 20__ р.
№__

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
для проведення лабораторних робіт
з навчальної дисципліни
«ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»

для студентів освітнього рівня «бакалавр»
денної форми навчання
спеціальностей 121 "Інженерія програмного забезпечення",
122 "Комп'ютерні науки", 123 "Комп'ютерна інженерія", 125 "Кібербезпека"

освітньо-професійна програма «Інформаційні технології»

факультет комп'ютерно-інтегрованих технологій, мехатроніки і робототехніки

кафедра фізики та вищої математики

Розглянуто і рекомендовано
на засіданні кафедри
фізики та вищої математики

протокол від 28 серпня 2019 р.
№ 8

Розробник: старший викладач кафедри фізики та вищої математики

Головня Р.М.

Житомир
2019 – 2020 н.р.

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Проректор
з науково-педагогічної роботи
____
«_____» ___________ 20___ р.

Робоча програма навчальної дисципліни «ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»

для студентів освітнього рівня «бакалавр»

спеціальностей 121 “Інженерія програмного забезпечення”, 122 “Комп’ютерні науки”, 123 “Комп’ютерна інженерія”, 125 “Кібербезпека”

освітньо-професійна програма «Інформаційні технології»

факультет інформаційно-компютерних технологій

кафедра фізики та вищої математики

Робочу програму схвалено на засіданні
кафедри фізики та вищої математики
протокол № 8 від «28»серпня 2019 р.

Завідувач кафедри фізики та вищої математики

_________ Москвін П.П.

Розробник: старший викладач кафедри фізики та вищої математики

Головня Руслан Миколайович

Житомир
2019 – 2020 н.р.

Опис навчальної дисципліни

<table>
<tr><td rowspan="2">Найменування показників</td><td rowspan="2">Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень</td><td colspan="2">Характеристика навчальної дисципліни</td></tr>
<tr><td>денна форма навчання</td><td>заочна форма навчання</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Кількість кредитів –
• ECTS – 3</td><td>Галузь знань
12 “Інформаційні технології”</td><td colspan="2" rowspan="2">Нормативна</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td>Модулів – 2</td><td rowspan="5">Спеціальності:
“Інженерія програмного забезпечення”, “Комп’ютерні науки”, “Комп’ютерна інженерія”, “Кібербезпека”</td><td colspan="2">Рік підготовки:</td></tr>
<tr><td>Змістових модулів – 2</td><td>1-й</td><td>1-й</td></tr>
<tr><td>Індивідуальне науково-дослідне завдання -</td><td colspan="2">Семестр</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Загальна кількість годин - 90</td><td>1-й</td><td>1-й</td></tr>
<tr><td colspan="2">Лекції</td></tr>
<tr><td rowspan="9">Тижневих годин для денної форми навчання:
аудиторних – 3
самостійної роботи студента – 2,5</td><td rowspan="9">Освітньо-кваліфікаційний рівень:
бакалавр</td><td>16 год.</td><td>4 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Практичні</td></tr>
<tr><td>– год.</td><td>4 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Лабораторні</td></tr>
<tr><td>32 год.</td><td>– год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Самостійна робота</td></tr>
<tr><td>42 год.</td><td>82 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Індивідуальні завдання: – год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вид контролю: залік</td></tr>
</table>

Примітка.

Співвідношення кількості годин аудиторних занять до самостійної і індивідуальної роботи становить:

для денної форми навчання – 114,2 %

для заочної форми навчання – 9,76 %

Мета та завдання навчальної дисципліни

Мета дисципліни – оволодіння студентами необхідним математичним апаратом, який допомагає аналізувати, моделювати та розв’язувати інженерні задачі.

Завдання дисципліни:

а) розвиток логічного та алгоритмічного мислення студентів;

б) оволодіння студентами методами дослідження і розв’язання математичних задач;

в) вироблення у студента уміння застосовувати математичні знання у процесі розв’язування інженерних задач та побудови математичних моделей.

Вивчення дисципліни базується на знаннях з математики, отриманих у середній школі.

При вивченні дисципліни у студента слід розвинути *компетенції* з основних положень:

а) лінійної алгебри;

б) векторної алгебри;

в) аналітичної геометрії.

Результати, яких студент повинен досягти після вивчення курсу:

1. Студент повинен **знати:**
   - матричну алгебру і методи розв’язання систем лінійних рівнянь;
   - основні поняття та формули векторної алгебри;
   - лінії та поверхні першого і другого порядку;
2. Студент повинен **вміти:**
   - застосовувати математичні методи при розв’язанні практичних задач;
   - самостійно розширювати свої математичні знання, працювати з навчальною та науковою літературою.

Програма навчальної дисципліни

Змістовий модуль 1. Лінійна алгебра

Тема 1. Комплексні числа

Поняття та властивості комплексного числа. Алгебраїчна, геометрична, тригонометрична та показникові форми комплексного числа. Дії над комплексними числами. Формула Муавра.

Тема 2. Матриці та визначники

Поняття матриці. Дії над матрицями. Визначник матриці та його властивості. Мінори і алгебраїчні доповнення елементів визначника. Обернена матриця. Існування та побудова. Поняття рангу матриці, властивості, методи обчислення.

Тема 3. Системи рівнянь

Поняття системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язування систем методом Гаусса, матричним методом та за формулами Крамера. Однорідні та неоднорідні системи лінійних рівнянь. Матричні рівняння.

Тема 4. Лінійні простори

Означення лінійного простору. Означення та основні теореми про лінійну залежність, лінійну незалежність елементів лінійного простору. Базис лінійного простору. Розмірність лінійного простору. Координати елементів простору за даним базисом. Поняття підпростору. Поняття лінійного векторного простору. Евклідів простір. Лінійні оператори

Змістовий модуль 2. Аналітична геометрія

Тема 1. Векторна алгебра

Поняття вектора. Дії над векторами. Координати вектора. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів. Розклад вектора за базисом. Поділ відрізка в заданому відношенні.

Тема 2. Аналітична геометрія на площині

Пряма на площині. Види рівнянь прямої на площині. Взаємне розміщення двох прямих. Лінії другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола. Канонічні рівняння та властивості.

Тема 3. Аналітична геометрія у просторі

Площина у просторі. Види рівнянь площини. Взаємне розміщення двох площин. Пряма у просторі. Види рівнянь прямої у просторі. Взаємне розміщення двох прямих. Взаємне розміщення прямої і площини. Поверхні другого порядку. Канонічні рівняння. Дослідження форми методом паралельних перерізів. Поверхні обертання

Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин											
	денна форма						Заочна форма					
	Усього	у тому числі					усього	у тому числі				
		л	п	лаб	інд	с.р.		л	п	лаб	інд	с.р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Модуль 1												
Змістовий модуль 1. **Лінійна алгебра**												
Тема 1. Комплексні числа	12	2		4		6	12		1			11
Тема 2. Матриці та визначники	12	2		4		6	12	1				11
Тема 3. Системи рівнянь	20	2		8		10	20	1	1			18
Разом за змістовим модулем 1	44	6		16		22	44	2	2			40
Змістовий модуль 2. Аналітична геометрія												
Тема 1. Векторна алгебра	16	2		8		6	16	1	1			14
Тема 2. Аналітична геометрія на площині	14	4		4		6	14	1				13
Тема 3. Аналітична геометрія у просторі	16	4		4		8	16		1			15
Разом за змістовим модулем 2	46	10		16		20	46	2	2			42
Усього годин	90	16		32		42	90	4	4			82

Теми семінарських занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
	Не передбачені навчальним планом	

Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин

	Не передбачені навчальним планом	

Теми лабораторних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Комплексні числа	4
2	Дії над матрицями. Обчислення визначників	4
3	Знаходження обернених матриць. Розв’язування систем рівнянь за правилом Крамера	4
4	Розв’язування систем рівнянь методом Гаусса	4
5	Векторна алгебра	8
6	Пряма на площині. Лінії другого порядку	4
7	Площина і пряма у просторі. Поверхні другого порядку	4
Разом		32

Самостійна робота

Передбачається, що в період вивчення дисципліни студент самостійно розв’язує домашнє завдання, вивчає матеріал курсу в процесі підготовки до лабораторних занять, а також в цілому перед сесією. Частка самостійної роботи при вивченні навчальної дисципліни складає 47 %.

№з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Комплексні числа	6
2	Матриці та визначники	6
3	Системи рівнянь	8
4	Лінійні простори	2
5	Векторна алгебра	6
6	Аналітична геометрія на площині	6
7	Аналітична геометрія у просторі	8
Разом		42

Індивідуальні завдання

№ з/п	Тематика
1	Виконання дій над комплексними числами у алгебраїчній та тригонометричній формах
2	Дії над матрицями, обчислення визначників
3	Правило Крамера
4	Метод Гаусса
5	Векторна алгебра
6	Пряма на площині
7	Криві другого порядку

8	Площина і пряма у просторі

Методи навчання

Словесні – лекція, пояснення, розповідь, бесіда, дискусія тощо; практичні – виконання вправ, практичні роботи, реферати, графічні роботи; проблемно-пошуковий; пояснювально-ілюстративний; репродуктивний.

Методи контролю

Під час вивчення дисципліни використовуються наступні методи контролю: поточне та підсумкове тестування за теоретичним матеріалом, захист лабораторних робіт у формі співбесіди, індивідуальні домашні завдання, письмова контрольна робота, усне опитування теоретичного матеріалу, тестування, залік.

Розподіл балів, які отримують студенти

1-й семестр

Поточне тестування та самостійна робота						Разом	Залік	Сума
Змістовий модуль 1			Змістовий модуль 2					
Т1	Т2	Т3	Т1	Т2	Т3			
10	14	20	20	14	14	100	до 30	100

Шкала оцінювання: національна та ECTS

За шкалою ECTS	За національною шкалою		За шкалою ЖДТУ (в балах)
	для екзамену, курсового проекту (роботи), практики	для заліку	
A	відмінно	зараховано	90-100
B	добре		82-89
C			74-81
D	задовільно		64-73
E			60-63
FX	незадовільно	незараховано	35-59
F			1-34

Методичне забезпечення

1. Практикум з вищої математики: Навч. посібн. / За ред. В.О. Коваля. – Житомир: ЖДТУ, 2008. – 448с.

2. Бондарчук В.М., Коваль В.О. Вища математика. Завдання до контрольних робіт для студентів заочної форми навчання. Ч.1. – Житомир: ЖДТУ, 2010.–50с.

Рекомендована література

Базова

1. Михайленко В.В., Добряков Л.Д. Вища математика. Книга 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Підручник. – Житомир: ЖДТУ, 2004 р. – 554 с.

2. Рудавський Ю.К., Костобій П.П., Луник Х.П., Уханська Д.В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навчальний підручник. – Львів: Бескид Біт, 2002.

3. Вища математика: Підручник. У 2-х кн. – Кн. 1. Основні розділи/ За ред. Г.Л. Кулініча. – К.: Либідь, 2003. – 400 с.

4. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібн. – Київ: А.С.К.; 2001. – 648 с.

5. Беспальчук В.І., Головня Р.М., Івахненкова В.В. та інші. Збірник задач з математики: у 3-х ч.– Ч. 1.– Житомир: ЖДТУ, 2001. – 162 с.

6. Беспальчук В.І., Головня Р.М., Івахненкова В.В. та інші. Збірник задач з математики: у 3-х ч. – Ч. 3. – Житомир: ЖДТУ, 2002. – 156 с.

Допоміжна

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука. 1982.

2. Бакельман И.Я. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Учеб. Пособие для студентов пед. ин-тов по специальности № 2105 «Физика». М., «Просвещение», 1976.

3. Вища математика: Підручник. У 2-х ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення/ За заг. ред. П.П. Овчинникова. — К.: Техніка, 2000. — 592 с.

4. Вища математика. Збірник задач. У2-х ч. Ч.1/ За заг. ред. П.П. Овчинникова. — К.: Техніка, 2004. — 279 с.

5. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 1/ Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1981. – 463 с.

Інформаційні ресурси

Бібліотечно-інформаційний ресурс (книжковий фонд, періодика, фонди на електронних носіях тощо) бібліотеки ЖДТУ, Житомирської обласної універсальної наукової бібліотеки ім. Олега Ольжича (http://www.lib.zt.ua/, 10014, м. Житомир, Новий бульвар, (0412) 37-84-33), Національної бібліотеки України ім. В.І. Вернадського (http://www.nbuv.gov.ua/, Київ, просп. 40-річчя Жовтня, 3 +380 (44) 525-81-04) та інших бібліотек .

Інституційний репозитарій ЖДТУ (наукові статті, автореферати дисертацій та дисертації, навчальні матеріали, студентські роботи, матеріали конференцій, патенти, комп'ютерні програми, статистичні матеріали, навчальні об'єкти, наукові звіти).

Зміст і завдання лабораторних робіт

Лабораторна робота № 1. *Комплексні числа*

Мета: познайомитись з поняттям комплексного числа, навчитись виконувати дії над комплексними числами у алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах, зображувати комплексні числа точками комплексної площини.

Література:

1. Михайленко В.В., Добряков Л.Д. Вища математика. Книга 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Підручник. – Житомир: ЖДТУ, 2004 р. – 554 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібн. – Київ: А.С.К.; 2001. – 648 с.

Теоретичні відомості

Комплексним числом називають вираз

$$z = a + bi, \tag{1}$$

де a та b – дійсні числа, $i = \sqrt{-1}$ – *уявна одиниця.* Числа a та b називають відповідно *дійсною* та *уявною частиною* комплексного числа z. При цьому пишуть $a = \mathrm{Re}\, z$, $b = \mathrm{Im}\, z$.

Праву частину формули (1) називають *алгебраїчною формою* комплексного числа.

Модуль комплексного числа z знаходиться за формулою

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{2}$$

Спряженим до комплексного числа (1) називають комплексне число $\overline{z} = a - bi$.

Два комплексні числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$ вважають рівними $(z_1 = z_2)$ тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Комплексні числа можна зображати на площині. Якщо користуватись декартовою системою координат, то число (1) зображується точкою $M(a;b)$. Таку площину називають *комплексною площиною* змінної z, вісь Ox – *дійсною віссю,* вісь Oy – *уявною.*

Комплексне число $z = a + bi$ при $b = 0$ є дійсним числом a: $z = a + 0 \cdot i = a$. Тому дійсні числа є окремим випадком комплексних і зображуються точками осі Ox. Комплексні числа $z = a + bi$, в яких $b = 0$, називають *суто уявними.* Такі числа зображуються точками осі Oy.

Полярні координати точки $M(a;b)$ на комплексній площині позначимо ρ та φ. Оскільки $a = \rho\cos\varphi$, $b = \rho\sin\varphi$ (рис. 1), то з (1) маємо

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{3}$$

Праву частину формули (3) називають *тригонометричною формою* комплексного числа.

Очевидно, що $\rho = |z|$. Кут φ називають *аргументом* комплексного числа z і позначають $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Він визначається з точністю до $2\pi k$:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \ k \in Z,$$

де $\arg z$ називають *головним значенням* аргументу, яке знаходиться на проміжку $[0, 2\pi)$ і відраховується від додатного напряму осі Ox проти руху стрілки годинника.

Якщо $z = 0$, то вважають, що $|z| = 0$, а $\arg z$ невизначений. У загальному випадку модуль та аргумент комплексного числа (2) знаходять за формулами

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \ \varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a}, & a > 0, \\ \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a} + \pi, & a < 0, b > 0,, \\ \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a} - \pi, & a < 0, b < 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Розглянемо дії над комплексними числами $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$, заданими в алгебраїчній формі.

а) Дії додавання та віднімання виконують за формулами:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i, \\ z_1 - z_2 &= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i. \end{aligned} \qquad (5)$$

Відзначимо, що $z + \overline{z} = 2a$ – дійсне число.

б) Множення виконують за правилом множення двочленів з урахуванням того, що $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 = \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i (a_1 b_2 + a_2 b_1). \end{aligned} \qquad (6)$$

Відзначимо, що $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ – дійсне число.

в) Дію ділення зводять до дії множення наступним чином:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{|z_2|^2}. \qquad (7)$$

Множення та ділення комплексних чисел $z_1 = \rho_1 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$ і $z_2 = \rho_2 (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$, заданими в тригонометричній формі, виконують за формулами:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right); \qquad (8)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right).$$

Перша з цих формул, узагальнюється на довільне скінченне число множників і приводить, зокрема, до наступної формули піднесення до степеня (*формула Муавра*):

$$z^n=\left(\rho\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)\right)^n=\rho^n\left(\cos n\varphi+i\sin n\varphi\right),\quad n\in N. \qquad (9)$$

Наслідком формули Муавра є формула коренів n -го степеня з комплексного числа z:

$$w_k=\sqrt[n]{\rho\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \qquad (10)$$

де $k=0,1,\ldots,n-1$.

З *формули Ейлера*

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$$

випливає, що комплексне число (9) можна записати в *показниковій формі*

$$z=\rho e^{i\varphi}. \qquad (11)$$

Дії множення, ділення та піднесення до степеня комплексних чисел, записаних у формі (11), можна виконувати за відомими властивостями степеня:

$$z_1\cdot z_2=\rho_1 e^{i\varphi_1}\cdot\rho_2 e^{i\varphi_2}=\rho_1\rho_2 e^{i\left(\varphi_1+\varphi_2\right)};$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}}=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i\left(\varphi_1-\varphi_2\right)}; \qquad (12)$$

$$z^n=\left(\rho e^{i\varphi}\right)^n=\rho^n e^{in\varphi}.$$

Завдання для роботи в аудиторії.

Виконати дії, результат записати в алгебраїчній формі.

11.1. $\left(1-2i\right)\left(2+i\right)^2+5i$. **11.4.** $\dfrac{2-i}{1+i}$. **11.8.** $\left(\dfrac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$.

Наступні комплексні числа представити у тригонометричній і показниковій формах, зобразити точками на комплексній площині.

11.14. 1. **11.17.** $-i$. **11.20.** $-1-i$. **11.23.** $\sqrt{3}-i$.

Побудувати множини точок комплексної площини, що задовольняють наступним умовам.

11.45. $\operatorname{Re}z\ge 0$. **11.47.** $\left|\operatorname{Im}z\right|\le 2$. **11.48.** $|z|<1$. **11.51.** $0<\arg z\le\dfrac{\pi}{4}$.

11.88. Записати за допомогою нерівностей відкриті множини точок комплексної площини: Ліва півплощина.

Обчислити.

11.100. $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$. **11.101.** $(1+i)^8\left(1-i\sqrt{3}\right)^{-6}$. **11.112.** $\sqrt[4]{-1}$.

11.114. $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$.

Домашнє завдання.

Виконати дії, результат записати в алгебраїчній формі.

11.3. $\left(2i-i^2\right)^2+(1-3i)^3$. **11.5.** $\dfrac{1}{1+4i}+\dfrac{1}{4-i}$. **11.10.** $\dfrac{(1+2i)^2-(2-i)^3}{(1-i)^3+(2+i)^2}$.

Наступні комплексні числа представити у тригонометричній і показниковій формах, зобразити точками на комплексній площині.

11.15. –1. **11.16.** i. **11.21.** $1-i$. **11.22.** $-1-i\sqrt{3}$. **11.24*.** $\sin\dfrac{\pi}{3}+i\cos\dfrac{\pi}{3}$.

Побудувати множини точок комплексної площини, що задовольняють наступним умовам.

11.46. $0\le \operatorname{Im} z\le 1$. **11.49.** $1<|z+2|\le 2$. **11.52.** $|\pi-\arg z|<\dfrac{\pi}{4}$.

Записати за допомогою нерівностей відкриті множини точок комплексної площини.

11.88. Ліва півплощина.

Обчислити.

11.99. $(1+i)^{10}$. **11.102.** $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$. **11.111.** $\sqrt{i}$. **11.115.** $\sqrt[4]{2\sqrt{3}+2i}$.

Відповіді:

11.1. $11+3i$. **11.4.** $\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$. **11.5.** $\dfrac{5}{17}-\dfrac{3}{17}i$. **11.8.** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$. **11.10.** $5+5i$. **11.14.** $\cos 0+i\sin 0$, e^{0i}. **11.15.** $\cos\pi+i\sin\pi$, $e^{\pi i}$. **11.16.** $\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$, $e^{\frac{\pi}{2}i}$. **11.17.** $\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}$, $e^{\frac{3\pi}{2}i}$. **11.20.** $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$, $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}$. **11.21.** $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$, $e^{\frac{7\pi}{4}i}$. **11.22.** $2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$, $2e^{\frac{4\pi}{3}i}$. **11.23.** $2\left(\cos\dfrac{11\pi}{6}+i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$, $2e^{\frac{11\pi}{6}i}$. **11.24.** $\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$, $e^{\frac{\pi}{6}i}$. **11.45.** Півплощина $x\ge 0$. **11.46.** Смуга $0\le y\le 1$. **11.47.** Смуга $|y|\le 2$. **11.48.** Внутрішня частина круга радіуса 1 з центром у початку координат. **11.49.** Кільце між колами $(x+2)^2+y^2=1$

та $(x+2)^2+y^2=4$. **11.51.** Сектор, що обмежують промені $l_1=\{(x;y)|y=0, x\geq 0\}$ та $l_2=\{(x;y)|y=x, x\geq 0\}$ (промінь l_1 не належить сектору). **11.52.** Сектор, що обмежують промені $l_1=\{(x;y)|y=x, x<0\}$ та $l_2=\{(x;y)|y=-x, x\leq 0\}$. **11.87.** $\operatorname{Re} z>0$, $\operatorname{Im} z>0$. **11.88.** $\operatorname{Re} z<0$. **11.99.** $32i$. **11.100.** 2. **11.101.** $-\frac{1}{4}$. **11.102.** $512(1-i\sqrt{3})$.

11.111. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. **11.112.** $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$; $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$. **11.114.** $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i\sqrt{3})$.

11.115. $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}k\right)\right)$, $k=0,1,2,3$.

Контрольні питання

Що називають комплексним числом? Його складові?
Що називають алгебраїчною формою комплексного числа?
Комплексно спряжені числа.
Комплексна площина.
Що називають тригонометричною формою комплексного числа?
Що називають показниковою формою комплексного числа?
Дії над комплексними числами в тригонометричній формі. Формула Муавра.

Приклади тестових завдань

Комплексне число складається з…
Число виду $z=a+ib$, де $a,b\in R$ називається…
Чому дорівнює i^2?
Якими є комплексні числа $5+7i$ та $5-7i$?
Якими є комплексні числа $12-i$ та $12+(-i)$?
Коли комплексне число $a+bi$ спряжене з числом $c+di$?
Добуток двох спряжених чисел $a+bi$ і $a-bi$ дорівнює…
Рівність $\left(\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right)^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$ називають…
Яка дія відбувається за правилом $\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{(bc-ad)i}{c^2+d^2}$?
Для того, щоб поділити два комплексні числа в алгебраїчній формі необхідно…
Комплексне число $z=(ac-bd)+i(ad+bc)$ при $z_1=a+bi,\ z_2=c+di$ називається….
Для того, щоб помножити два комплексні числа в тригонометричній формі необхідно…
Запис комплексного числа z у вигляді $a+bi$ називається
Вісь Oy комплексної площини називають…
Вісь Ox комплексної площини називають…
Площину, точки якої зображають комплексні числа називають…

Форма комплексного числа $z=\rho\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$ називається…

Два комплексні числа рівні в тригонометричній формі, коли…

Запис комплексного числа z у вигляді $\rho e^{i\varphi}$ називають…

Приклад індивідуального завдання

1. Виконати дії:

$$\frac{2}{4-8i}+\frac{1}{i^3}$$

2. Знайти всі значення $\sqrt[3]{-8}$
3. Зобразити множину точок

$$\{z\in C: |z+i|\geq 1,\ -2\leq \operatorname{Im} z\leq 0,\ 0\leq \operatorname{Re} z\leq 2\}$$

Лабораторна робота № 2. *Матриці та визначники*

***Мета*: п**ознайомитись з поняттями матриці та визначника, навчитись виконувати дії над матрицями та обчислювати значення визначника.

Література:

1. Михайленко В.В., Добряков Л.Д. Вища математика. Книга 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Підручник. – Житомир: ЖДТУ, 2004 р. – 554 с.
2. В.І., Бондарчук В. М., Величко Д. О., Головня Р.М. та ін.. Практикум з вищої математики. Навчальний посібник / за ред.. В. О. Коваля – Житомир: ЖДТУ, 2008. – 448 с.

Теоретичні відомості

1. Дії над матрицями

Матрицею розміру $m\times n$ називають прямокутну таблицю чисел, в якій m рядків та n стовпців:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

або коротко $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$.

Над матрицями виконують дії додавання, віднімання, множення, множення на число, транспонування.

Добуток матриці $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ *на число* α – це матриця $\alpha A=\left(\alpha a_{ij}\right)_{m\times n}$, тобто кожен елемент матриці A слід помножити на α.

Сума (*різниця*) матриць $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ та $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ – це матриця $A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{m\times n}$ $\left(A-B=\left(a_{ij}-b_{ij}\right)_{m\times n}\right)$, тобто для знаходження суми (різниці) матриць A і B слід додати (відняти) їх відповідні елементи. Сума та різниця визначені для матриць однакового розміру.

Добутком матриці $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times p}$ *на матрицю* $B=\left(b_{ij}\right)_{p\times n}$ називають матрицю $C=AB$ розміру $m\times n$, елементи c_{ij} якої обчислюються за правилом: c_{ij} є сумою попарних добутків елементів i-го рядка матриці A та відповідних елементів j-го стовпця матриці B. Добуток AB визначений, якщо число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B. В загальному випадку $AB\neq BA$.

Транспонування матриці: якщо рядки матриці A записати як стовпці (зберігаючи порядок), то отриману матрицю називають *транспонованою* до матриці A і позначають A^T. Відзначимо, що якщо A – матриця розміру $m\times n$, то A^T – матриця розміру $n\times m$.

2. Визначник матриці

Визначник є числовою характеристикою квадратної матриці. *Визначником матриці* A *розміру* 2×2 або *визначником другого порядку* називається число, яке обчислюється за формулою

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}. \qquad (1)$$

Визначником матриці A *розміру* 3×3 або *визначником третього порядку* називається число, яке обчислюється за формулою

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Формулу (2) називають *розкладом визначника* за елементами першого рядка. Слід запам'ятати лише принцип побудови правої частини формули (2): елемент a_{11} множимо на визначник другого порядку, який дістаємо з визначника $|A|$ викреслюванням у ньому 1-го рядка і 1-го стовпця; другий доданок беремо зі знаком "мінус" і множимо елемент a_{12} на визначник другого порядку, який дістаємо з визначника $|A|$ викреслюванням у ньому 1-го рядка і 2-го стовпця; третій доданок беремо зі знаком "плюс" і множимо елемент a_{13} на визначник другого порядку, який дістаємо з визначника $|A|$ викреслюванням у ньому 1-го рядка і 3-го стовпця.

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} матриці A називається число, яке дорівнює добутку $(-1)^{i+j}$ на визначник матриці, яка утворюється в результаті викреслювання у матриці A рядка з номером i та стовпця з номером j. Позначимо алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} через A_{ij}. Для матриці A розміру 3×3 маємо:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{21} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Отже, формулу (2) можна записати у вигляді

$$|A|=a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+a_{13}\cdot A_{13}. \qquad (2')$$

Визначник четвертого порядку обчислюється за аналогічною до (2′) формулою

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14}, \qquad (3)$$

де A_{1j} – відповідні алгебраїчні доповнення елементів a_{1j} першого рядка матриці, тобто визначники третього порядку, помножені на $(-1)^{1+j}$.

Для обчислення визначників, порядок яких вищий за третій, доцільно використовувати деякі з їх *властивостей*.

1°. Визначник не зміниться, якщо до одного рядка (стовпця) додати інший, помножений на довільне число.

2°. Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки (стовпці), то визначник змінить знак на протилежний.

3°. Визначник матриці не змінюється при її транспонуванні, тобто $|A^T| = |A|$.

Завдання для роботи в аудиторії.

Обчислити:

1.79. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. **1.81.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.85. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 & -18 & 10 \\ -46 & 31 & -17 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Обчислити визначники:

1.4. $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$. **1.13.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. **1.40.** $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Домашнє завдання.

1.78. $4\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.82. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. **1.84.** $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Обчислити визначники.

1.5. $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$. **1.6.** $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$. **1.14.** $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 1 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix}$. **1.15.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

1.32. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. **1.33.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 9 & 16 \\ 8 & 1 & 27 & 64 \end{vmatrix}$. **1.41.** $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$.

Відповіді:

1.78. $\begin{pmatrix} -3 & 9 & -3 \\ 16 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. **1.79.** $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$. **1.81.** $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$. **1.82.** $\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$.

1.84. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. **1.85.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1.4. 0. **1.5.** 6. **1.6.** 7. **1.13.** 31. **1.14.** –252. **1.15.** 12. **1.32.** 30. **1.33.** –12. **1.40.** –9. **1.41.** 18.

Контрольні питання

Що називають матрицею? Види матриць.
Правила дій над матрицями. Властивості дій.
Визначник та його властивості.
Правила обчислення визначника другого та третього порядку.
Що називають алгебраїчним доповненням?

Приклади тестових завдань

Знайдіть матрицю $3A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Чому дорівнюють елементи a та b, якщо виконується рівність $\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$?

Дано матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Знайдіть транспоновану матрицю A^T.

Знайдіть суму матриць $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Яку з вказаних дій можна виконати?

Дано матрицю $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$. Знайдіть обернену матрицю A^{-1}.

Обчислити AB, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

Дано матриці $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ -5 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 6 & 3 & 1\end{pmatrix}$. Знайдіть $A-B$.

Матрицю A^{-1} називають оберненою до матриці A, якщо:

Знайдіть матрицю A^3, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

Матрицю, всі елементи якої дорівнюють нулю, називають…

Квадратну матрицю, всі елементи, якої крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називають…

Діагональну матрицю, всі відмінні від нуля елементи якої дорівнюють одиниці, називають…

Матрицю, у якій кількість рядків дорівнює кількості стовпчиків називають…

Квадратну матрицю, всі елементи якої розміщені під головною діагоналлю, дорівнюють нулю, називають…

Дано матриці $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$. Обчисліть AB.

Знайдіть A^2, якщо $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

Чому дорівнює добуток матриць $A\cdot A^{-1}$?

При множенні матриці на число…

Можна множити матриці, у яких…

Можна додавати матриці, у яких…

Можна віднімати матриці, у яких…

Можна транспоновувати матриці, у яких…

Обернена до матриці A існує тоді і тільки тоді коли …

Вкажіть властивість, яка не виконується для дій над матрицями.

Знайдіть матрицю $2A$, якщо $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

Вкажіть властивість, яка не виконується для дій над матрицями.

Вкажіть властивість, яка не виконується для дій над матрицями.

Вкажіть властивість, яка не виконується для дій над матрицями.

Розв’яжіть рівняння $\begin{vmatrix}x & -1\\ -1 & x\end{vmatrix}=3$.

Якщо поміняти місцями два рядки визначника, то визначник…

Якщо помножити всі елементи першого рядка визначника на число 2, то визначник…

Якщо до елементів другого рядка визначника додати відповідні елементи першого рядка, помножені попередньо на число 2, то визначник…

Правило «трикутників» застосовують для обчислення визначника…

Правило «хрестика» застосовують для обчислення визначника…

Правило «розкладу» застосовують для обчислення визначника…

Визначник виду $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$ називають…

Яка з формул дозволяє обчислити визначник другого порядку $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$?

Вкажіть алгебраїчне доповнення елемента a_{13} визначника $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Якщо до елементів першого рядка визначника, додати відповідні елементи другого, помножені попередньо на 2, то визначник…

Обчисліть значення визначника $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Обчисліть значення визначника $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Чому дорівнює алгебраїчне доповнення A_{12}, якщо $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Якщо $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то $\det A = \ldots$

Якщо транспонувати матрицю визначника, то визначник…

Якщо поміняти місцями два стовпчика визначника, то визначник…

Якщо помножити всі елементи першого стовпчика визначника на число 2, то визначник…

Якщо до елементів другого стовпчика визначника додати відповідні елементи першого стовпчика, помножені попередньо на число 2, то визначник…

Якщо помножити всі елементи першого стовпчика визначника на число 3, то визначник…

Якщо до елементів другого стовпчика визначника додати відповідні елементи першого стовпчика, помножені попередньо на число 3, то визначник…

Якщо помножити всі елементи першого рядка визначника на число 3, то визначник…

Якщо до елементів другого рядка визначника додати відповідні елементи першого рядка, помножені попередньо на число 3, то визначник…

Якщо визначник містить два пропорційні рядки, то він дорівнює…

Якщо визначник містить два пропорційні стовпчики, то він дорівнює…

Приклад індивідуального завдання

Завдання 1. Дано дві матриці A і B. Знайти: а) AB; б) BA; в) $B^T A^T$.

1.30. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Завдання 2. Обчислити визначник:

1) за правилом «зірочки»

2) розклавши його за елементами i -го рядка;

3) розклавши його за елементами j -го стовпчика;

4) отримавши попередньо нулі в i -му рядку.

2.30. $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

$i = 2, \quad j = 2$

Лабораторна робота № 3. Обернена матриця. Правило Крамера

***Мета*:** познайомитись з методами побудови оберненої матриці, навчитись розв'язувати системи лінійних рівнянь за правилом Крамера.

Література:

1. Михайленко В.В., Добряков Л.Д. Вища математика. Книга 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Підручник. – Житомир: ЖДТУ, 2004 р. – 554 с.
2. В.І., Бондарчук В. М., Величко Д. О., Головня Р.М. та ін.. Практикум з вищої математики. Навчальний посібник / за ред.. В. О. Коваля – Житомир: ЖДТУ, 2008. – 448 с.

Теоретичні відомості

1. Обернена матриця

Нехай A – квадратна матриця і $|A| \neq 0$. *Обернена матриця* до матриці A обчислюється за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}^T, \qquad (4)$$

де $\tilde{A}$ – матриця, складена з алгебраїчних доповнень елементів матриці A. Матрицю $\tilde{A}$ називають *приєднаною* до A.

Для матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ формула (4) набуває вигляду

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Для матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ приєднана матриця має вигляд

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Обернена матриця A^{-1} задовольняє співвідношення

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E,$$

де E – одинична матриця. Для перевірки правильності знаходження оберненої матриці достатньо переконатися, наприклад, що $A^{-1}A = E$.

2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Система m *лінійних алгебраїчних рівнянь з* n *невідомими* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m . \end{cases} \qquad (7)$$

Систему (7) можна записати у *матричному* вигляді $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – *матриця системи*;

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$ – *вектор-стовпець вільних членів*;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – *вектор-стовпець невідомих*.

Набір значень невідомих $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$ називають *розв'язком* системи (7), якщо при підстановці їх у рівняння системи всі рівняння перетворюються у тотожності. Система рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок. Якщо ж система не має жодного розв'язку, то вона називається *несумісною*.

4.2. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом оберненої матриці

Нехай маємо систему рівнянь (7), в якій $m = n$, тобто число рівнянь дорівнює числу невідомих. Запишемо систему у матричному вигляді

$$AX = B. \qquad (9)$$

Якщо $|A| \neq 0$, то розв'язок системи рівнянь (9) можна знайти за формулою

$$X = A^{-1}B. \qquad (10)$$

4.3. Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера

Нехай маємо систему рівнянь (7), в якій $m=n$. Якщо визначник матриці системи $\Delta=|A|\neq 0$, то розв'язок системи можна знайти за *формулами Крамера*

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де Δ_i ($i=1,2,\ldots,n$) – визначник матриці, що отримана з матриці A заміною i-го стовпця на стовпець вільних членів B.

Завдання для роботи в аудиторії.

Знайти обернені матриці до заданих.

1.59. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. **1.64.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **1.65.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **1.74.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язати матричні рівняння.

1.90. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

Розв'язати системи лінійних рівнянь за правилом Крамера (методом оберненої матриці та за формулами Крамера).

1.97. $\begin{cases} 3y-4x=1, \\ 3x+4y=18. \end{cases}$ **1.100.** $\begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x+7y-z=8. \end{cases}$ **1.102.** $\begin{cases} 2x+y=5, \\ x+3z=16, \\ 5y-z=10. \end{cases}$

1.105. $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11. \end{cases}$

Домашнє завдання.

Знайти обернені матриці до заданих.

1.60. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. **1.66.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. **1.67.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **1.75.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

Розв’язати матричні рівняння.

1.91. $X\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -5 & 6\end{pmatrix}$. **1.92.** $\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 16\\ 9 & 10\end{pmatrix}$.

1.93. $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 10 & 2 & 7\\ 10 & 7 & 8\end{pmatrix}$.

Розв’язати системи лінійних рівнянь за правилом Крамера (методом оберненої матриці та за формулами Крамера).

1.98. $\begin{cases}2x-3y=6,\\ 4x-6y=5.\end{cases}$ **1.106.** $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=-1,\\ 2x_1-x_2+2x_3=-4,\\ 4x_1+x_2+4x_3=-2.\end{cases}$ **1.107.** $\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5,\\ 2x_1+3x_2+x_3=1,\\ 2x_1+x_2+3x_3=11.\end{cases}$

1.109*. $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1,\\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4,\\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6,\\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4.\end{cases}$

Відповіді:

1.59. $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}$. **1.60.** $\begin{pmatrix}7 & -4\\ -5 & 3\end{pmatrix}$. **1.64.** $\frac{1}{13}\begin{pmatrix}-2 & -3 & 7\\ 7 & 4 & -5\\ -1 & 5 & -3\end{pmatrix}$.

1.65. $\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ -3 & -3 & 3\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}$. **1.66.** $-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4 & -1 & -3\\ 10 & -7 & 6\\ -11 & 5 & -3\end{pmatrix}$. **1.67.** $\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ -2 & 4 & 1\\ 4 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

1.74. $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$. **1.75.** $\begin{pmatrix}22 & -6 & -26 & 17\\ -17 & 5 & 20 & -13\\ -1 & 0 & 2 & -1\\ 4 & -1 & -5 & 3\end{pmatrix}$. **1.90.** $\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$. **1.91.** $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}$

. **1.92.** $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. **1.93.** $\begin{pmatrix}6 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$. **1.94.** $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$. **1.97.** $(2;3)^T$. **1.98.** Система несумісна. **1.100.** $(1;1;1)^T$. **1.102.** $(1;3;5)^T$. **1.105.** $(3;1;1)^T$. **1.106.** $(1;2;-2)^T$. **1.107.** $(2;-2;3)^T$. **1.109.** $(-1;-1;0,1)^T$.

Контрольні питання

Що називають оберненою матрицею? Умови її існування.

Методи знаходження оберненої матриці.

Формули Крамера.

Правило Крамера у матричній формі.

Приклади тестових завдань

Матрицю A^{-1} називають оберненою до матриці A, якщо:

Чому дорівнює добуток матриць $A \cdot A^{-1}$?

Обернена до матриці A існує тоді і тільки тоді коли матриця A …

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка має єдиний розвязок називають…

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка має принаймні один розвязок називають…

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка не має розвязків називають…

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь, у якій кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих називають…

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка має більше ніж один розвязок називають…

Вкажіть запис формул Крамера у загальноприйнятих позначеннях.

Вкажіть запис правила Крамера у матричній формі у загальноприйнятих позначеннях.

Суть правила Крамера у визначниковій формі полягає у застосуванні:

Якщо всі вільні коефіцієнти дорівнюють нулю, систему лінійних рівнянь називають…

Якщо принаймні один вільний коефіцієнт у системі лінійних рівнянь відмінний від нуля, таку систему називають…

Дві системи лінійних рівнянь, множини розв’язків яких співпадають називають…

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь називають несумісною, якщо вона …

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь називають визначеною, якщо вона …

Дві системи лінійних алгебраїчних рівнянь називають еквівалентними, якщо …

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь називають однорідною, якщо …

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь називають неоднорідною, якщо …

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь називають квадратною, якщо вона…

Приклад індивідуального завдання

<u>Завдання 1</u>. Знайти AA^{-1}.

1. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

<u>Завдання 2.</u> Розв'язати систему лінійних рівнянь:
а) за формулами Крамера;
б) методом «оберненої матриці».
Виконати перевірку.

2. $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10. \end{cases}$

Лабораторна робота № 4. *Метод Гаусса*

***Мета*:** навчитись розв'язувати системи лінійних рівнянь методом Гаусса.

Література:

1. Михайленко В.В., Добряков Л.Д. Вища математика. Книга 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Підручник. – Житомир: ЖДТУ, 2004 р. – 554 с.
2. В.І., Бондарчук В. М., Величко Д. О., Головня Р.М. та ін.. Практикум з вищої математики. Навчальний посібник / за ред.. В. О. Коваля – Житомир: ЖДТУ, 2008. – 448 с.

Теоретичні відомості

Універсальним методом розв'язання систем лінійних рівнянь є *метод Гаусса*, який ще називають методом *послідовного виключення невідомих*. Цей метод ґрунтується на понятті *елементарних перетворень* системи, які полягають у наступному:

1) переставлення рівнянь системи;

2) множення рівнянь системи на довільні числа, відмінні від нуля;

3) додавання до одного рівняння системи іншого рівняння, помноженого на довільне число.

За допомогою елементарних перетворень систему (7) зводять до системи простішого ("східчастого") вигляду, яка *рівносильна* заданій (це означає, що розв'язки систем співпадають):

$$\begin{cases} \bar a_{11}x_1 + \dots + \bar a_{1n}x_n = \bar b_1 \\ \qquad \bar a_{2k}x_k + \dots + \bar a_{2n}x_n = \bar b_2 \\ \qquad\qquad \bar a_{3l}x_l + \dots + \bar a_{3n}x_n = \bar b_3 \\ \qquad\qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ \qquad\qquad\qquad \bar a_{rs}x_s + \dots + \bar a_{rn}x_n = \bar b_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = \bar b_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \dots \quad \dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = \bar b_m . \end{cases} \qquad (8)$$

Можливі такі випадки.

1. Якщо система містить хибні рівності виду $0 = b_t$, де $b_t \neq 0$, то вона несумісна.

2. Нехай система (8) не містить рівностей виду $0 = b_t$ $(b_t \neq 0)$. Тоді вона є сумісною. Тотожності виду $0 = 0$ відкидаємо. Припустимо, що $r < n$, тобто число рівнянь менше за число невідомих. Назвемо невідомі $x_1, x_k, x_l, \dots, x_s$, з яких починаються перше, друге,..., r-те рівняння, *основними*, а всі інші невідомі – *вільними*. Основних невідомих за означенням r. Надаючи вільним невідомим довільних значень і підставляючи ці значення в рівняння системи, з r-го рівняння системи знайдемо x_s. Підставляючи це значення в перші $(r-1)$ рівнянь і,

піднімаючись вгору по системі, знайдемо всі основні невідомі. Оскільки вільні невідомі можуть набувати будь-яких значень, система має безліч розв’язків.

3. Нехай в системі (8) $r = n$. Тоді вільних невідомих немає. В цьому випадку система (8) має “трикутний” вигляд

$$\begin{cases} \overline{a}_{11}x_1 & + & \dots & + & \overline{a}_{1n}x_n & = & \overline{b}_1 \\ & \overline{a}_{22}x_2 & + \dots & + & \overline{a}_{2n}x_n & = & \overline{b}_2 \\ & \dots & & \dots. & & \dots & \\ & & & & \overline{a}_{nn}x_n & = & \overline{b}_n. \end{cases}$$

З останнього рівняння системи знайдемо x_n і, піднімаючись по системі вгору, знайдемо всі інші невідомі. Отже, в цьому випадку система має єдиний розв’язок.

Зауваження. При розв’язанні систем, в яких число рівнянь не менше трьох, доцільно виписати *розширену матрицю* системи $\left(A|B\right)$. Елементарні перетворення над рівняннями системи зводяться при цьому до відповідних дій над рядками розширеної матриці. Після зведення матриці $\left(A|B\right)$ до “східчастого” вигляду виписують систему рівнянь, яка відповідає отриманій матриці.

Приклади.

Розв’язати системи лінійних рівнянь методом Гаусса.

1. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1 \\ 3x_1 + 7x_2 = 2. \end{cases}$

$\ulcorner$ Виключимо невідоме x_1 з другого рівняння. Для цього можна додати до другого рівняння перше рівняння, помножене на $\left(-\frac{3}{2}\right)$. Проте, щоб уникнути дій з дробами, краще помножити друге рівняння на 2 і додати до нього перше рівняння, помножене на (-3). Опускаючи запис вказаних обчислень, дістанемо систему, рівносильну заданій:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1 \\ \qquad\; -x_2 = 1. \end{cases}$$

З останнього рівняння маємо $x_2 = -1$. Підставляючи знайдене значення x_2 в перше рівняння, знаходимо x_1:

$$2x_1 + 5\cdot(-1) = 1, \quad x_1 = \frac{6}{2} = 3.$$

Отже, задана система має розв’язок $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. $\lrcorner$

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$

$\ulcorner$ Додамо до другого рівняння перше, помножене на (-3). В результаті дістанемо систему, рівносильну заданій:

$$1. \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ \quad -2x_2 - 4x_3 = -2. \end{cases} \qquad (*)$$

У цій системі x_3 – вільне невідоме. Надамо йому довільного значення c: $x_3 = c$, $c \in R$ (R – множина дійсних чисел). Тоді з другого рівняння системи ($*$) знаходимо x_2:

$$-2x_2 - 4c = -2, \quad x_2 = -\frac{1}{2}(4c - 2) = 1 - 2c.$$

З першого рівняння системи ($*$) знаходимо невідоме x_1:

$$x_1 + 1 - 2c + c = 2, \quad x_1 = 1 + c.$$

Отже, задана система має розв'язок $x_1 = 1 + c$, $x_2 = 1 - 2c$, $x_3 = c$, $c \in R$. ⌋

3. $\begin{cases} 3x_1 - \dfrac{21}{4}x_2 - \dfrac{3}{4}x_3 = 21 \\ 4x_1 - 7x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$

⌈ Додамо до другого рівняння перше, помножене на $\left(-\dfrac{4}{3}\right)$. Дістанемо систему

$$\begin{cases} 3x_1 - \dfrac{21}{4}x_2 - \dfrac{3}{4}x_3 = 21 \\ \qquad\qquad 0 = -23. \end{cases}$$

Друга рівність у цій системі є хибною. Це означає, що задана система несумісна. ⌋

Завдання для роботи в аудиторії.

Розв'язати систему методом Гаусса

1.127. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -0{,}5. \end{cases}$

1.129. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases}$

1.134. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$

1.135. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$

1.141. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5. \end{cases}$ **1.143.** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6. \end{cases}$

1.145. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$

Домашнє завдання.

Розв'язати систему методом Гаусса

1.128. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$ **1.130.** $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 - 7 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 1 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 + 7 = 0. \end{cases}$

1.136. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$ **1.140.** $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

1.142. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$ **1.144.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$

Відповіді:

1.127. $\left(C_1; C_1 - \frac{1}{2};\ C_2 + \frac{1}{2};\ C_2 \right)^T$. **1.128.** $\left(2C_1 - \frac{1}{2}C_2;\ C_1;\ -\frac{5}{7}C_2;\ C_2 \right)^T$.

1.129. $(-1; 3; -2; 2)^T$. **1.130.** $(2; 1; -3; 1)^T$. **1.134.** Система несумісна. **1.135.** $(3; 2; 1)^T$. **1.136.** $(-1; 0; 1)^T$. **1.140.** $\left(-\frac{11C}{7}; -\frac{C}{7}; C \right)^T$. **1.141.** $(C_1; C_2; 2C_2 - C_1; 1)^T$. **1.142.** Система несумісна. **1.143.** $(1; 2; 1)^T$. **1.144.** Система несумісна. **1.145.** $(-8; 3 + C_1; 6 + 2C_1; C_1)^T$.

Контрольні питання

Що називають розширеною матрицею системи лінійних рівнянь?

Елементарні перетворення системи лінійних рівнянь.

Ранг матриці та його знаходження. Теорема Кронекера-Капеллі.

Метод Гаусса.

Однорідна система лінійних рівнянь, фундаментальна система розв’язків.

Приклади тестових завдань

Суть методу Гаусса полягає у…

Вкажіть елементарні перетворення системи рівнянь.

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка має єдиний розв’язок називають…

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка має принаймні один розв’язок називають…

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка не має розв’язків називають…

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь, у якій кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих називають…

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка має більше ніж один розв’язок називають…

Якщо всі вільні коефіцієнти дорівнюють нулю, систему лінійних рівнянь називають…

Якщо принаймні один вільний коефіцієнт у системі лінійних рівнянь відмінний від нуля, таку систему називають…

Дві системи лінійних рівнянь, множини розв’язків яких співпадають називають…

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь називають несумісною, якщо вона…

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь називають визначеною, якщо вона…

Дві системи лінійних алгебраїчних рівнянь називають еквівалентними, якщо…

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь називають однорідною, якщо …

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь називають неоднорідною, якщо …

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь називають квадратною, якщо вона…

Приклад індивідуального завдання

Розв’яжіть систему рівнянь методом Гаусса:

$$1)\begin{cases} 3x_1+4x_2-2x_3=9, \\ 2x_1-x_2-x_3=5, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=-9. \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=-2 \\ -3x_1-x_2-x_3=-1 \\ -x_1-2x_2+2x_3=1 \end{cases}$$

3) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 = 7 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -2 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$

Лабораторна робота № 5. *Векторна алгебра*

Мета**:** ознайомитись з основними поняттями векторної алгебри, навчитись виконувати основні операції над векторами та застосовувати їх до задач геометрії.

Література:

1. Михайленко В.В., Добряков Л.Д. Вища математика. Книга 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Підручник. – Житомир: ЖДТУ, 2004 р. – 554 с.
2. В.І., Бондарчук В. М., Величко Д. О., Головня Р.М. та ін.. Практикум з вищої математики. Навчальний посібник / за ред.. В. О. Коваля – Житомир: ЖДТУ, 2008. – 448 с.

Теоретичні відомості
1. Вектори та дії над ними

Вектором називається напрямлений відрізок, тобто відрізок, для якого вказано початок A і кінець B. Позначення вектора: $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$.

Довжиною або *модулем* вектора $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка AB. Позначення: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $|\vec{a}|$.

Вектор $\vec{a}$ називають *одиничним*, якщо $|\vec{a}| = 1$.

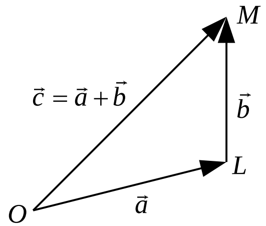
Вектор, у якого початок і кінець співпадають, називається *нульовим* вектором. Позначення: $\vec{0}$.

Вектори, що лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називаються *колінеарними*. Нульовий вектор вважається колінеарним довільному вектору.

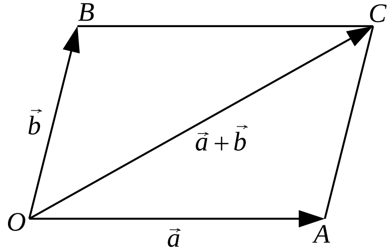
Два ненульових вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ *рівні*, якщо вони мають однаковий напрям і рівні модулі. Звідси випливає, що всі вектори, які отримуємо із заданого вектора шляхом паралельного перенесення, рівні.

1°. *Добутком вектора* $\vec{a}$ *на число* λ називають такий вектор $\vec{b}$, що: 1) $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$; 2) вектори $\vec{b}$ та $\vec{a}$ мають однаковий напрям, якщо $\lambda > 0$ і протилежний, якщо $\lambda < 0$.

2°. *Сумою векторів* $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, який напрямлений від початку вектора $\vec{a}$ до кінця вектора $\vec{b}$, за умови, що кінець вектора $\vec{a}$ співпадає з початком вектора $\vec{b}$ (правило трикутника):



Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, то суму $\vec{a}+\vec{b}$ можна знайти за правилом паралелограма, яке ілюструється наступним рисунком:

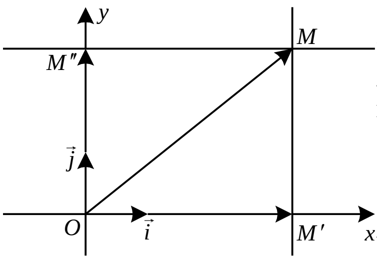


3º. *Різницею* векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають суму векторів $\vec{a}$ та $(-1)\vec{b}$, тобто $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-1)\vec{b}$. Вектор $-\vec{b}=(-1)\cdot\vec{b}$ називають *протилежним* до вектора $\vec{b}$.

2. Системи координат. Координати вектора

Розглянемо на площині взаємно перпендикулярні одиничні вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ (у просторі – $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) з початком у точці O. Вважатимемо їх напрямленими так, що менший поворот вектора $\vec{i}$ до вектора $\vec{j}$ (у просторі – це менший поворот від $\vec{i}$ до $\vec{j}$, якщо дивитися з кінця вектора $\vec{k}$) здійснюється проти руху годинникової стрілки. У цьому випадку кажуть, що в площині визначено *прямокутну декартову систему координат* $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (у просторі – (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)), а вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ (у просторі – $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) утворюють *ортонормований базис*. Прямі, що проходять через точку O паралельно до векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, називаються *осями координат* і позначаються Ox, Oy, Oz (відповідно *вісь абсцис*, *вісь ординат*, *вісь аплікат*).

Розглянемо довільну точку M на площині. Через неї проведемо дві прямі, які паралельні осям координат. Точки перетину M' і M'' цих прямих відповідно з осями Ox і Oy називають *проекціями* точки M на осі координат. Очевидно, що $\overline{OM'}=x\vec{i}$, $\overline{OM''}=y\vec{j}$. Числа x, y називаються *декартовими координатами точки* $M(x;y)$ і має місце рівність $\overline{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$.



Вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{r}\left(M\right)$ називають *радіус-вектором* точки M, а точки x, y – *координатами вектора* $\vec{r}\left(M\right)$. При цьому пишуть $\vec{r}\left(M\right) = \left(x; y\right)$.

2. Аналогічно у просторі:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad M\left(x; y; z\right), \quad \vec{r}\left(M\right) = \left(x; y; z\right).$$

Довільний вектор $\vec{a}$ можна записати у вигляді

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \quad \text{або} \quad \vec{a} = \left(a_x;\, a_y;\, a_z\right).$$

Якщо точка $A\left(x_1;\, y_1;\, z_1\right)$ – початок вектора, а точка $B\left(x_2;\, y_2;\, z_2\right)$ – його кінець, то координати вектора $\overrightarrow{AB}$ знаходять за формулою

$$\overrightarrow{AB} = \left(x_2 - x_1;\, y_2 - y_1;\, z_2 - z_1\right). \qquad (1)$$

Довжину вектора $\vec{a} = \left(a_x;\, a_y;\, a_z\right)$ визначають через його координати за формулою

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (2)$$

Два вектори $\vec{a} = \left(a_x;\, a_y;\, a_z\right)$ і $\vec{b} = \left(b_x;\, b_y;\, b_z\right)$ колінеарні тоді і лише тоді, коли їх відповідні координати пропорційні, тобто

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \qquad (3)$$

Три вектори, що лежать в одній площині або у паралельних площинах, називаються *компланарними*. Вектори $\vec{a} = \left(a_x;\, a_y;\, a_z\right)$, $\vec{b} = \left(b_x;\, b_y;\, b_z\right)$ і $\vec{c} = \left(c_x;\, c_y;\, c_z\right)$ компланарні тоді і лише тоді, коли визначник

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Звідси, якщо умова (4) не виконується, то вектори некомпланарні.

При додаванні векторів їх відповідні координати додаються:

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(a_x + b_x;\, a_y + b_y;\, a_z + b_z\right). \qquad (5.1)$$

При відніманні векторів їх відповідні координати віднімаються:

$$\vec{a} - \vec{b} = \left(a_x - b_x;\, a_y - b_y;\, a_z - b_z\right). \qquad (5.2)$$

При множенні вектора на число всі координати множаться на те ж число:

$$\lambda\vec{a}=\left(\lambda a_x;\ \lambda a_y;\ \lambda a_z\right). \qquad (6)$$

Напрямними косинусами вектора $\vec{a}=\left(a_x;\ a_y;\ a_z\right)$ називають косинуси кутів $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, які вектор $\vec{a}$ утворює з додатними напрямами осей координат:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};\quad \cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};\ \cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}} \qquad (7)$$

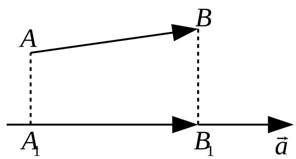
.

З формул (7) випливає, що

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \qquad (8)$$

Ортом $\vec{a}_0$ *вектора* $\vec{a}$ називають одиничний вектор, координатами якого є напрямні косинуси: $\vec{a}_0=\left(\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\right)$. На практиці для знаходження орта часто використовують формулу

$$\vec{a}_0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}. \qquad (9)$$



Нехай задано вектори $\vec{a}$ і $\overrightarrow{AB}$ (див. рисунок). *Проекцією вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на вектор* $\vec{a}$ (позначення $\text{пр}_{\vec{a}}\overrightarrow{AB}$) називають число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, якщо напрями векторів $\vec{a}$ та $\overrightarrow{A_1B_1}$ співпадають, і число $-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, якщо їх напрями протилежні.

Проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\vec{a}$ можна обчислити за формулою

$$\text{пр}_{\vec{a}}\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\varphi, \qquad (10)$$

де φ – кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\vec{a}$, $\varphi=\left(\overrightarrow{AB},\ \vec{a}\right)$ ($0\le\varphi\le\pi$).

3. Лінійна залежність векторів.

Розклад вектора за базисом

Система векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ називається *лінійно залежною*, якщо знайдуться числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, хоча б одне з яких відмінне від нуля, що

$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n=0$. В іншому випадку, система називається *лінійно незалежною*.

Геометричні критерії лінійної залежності:

1º. система $\{\vec{a}_1;\ \vec{a}_2\}$ лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2$ колінеарні;

2º. система $\{\vec{a}_1;\ \vec{a}_2;\ \vec{a}_3\}$ лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3$ компланарні;

3º. будь-яка система з $n\ge 4$ векторів лінійно залежна.

Впорядкована трійка некомпланарних векторів $\vec{e}_1;\ \vec{e}_2;\ \vec{e}_3$ називається *базисом* у множині всіх геометричних векторів.

Будь-який вектор $\vec{a}$ можна єдиним чином подати у вигляді

$$\vec{a}=X_1\vec{e}_1+X_2\vec{e}_2+X_3\vec{e}_3,$$

де числа $X_1,\ X_2,\ X_3$ називаються *координатами вектора* $\vec{a}$ *в базисі* $\{\vec{e}_1;\ \vec{e}_2;\ \vec{e}_3\}$.

Аналогічно, впорядкована пара неколінеарних векторів $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ називається базисом $\{\vec{e}_1;\ \vec{e}_2\}$ у множині геометричних векторів, компланарних деякій площині.

4. Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число $\vec{a}\cdot\vec{b}$, що обчислюється за формулою

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi, \qquad (11)$$

де кут φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $\varphi=\left(\vec{a},\ \vec{b}\right)$ ($0\le\varphi\le\pi$).

Якщо $\vec{a}=\left(a_x;\ a_y;\ a_z\right)$, $\vec{b}=\left(b_x,\ b_y,\ b_z\right)$, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z. \qquad (12)$$

Властивості скалярного добутку:

1) якщо хоча б один з векторів $\vec{a}$ чи $\vec{b}$ нульовий, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$;

2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

3) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$;

4) $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;

5) якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$, то кут φ – гострий, а якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$, то кут φ – тупий;

6) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ тоді і тільки тоді, коли $\varphi=90^\circ$ ($\vec{a}\ne 0,\ \vec{b}\ne 0$);

7) справедлива формула $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$;

8) справедлива формула $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$.

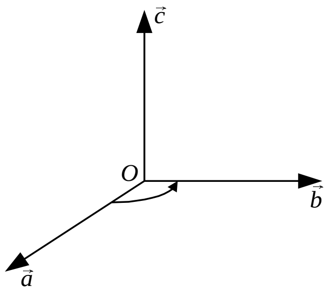
5. Векторний добуток векторів

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, що визначається такими трьома умовами:

а) $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$, де $\varphi=\left(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}\right)$;

б) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку:



упорядкована трійка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарних векторів називається *правою*, якщо з кінця вектора $\vec{c}$ менший поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ видно проти руху годинникової стрілки (див. рисунок); у противному разі трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається *лівою*.

Векторний добуток позначають $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$.

Якщо $\vec{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z)$ і $\vec{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z)$, то

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}. \qquad (13)$$

Властивості векторного добутку:

1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$;

2) $\lambda\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\lambda\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$;

3) $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$;

4) $\vec{a}\times\vec{b}=0$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}\parallel\vec{b}$;

5) $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, віднесених до спільного початку.

6. Мішаний добуток векторів

Мішаним (векторно-скалярним) добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається число $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ (спочатку знаходиться векторний добуток векторів $\vec{a}\times\vec{b}$, а потім одержаний вектор скалярно множиться на вектор $\vec{c}$).

Позначення: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

Якщо $\vec{a}=\left(a_x,\,a_y,\,a_z\right)$, $\vec{b}=\left(b_x,\,b_y,\,b_z\right)$ і $\vec{c}=\left(c_x,\,c_y,\,c_z\right)$, то

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (14)$$

Властивості мішаного добутку:

1) якщо у мішаному добутку поміняти місцями які-небудь два множники, то мішаний добуток змінить знак, наприклад, $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=-\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}$;

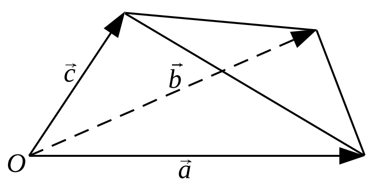
2) при циклічній перестановці множників мішаний добуток не змінюється: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}=\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}$;

3) у мішаному добутку знаки векторного і скалярного добутку можна міняти місцями:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right);$$

4) якщо $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}>0$, то вектори $\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}$ утворюють праву трійку; а якщо $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}<0$ – то ліву трійку векторів;

5) вектори $\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0$;



6) об’єм тетраедра, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, які віднесені до спільного початку (див. рисунок), рівний $\frac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$.

Завдання для роботи в аудиторії.

2.20. По заданих векторах $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ побудувати кожен із векторів:

1) $3\boldsymbol{a}$; 2) $-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$; 3) $2\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$; 4) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$.

2.26. Перевірити колінеарність векторів $\boldsymbol{a}=(2;-1;3)$ і $\boldsymbol{b}=(-6;3;-9)$. Встановити, який із них довший і в скільки разів. Як вони напрямлені – в одну, чи в протилежні сторони?

2.30. Знайти орт вектора $\boldsymbol{a}=(6;-2;-3)$.

2.40. Вектори $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ утворюють кут $\varphi=\frac{2}{3}\pi$, знаючи, що $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=4$, обчислити:

1) $\boldsymbol{ab}$; 2) $\boldsymbol{a}^2$; 5) $(\boldsymbol{3a}-\boldsymbol{2b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{2b})$

2.46. Дано вектори $\boldsymbol{a}=(4;-2;-4)$, $\boldsymbol{b}=(6;-3;2)$. Обчислити:

1) $\boldsymbol{ab}$; 2) $\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$;4) $(\boldsymbol{2a}-\boldsymbol{3b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{2b})$; 5) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$

2.49. Обчислити, яку роботу виконує сила $\boldsymbol{f}=(3;-2;-5)$, якщо точка, до якої прикладена сила, рухаючись прямолінійно, переміщується з точки $A(2;-3;5)$ в точку $B(3;-2;-1)$.

2.51. Дано вершини чотирикутника $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$ і $D(-5;-5;3)$. Довести, що його діагоналі AC і BD взаємно перпендикулярні.

2.53. Обчислити косинус кута, утвореного векторами $\boldsymbol{a}=(2;-4;4)$ і $\boldsymbol{b}=(-3;2;6)$.

2.55. Дано вершини трикутника $A(3;2;-3)$, $B(5;1;-1)$ і $C(1;-2;1)$. Знайти його зовнішній кут при вершині A.

2.63. Знайти проекцію вектора $\boldsymbol{s}=(4;-3;2)$ на вісь, яка складає з координатними осями рівні гострі кути.

2.75. Дано вектори $\boldsymbol{a}=(3;-1;-2)$ і $\boldsymbol{b}=(1;2;-1)$. Знайти координати векторних добутків:

1) $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$; 2) $[(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),\boldsymbol{b}]$; 3) $[(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}),(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})]$.

2.78. Сила $\boldsymbol{P}=(2;-4;5)$ прикладена до точки $M_0(4;-2;3)$. Визначити момент цієї сили відносно точки $A(3;2;-1)$.

2.80. Сила $\boldsymbol{P}=(2;2;9)$ прикладена до точки $A(4;2;-3)$. Визначити величину і напрямні косинуси моменту цієї сили відносно точки $C(2;4;0)$.

2.82. Дано точки $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$ і $C(5;2;6)$. Обчислити площу трикутника ABC.

2.89. Визначити, якою є трійка векторів $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ (правою чи лівою), якщо:

1) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{j}$; 3) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{k}$;

2.98. Встановити, чи компланарні вектори, якщо:

1) $\boldsymbol{a}=(2;3;-1)$, $\boldsymbol{b}=(1;-1;3)$, $\boldsymbol{c}=(1;9;-11)$;

3) $\boldsymbol{a}=(2;-1;2)$, $\boldsymbol{b}=(1;2;-3)$, $\boldsymbol{c}=(3;-4;7)$.

2.100. Обчислити об'єм тетраедра, вершинами якого є точки $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$, $D(4;1;3)$.

Домашнє завдання.

2.21. В трикутнику ABC вектор $\overline{AB}=\boldsymbol{m}$ і вектор $\overline{AC}=\boldsymbol{n}$. Побудувати кожен із векторів:

1) $\frac{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}}{2}$; 2) $\frac{\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}}{2}$; 3) $\frac{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}}{2}$; 4) $-\frac{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}}{2}$.

2.27. Визначити при яких значеннях α і β вектори $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\beta\boldsymbol{k}$ і $\boldsymbol{b}=\alpha\,\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ колінеарні.

2.31. Знайти орт вектора $\boldsymbol{a}=(3;4;-12)$.

2.41. Вектори $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ взаємно перпендикулярні. Вектор $\boldsymbol{c}$ утворює з ними кути рівні $\frac{\pi}{3}$. Знаючи, що $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=5$, $|\boldsymbol{c}|=8$, обчислити 1) $(\boldsymbol{3a}-\boldsymbol{2b})(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{3c})$.

2.48. Дано точки $A(-1;3;-7)$, $B(2;-1;5)$ і $C(0;1;-5)$. Обчислити:

1) $\left(2\overline{AB}-\overline{CB}\right)\left(2\overline{BC}+\overline{BA}\right)$; 2) $\sqrt{\overline{AB}^2}$

2.50. Дано три сили $\boldsymbol{M}=(3;-4;2)$, $\boldsymbol{N}=(2;3;-5)$ і $\boldsymbol{P}=(-3;-2;4)$, які прикладені до однієї точки. Обчислити, яку роботу виконує рівнодійна цих сил, коли точка, до якої вона прикладена, рухаючись прямолінійно, переміщується з точки $M_1(5;3;-3)$ в точку $M_2(4;-1;-4)$.

2.52. Визначити, при якому значенні α вектори $\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ і $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\alpha\boldsymbol{k}$ взаємно перпендикулярні.

2.54. Дано вершини трикутника $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$ і $C(3;-2;1)$. Знайти його внутрішній кут при вершині B.

2.66. Обчислити проекцію вектора $\boldsymbol{a}=(5;2;5)$ на вісь вектора $\boldsymbol{b}=(2;-1;2)$.

2.76. Дано точки $A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$ і $C(3;2;1)$. Знайти координати векторних добутків:

1) $[\overline{AB},\overline{BC}]$; 2) $[(\overline{BC}-2\overline{CA}],\overline{CB}]$.

2.79. Сила $\boldsymbol{Q}=(3;4;-2)$ прикладена до точки $C(2;-1;-2)$. Визначити величину і напрямні косинуси моменту цієї сили відносно початку координат.

2.83. Дано вершини трикутника $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$ і $C(1;3;-1)$. Обчислити довжину його висоти, опущеної з вершини B на сторону AC.

2.89. Визначити, якою є трійка векторів $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ (правою чи лівою), якщо:

1) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{j}$; 2) **(ДЗ)** $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{j}$.

2.97. Дано три вектори: $\boldsymbol{a}=(1;-1;3)$, $\boldsymbol{b}=(-2;2;1)$ і $\boldsymbol{c}=(3;-2;5)$. Обчислити $\boldsymbol{abc}$.

2.98. Встановити, чи компланарні вектори, якщо:

1) $\boldsymbol{a}=(2;3;-1)$, $\boldsymbol{b}=(1;-1;3)$, $\boldsymbol{c}=(1;9;-11)$;

2) $\boldsymbol{a}=(3;-2;1)$, $\boldsymbol{b}=(2;1;2)$, $\boldsymbol{c}=(3;-1;-2)$.

2.101. Дано вершини тетраедра $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$. Знайти довжину його висоти, опущеної з вершини D.

Відповіді:

2.26. $|\boldsymbol{b}|=3|\boldsymbol{a}|$. В протилежні сторони. **2.27.** $\alpha=4$; $b=-1$. **2.29.** $|\overline{AB}|=2|\overline{CD}|$. В одну сторону. **2.30.** $\left(\frac{6}{7};-\frac{2}{7};-\frac{3}{7}\right)$. **2.31.** $\left(\frac{3}{13};\frac{4}{13};-\frac{12}{13}\right)$. **2.40.** 1) –6; 2) 9; 3) 16; 4) 13; 5) –61; 6) 37; 7) 73. **2.41.** 1) –62; 2) 162; 3) 373. **2.46.** 1) 22; 2) 6; 3) 7; 4) –200; 5) 129; 6) 41. **2.48.** 1) –524; 2) 13; 3) 3; 4) (-70; 70; -350), (-78; 104; -312). **2.49.** 31. **2.50.** 13. **2.52.** -6. **2.53.** $\frac{5}{21}$. **2.54.** 45°. **2.55.** $\arccos\left(-\frac{4}{9}\right)$. **2.63.** $\sqrt{3}$. **2.66.** 6. **2.75.** 1) $(5;1;7)$; 2) $(10;2;14)$; 3) $(20;4;28)$. **2.76.** 1) $(6;-4;-6)$; 2) $(-12;8;12)$. **2.78.** $(-4,3;4)$. **2.79.** 15; $\cos\alpha=\frac{2}{3}$; $\cos\beta=-\frac{2}{15}$; $\cos\gamma=\frac{11}{15}$. **2.80.** 28; $\cos\alpha=-\frac{3}{7}$; $\cos\beta=-\frac{6}{7}$; $\cos\gamma=\frac{2}{7}$. **2.82.** 14. **2.83.** 5. **2.89.** 1) права; 2) ліва; 3) ліва; 4) права; 5) вектори компланарні; 6) ліва. **2.97.** –7. **2.98.** 1) компланарні; 2) не компланарні; 3) компланарні. **2.100.** 3. **2.101.** 11. **2.102.** $D_1(0;8;0)$; $D_2(0;-7;0)$.

Контрольні питання

Поняття вектора.
Дії над векторами.
Координати вектора.
Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів.
Розклад вектора за базисом.
Поділ відрізка в заданому відношенні.

Приклади тестових завдань

Знайдіть довжину вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(2;4;7)$, $B(-1;3;8)$.

Вкажіть пару колінеарних векторів.

Знайдіть вектор $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (4;-2;1)$, $\vec{b} = (2;-1;3)$.

Дано чотирикутник $ABCD$. Знайдіть $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Дано вектор $\vec{a} = (4;5;-3)$. Знайдіть координати орта $\overrightarrow{a_0} = \dfrac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$.

Знайдіть початок вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $\overrightarrow{AB} = (-3;2;7)$, $B(4;-1;5)$.

Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(4;-2;3)$, $B(1;2;-2)$.

Знайдіть координату a_x вектора $\vec{a} = (a_x;12;4)$, якщо $|\vec{a}| = 13$.

Дано вектор $\vec{a} = (2;7;-3)$. Знайдіть $|\vec{a}|$.

Знайдіть вектор $\vec{c} = \dfrac{3}{2}\vec{a} - 2\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (4;-2;6)$, $\vec{b} = (1;2;-3)$.

Якщо вектори лежать на одній прямій або на паралельних прямих, то їх називають…

Якщо вектори лежать в одній площині або у паралельних площинах, то їх називають…

Якщо вектори лежать на перпендикулярних прямих, то їх називають…

Які два вектори площини утворюють базис цієї площини?

Які три вектори утворюють базис у просторі?

Дано вектор $\vec{a} = (6;0;-8)$. Знайдіть $\left|\dfrac{1}{2}\vec{a}\right|$.

Дано вектори $\vec{a} = (-2;1;-3)$, $\vec{b} = (3;1;1)$. Знайдіть $|\vec{a} + \vec{b}|$.

Дано чотирикутник $ABCD$. Знайдіть $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

Дано вектор $\vec{a} = (1;2;-2)$. Знайдіть координати орта $\overrightarrow{a_0} = \dfrac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$.

Знайдіть початок вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $\overrightarrow{AB} = (1;2;-2)$, $B(3;1;1)$.

Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(2;-1;3)$, $B(3;1;1)$.

Дано чотирикутник $ABCD$. Знайдіть $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

Дано чотирикутник $ABCD$. Знайдіть $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$.

Знайдіть довжину вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(2;4;2)$, $B(3;-1;2)$.

Знайдіть довжину вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(2;0;-3)$, $B(-1;3;-2)$.

Вкажіть пару колінеарних векторів.

Знайдіть координати вектора $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$, якщо $\vec{a}=(4;-2;1)$, $\vec{b}=(6;-3;9)$.

Вкажіть вектор колінеарний вектору $\vec{a}=(4;-2;1)$.

Косинуси кутів, які вектор утворює з осями координат називають …

Базис називають ортонормованим, якщо вектори, що його утворюють…

Прямокутну афінну систему координат називають декартовою, якщо її базис утворюють вектори…

Вкажіть проекцію вектора $\vec{a}=(4;-2;-1)$ на вісь ординат.

Вкажіть проекцію вектора $\vec{a}=(4;-2;-1)$ на вісь аплікат.

Якщо два вектори утворюють базис площини, то вони обов’язково…

Якщо три вектори утворюють базис у просторі, то вони обов’язково…

Знайдіть скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=7$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{4}$.

Вкажіть пару перпендикулярних векторів.

Дано $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-5$. Знайдіть $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$.

Дано вектори $\vec{a}=(4;1;-2)$, $\vec{b}=(-1;2;2)$. Знайдіть проекцію $np_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

Знайдіть скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}$, якщо $\vec{a}=(2;5;-3)$, $\vec{b}=(-1;3;4)$.

Дано вектори $\vec{a}=(-3;-1;2)$, $\vec{b}=(3;-1;4)$. Знайдіть $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$.

Дано $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=6$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$. Знайдіть $(2\vec{a})\cdot\vec{b}$.

Дано $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=6$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{6}$. Знайдіть модуль векторного добутку $\vec{a}\times\vec{b}$

.

При якому значенні λ вектори $\vec{a}=(-3;-1;2)$ і $\vec{b}=(3;-1;\lambda)$ перпендикулярні?

Знайдіть мішаний добуток векторів $\vec{a}=(2;4;-3)$, $\vec{b}=(0;-2;1)$, $\vec{c}=(0;0;-2)$.

Якщо скалярний добуток двох векторів дорівнює нулю, то ці вектори…

Якщо векторний добуток двох векторів дорівнює нуль-вектору, то ці вектори…

Якщо мішаний добуток трьох векторів дорівнює нулю, то ці вектори…

Якщо скалярний добуток двох векторів додатний, то ці вектори…

Якщо два вектори утворюють тупий кут, то скалярний добуток цих векторів…

Якщо два вектори утворюють гострий кут, то скалярний добуток цих векторів…

Якщо два вектори утворюють прямий кут, то скалярний добуток цих векторів…

Дано $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=6$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3}$. Знайдіть скалярний добуток $\left(\frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$.

Дано $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=6$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3}$. Знайдіть скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

При якому значенні λ вектори $\vec{a}=(-3;2)$ і $\vec{b}=(2;-\lambda)$ перпендикулярні?

Знайдіть скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}$, якщо $\vec{a}=(2;3;-3)$, $\vec{b}=(-1;5;4)$.

Знайдіть скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}$, якщо $\vec{a}=(2;-3;-3)$, $\vec{b}=(-1;-5;4)$.

Дано $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=6$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-5$. Знайдіть $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$.

Дано $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$. Знайдіть $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$.

Дано вектори $\vec{a}=(-1;1;-3)$, $\vec{b}=(-1;2;2)$. Знайдіть проекцію $np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

Дано вектори $\vec{a}=(0;0;-3)$, $\vec{b}=(-1;2;2)$. Знайдіть проекцію $np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

Дано $|\vec{a}|=\frac{3}{2}$, $|\vec{b}|=12$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{6}$. Знайдіть модуль векторного добутку $\vec{a}\times\vec{b}$.

Дано $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=3$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{6}$. Знайдіть модуль векторного добутку $\vec{a}\times\vec{b}$.

Якщо два вектори утворюють прямий кут, то $np_{\vec{b}}\vec{a}$ …

Якщо два вектори утворюють тупий кут, то $np_{\vec{b}}\vec{a}$ …

Приклад індивідуального завдання

1. Дано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$. Знайти: 1) довжину ребра A_1A_2; 2) кут між ребрами A_1A_2 і A_2A_3; 3) кут між ребром A_1A_2 і гранню $A_2A_3A_4$; 4) площу грані $A_2A_3A_4$; 5) об'єм піраміди; 6) висоту піраміди A_1H, використовуючи проекцію вектора на вісь.

$A_1(4; 4; 5)$, $A_2(10; 2; 3)$, $A_3(-3; 5; 4)$, $A_4(6;-2; 2)$.

2. Перевірити, чи утворюють вектори $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ базис і знайти координати вектора $\boldsymbol{d}$ в цьому базисі:

$\boldsymbol{a} = (-2;1;3)$, $\boldsymbol{b} = (3;-6;2)$, $\boldsymbol{c} = (-5;-3;-1)$, $\boldsymbol{d} = (31;-6;22)$.

Лабораторна робота № 6. *Аналітична геометрія*

***Мета*:** ознайомитись з основними типами рівнянь лінійних геометричних об'єктів: прямої на площині, площини та прямої у просторі.

Література:

1. Михайленко В.В., Добряков Л.Д. Вища математика. Книга 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Підручник. – Житомир: ЖДТУ, 2004 р. – 554 с.
2. В.І., Бондарчук В. М., Величко Д. О., Головня Р.М. та ін.. Практикум з вищої математики. Навчальний посібник / за ред.. В. О. Коваля – Житомир: ЖДТУ, 2008. – 448 с.

Теоретичні відомості
1. Пряма на площині

Є кілька типів рівнянь прямої на площині. В залежності від умови задачі, зручно скористатись для її розв'язання тим чи іншим типом рівняння.

а) *Загальне рівняння прямої на площині*

$$Ax + By + C = 0 . \qquad (1)$$

У прямокутній декартовій системі координат пряма (1) перпендикулярна вектору $\vec{n} = (A; B)$, який називають *нормальним вектором* прямої.

б) *Рівняння прямої, яка проходить через точку* $M_0(x_0; y_0)$ *перпендикулярно вектору* $\vec{n} = (A; B)$

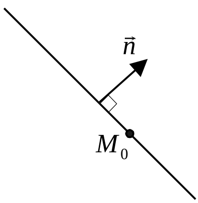
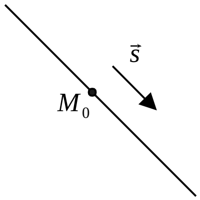


Рис. 1

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 . \qquad (2)$$

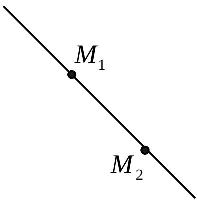
в) *Рівняння прямої, яка проходить через точку* $M_0(x_0; y_0)$ *паралельно напрямному вектору* $\vec{s} = (l; m)$



$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \qquad (3)$$

Рис. 2

г) *Рівняння прямої, яка проходить через точки* $M_1(x_1; y_1)$ *та* $M_2(x_2; y_2)$

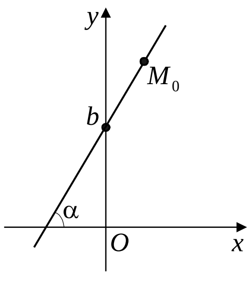


$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (4)$$

Рис. 3

Зауваження. Якщо $x_1 = x_2$, то рівняння прямої має вигляд $x = x_1$; аналогічно при $y_1 = y_2$ рівняння прямої має вигляд $y = y_1$.

д) *Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*



$$y = kx + b, \qquad (5)$$

Рис. 4

де $k = \operatorname{tg}\alpha$ – *кутовий коефіцієнт*.

е) *Рівняння прямої, яка проходить через точку* $M_0(x_0; y_0)$ *і має кутовий коефіцієнт* k

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (6)$$

Якщо дві прямі задані загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2=0$, то один з кутів між ними знаходиться з формули

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \qquad (7)$$

Умова перпендикулярності прямих:

$$A_1A_2+B_1B_2=0. \qquad (8)$$

Умова паралельності прямих:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2} \qquad (9)$$

(при $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ № $\frac{C_1}{C_2}$ прямі паралельні, при $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ прямі співпадають).

Якщо дві прямі задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y=k_1x+b_1$ і $y=k_2x+b_2$, то один з кутів між ними знаходиться з формули

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \qquad (10)$$

Умова перпендикулярності прямих:

$$k_1k_2=-1. \qquad (11)$$

Умова паралельності прямих:

$$k_1=k_2. \qquad (12)$$

Відстань d від точки $M_0\left(x_0;y_0\right)$ до прямої $Ax+By+C=0$ обчислюють за формулою

$$d=\frac{\left|Ax+By+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (13)$$

2. Площина у просторі

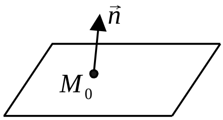
Є кілька типів рівнянь площини у просторі.

а) *Загальне рівняння площини*

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (14)$$

У прямокутній декартовій системі координат площина (14) перпендикулярна вектору $\vec{n}=\left(A;B;C\right)$, який називається *нормальним вектором* площини.

б) *Рівняння площини, яка проходить через точку* $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ *перпендикулярно до вектора* $\vec{n}=\left(A;B;C\right)$



$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (15)$$

Рис. 5

в) *Рівняння площини, яка проходить через точку* $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *паралельно неколінеарним векторам* $\vec{s}_1=(l_1;m_1;n_1)$ *і* $\vec{s}_2=(l_2;m_2;n_2)$

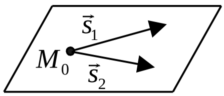


Рис. 6

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0. \qquad (16)$$

г) *Рівняння площини, яка проходить через точки* $M_1(x_1;y_1;z_1)$ *і* $M_2(x_2;y_2;z_2)$ *паралельно вектору* $\vec{s}=(l;m;n)$

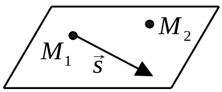


Рис. 7

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0. \qquad (17)$$

д) *Рівняння площини, яка проходить через точки* $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ *і* $M_3(x_3;y_3;z_3)$

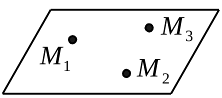


Рис. 8

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (18)$$

Один з кутів φ між двома площинами $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і

$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ знаходиться як кут між їх нормальними векторами $\vec{n}_1=\left(A_1;B_1;C_1\right)$ і $\vec{n}_2=\left(A_2;B_2;C_2\right)$ з формули

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (19)$$

Умова перпендикулярності площин – перпендикулярність їх нормальних векторів $\vec{n}_1=\left(A_1;B_1;C_1\right)$ і $\vec{n}_2=\left(A_2;B_2;C_2\right)$:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \qquad (20)$$

Умова паралельності площин – паралельність їх нормальних векторів:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \qquad (21)$$

(при $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\text{№}\frac{D_1}{D_2}$ площини паралельні, при $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$ площини співпадають).

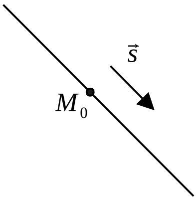
Відстань d від точки $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$ обчислюють за формулою

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (22)$$

3. Пряма у просторі

Є декілька типів рівнянь прямої у просторі.

а) *Рівняння прямої, яка проходить через точку* $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ *паралельно вектору* $\vec{s}=\left(l;m;n\right)$, який називається *напрямним вектором* прямої:



$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \qquad (23)$$

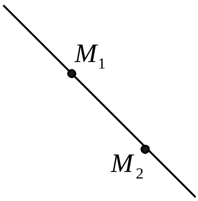
Рис. 9

Рівняння (23) називають *канонічними рівняннями* прямої у просторі.

У *параметричній формі* ці рівняння мають вигляд

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt, \quad t \in R. \end{cases}$$

б) *Рівняння прямої, яка проходить через дві точки* $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$



$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (24)$$

Рис. 10

У параметричній формі рівняння (24) мають вигляд

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2-x_1)t \\ y = y_1 + (y_2-y_1)t \\ z = z_1 + (z_2-z_1)t, \quad t \in R. \end{cases}$$

в) Лінією перетину площин $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ є пряма. *Загальними рівняннями* цієї прямої називаються рівняння

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

Відстань від точки P до прямої $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ знаходиться за формулою

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_0P}\times\vec{s}\right|}{|\vec{s}|}, \qquad (25)$$

де $\vec{s} = (l;m;n)$ – напрямний вектор прямої, M_0 – будь-яка точка на прямій, наприклад точка з координатами $(x_0; y_0; z_0)$.

Кут між прямими $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$ і $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$

знаходиться як кут між їх напрямними векторами $\vec{s}_1 = (l_1; m_1; n_1)$ і $\vec{s}_2 = (l_2; m_2; n_2)$ з формули

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \qquad (26)$$

Кут між прямою $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ і площиною $Ax + By + Cz + D = 0$ знаходиться з формули

$$\sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \qquad (27)$$

Завдання для роботи в аудиторії.

3.1. Визначити, які з точок $M_1(3;1)$, $M_2(2;3)$, $M_3(6;3)$, $M_4(-3;-3)$, $M_5(3;-1)$, $M_6(-2;1)$ лежать на прямій $2x - 3y - 3 = 0$ і які не лежать на ній.

3.5. Знайти точку перетину двох прямих $3x - 4y - 29 = 0$, $2x + 5y = 19 = 0$.

3.14. Дано пряму $2x + 3y + 4 = 0$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;1)$:

1) паралельно до даної прямої;
2) перпендикулярно до даної прямої.

3.17. Знайти проекцію точки $P(-6;4)$ на пряму $4x - 5y + 3 = 0$.

3.19. В кожному з випадків знайти рівняння прямої, яка проходить паралельно до двох заданих прямих та посередині між ними:

1) $3x - 2y - 1 = 0$, 2) $5x + y + 3 = 0$,

3.25. Дано вершини трикутника $M_1(2;1)$, $M_2(-1;-1)$, $M_3(3;2)$. Скласти рівняння його висот.

3.29. Скласти рівняння сторін і медіан трикутника з вершинами $A(3;2)$, $B(5;-2)$ і $C(1;0)$.

3.30. Через точки $M_1(-1;2)$ і $M_2(2;3)$ проведено пряму. Визначити точки перетину цієї прямої з осями координат.

3.38. Визначити кут φ між двома прямими:

1) $5x - y + 7 = 0$, $3x + 2y = 0$;

3.39. Дано пряму $2x+3y+4=0$. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2;1)$ під кутом 45^o до даної прямої.

3.40. Точка $A(-4;5)$ є вершиною квадрата, діагональ якого лежить на прямій $7x-y+8=0$. Скласти рівняння сторін та другої діагоналі квадрата.

3.41. Дано дві протилежні вершини квадрата $A(-1;3)$ і $C(6;2)$. Скласти рівняння його сторін.

3.47. Встановити, які з пар прямих перпендикулярні:

2) $3x-4y+1=0$, $x+3y-1=0$; $4x-3y+7=0$;

3.50*. Дано дві вершини трикутника $M_1(-10;2)$ і $M_2(6;4)$. Його висоти перетинаються в точці $N(5;2)$ Визначити координати третьої вершини M_3.

3.51*. Дано дві вершини $A(3;-1)$, $B(5;7)$ трикутника ABC і точка $N(4;-1)$ перетину його висот. Скласти рівняння сторін цього трикутника.

3.52*. В трикутнику ABC дано: рівняння сторони AB $5x-3y+2=0$, рівняння висот AM $4x-3y+1=0$ і BN $7x+2y-22=0$. Скласти рівняння двох інших сторін і третьої висоти цього трикутника.

3.53*. Скласти рівняння сторін трикутника ABC, якщо дано одну з його вершин $A(1;3)$ і рівняння двох медіан $x-2y+1=0$ і $y-1=0$.

3.54*. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо дано одну з його вершин $B(-4;-5)$ і рівняння двох висот $5x+3y-4=0$ і $3x+8y+13=0$.

3.55*. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну з його вершин $A(4;-1)$ і рівняння двох бісектрис $x-1=0$ і $x-y-1=0$.

3.56*. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $B(2;6)$, а також рівняння висоти $x-7y+15=0$ і бісектриси $7x+y+5=0$, проведених з однієї вершини.

3.57*. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $B(2;-1)$, а також рівняння висоти $3x-4y+27=0$ і бісектриси $x+2y-5=0$, проведених з різних вершин.

3.58*. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $C(4;-1)$, а також рівняння висоти $2x-3y+12=0$ і медіани $2x+3y=0$, проведених з однієї вершини.

3.59*. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $B(2;-7)$, а також рівняння висоти $3x+y+11=0$ і медіани $x+2y+7=0$, проведених з різних вершин.

3.60*. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $C(4;3)$, а також рівняння бісектриси $x+2y-5=0$ і медіани $4x+13y-10=0$, проведених з однієї вершини.

3.63*. Серед прямих, що проходять через точку $P(3;0)$, знайти таку, відрізок якої знаходиться між прямими $2x-y-2=0$, $x+y+3=0$ і ділиться точкою P навпіл.

3.64*. Через точку $P(0;1)$ проведено довільним чином прямі. Довести, що серед них немає прямої, відрізок якої, розміщений між прямими $x-2y-3=0$ і $x-2y+17=0$, ділився б точкою P навпіл.

3.65*. Скласти рівняння прямої, що проходить через початок координат, знаючи, що довжина її відрізка, розміщеного між прямими $2x-y+5=0$ і $2x-y+10=0$ дорівнює $\sqrt{10}$.

3.66*. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $C(-5;4)$, знаючи, що довжина її відрізка, розміщеного між прямими $x+2y+1=0$ і $x+2y-1=0$ дорівнює 5.

3.67. Дано прямі:

1) $2x+3y-6=0$; 2) $4x-3y+24=0$;

Скласти для них рівняння "у відрізках на осях" і побудувати ці прямі.

3.68. Обчислити площу трикутника, що відтинається прямою $3x-4y-12=0$ від координатного кута.

3.80. Обчислити відстань між паралельними прямими в кожному з випадків:

1) $3x-4y-10=0$, $6x-8y+5=0$;

Домашнє завдання.

3.2. Точки P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 лежать на прямій $3x-2y-6=0$; їх абсциси відповідно дорівнюють числам: 4, 0, 2, –2, –6. Визначити ординати цих точок.

3.6. Сторони AB, BC і AC трикутника ABC задані відповідно рівняннями $4x+3y-5=0$, $x-3y+10=0$, $x-2=0$. Визначити координати його вершин.

3.15. Дано рівняння двох сторін прямокутника $2x-3y+5=0$, $3x+2y-7=0$ і одна з його вершин $A(2;-3)$. Скласти рівняння двох інших сторін цього прямокутника.

3.18. Знайти точку Q, симетричну точці $P(-5;13)$ відносно прямої $2x-3y-3=0$.

3.26. Сторони трикутника задано рівняннями $4x-y-7=0$, $x+3y-31=0$, $x+5y-7=0$. Визначити точку перетину висот трикутника.

3.38. Визначити кут φ між двома прямими:

2) $3x-2y+7=0$, $2x+3y-3=0$;

3.41. Дано дві протилежні вершини квадрата $A(-1;3)$ і $C(6;2)$. Скласти рівняння його сторін.

3.47. Встановити, які з пар прямих перпендикулярні:

1) $3x-y+5=0$, 2) $3x-4y+1=0$,

3.49. Визначити кут φ, утворений двома прямими:

1) $3x-y+5=0$, $2x+y-7=0$;

3.67. Дано прямі:

3) $2x+3y-9=0$;

Скласти для них рівняння “у відрізках на осях” і побудувати ці прямі.

3.80. Обчислити відстань між паралельними прямими в кожному з випадків:

2) $5x-12y+26=0$, $5x-12y-13=0$;

Відповіді:

3.1. M_1, M_3, M_4 - лежать; M_2, M_5, M_6 - не лежать. **3.2.** 3, -3, 0, -6, -12. **3.5.** (3; -5). **3.6.** A(2; -1), B(-1; 3), C(2; 4). **3.14.** 1) $2x+3y-7=0$; 2) $3x-2y-4=0$. **3.15.** $3x+2y=0$, $2x-3y-13=0$. **3.17.** $(-2;-1)$. **3.18.** $(11;-11)$. **3.19.** 1) $3x-2y-7=0$; 2) $5x+y-7=0$; 3) $8x+12y+5=0$; **3.25.** $4x+3y-11=0$, $x+y+2=0$, $3x+2y-13=0$. **3.26.** $(3;4)$. **3.29.** $AB: 2x+y-8=0$, $BC: x+2y-1=0$, $CA: x-y-1=0$. Рівняння медіани, проведеної з вершини $A: x-3=0$; з вершини $B: x+y-3=0$; з вершини $C: y=0$. **3.30.** $(-7;0)$; $\left(0;2\frac{1}{3}\right)$. **3.38.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\varphi=0$ - прямі паралельні; 4) $\mathrm{arctg}\frac{16}{11}$. **3.39.** $x-5y+3=0$ або $5x+y-11=0$. **3.40.** Сторони: $4x+3y+1=0$, $3x-4y+32=0$, $4x+3y-24=0$, $3x-4y+7=0$; діагональ $x+7y-31=0$. **3.41.** $3x-4y+15=0$, $4x+3y-30=0$, $3x-4y-10=0$, $4x+3y-5=0$. **3.47.** Перпендикулярні 1), 3), 4). **3.49.** 1) 45^0; 2) 60^0; 3) 90^0. **3.50.** $(6;-6)$. **3.51.** $4x-y-13=0$, $x-5=0$, $x+8y+5=0$. **3.52.** $3x+4y-22=0$, $2x-7y-5=0$, $3x+5y-23=0$. **3.53.** $x+2y-7=0$, $x-4y-1=0$, $x-y+2=0$. **3.54.** $3x-5y-13=0$, $8x-3y+17=0$, $5x+2y-1=0$. **3.55.** $2x-y+3=0$, $2x+y-7=0$, $x-2y-6=0$. **3.56.** $4x-3y+10=0$, $7x+y-20=0$, $3x+4y-5=0$. **3.57.** $4x+7y-1=0$, $y-3=0$, $4x+3y-5=0$. **3.58.** $3x+7y-5=0$, $3x+2y-10=0$, $9x+11y+5=0$. **3.59.** $x-3y-23=0$, $7x+9y+19=0$, $4x+3y+13=0$. **3.60.** $x+y-7=0$, $x+7y+5=0$, $x-8y+20=0$. **3.61.** $2x+9y-65=0$, $6x-7y-25=0$, $18x+13y-41=0$. **3.62.** $x+2y=0$, $23x+25y=0$. **3.63.** $8x-y-24=0$. **3.65.** $3x+y=0$, $x-3y=0$. **3.66.** $3x+4y-1=0$, $7x+24y-61=0$. **6.67.** 1) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$; 2) $\frac{x}{-6}+\frac{y}{8}=1$; 3) $\frac{x}{9/2}+\frac{y}{3}=1$; 4) $\frac{x}{2/3}+\frac{y}{-2/5}=1$; 5) $\frac{x}{1/5}+\frac{y}{1/2}=1$. **3.68.** 6 кв. од. **3.80.** 1) $d=2{,}5$; 2) $d=3$; 3) $d=0{,}5$; 4) $d=3{,}5$.

Контрольні питання

Види рівнянь прямої на площині.
Види рівнянь площини.
Види рівнянь прямої в просторі.

Приклади тестових завдань

Яке з наведених рівнянь є рівнянням прямої на площині?

Яке з наведених рівнянь є рівнянням прямої у відрізках на осях?

Яке з наведених рівнянь є рівнянням прямої на площині, яка перпендикулярна осі OX ?

Яке з наведених рівнянь є рівнянням прямої, що проходить через початок координат?

Знайдіть координати точок перетину прямих $y=3x-2$ та $y=2x+1$.

Яке з наведених рівнянь є рівнянням прямої, що проходить через початок координат?

Яке з наведених рівнянь є рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом?

Яке з наведених рівнянь задає площину?

Яке з наведених тверджень є справедливим для двох прямих у просторі з напрямними векторами $\overline{s_1}=(1,2,3)$ та $\overline{s_2}=(-1,-2,-3)$?

На площині $2x+3y-z+4=0$ знаходиться точка, у якої відомі координати $x=10$, $z=3$. Знайдіть координату y ?

Які з наведених рівнянь є рівняннями прямої, що проходить через точку $M(2;-1;3)$ паралельно вектору $\overline{a}=(3;-1;2)$?

Яке з наведених рівнянь є рівнянням площини, що проходить через точку $A(-7;0;3)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(1;2;4)$?

Яке з наведених рівнянь є рівнянням прямої, що проходить через точку $M(1;0;-3)$ перпендикулярно до площини $x-3y+2z+4=0$?

Вкажіть точку симетричну точці $M(-2;1;3)$ відносно початку координат $O(0;0;0)$?

Яка з наведених точок лежить на прямій $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-5}{-1}$?

Яке з наведених рівнянь задає пряму в просторі?

Яке з наведених рівнянь задає площину?

Яка з наведених точок лежить на прямій $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-5}{-3}$?

Яка з наведених точок лежить на площині $-x+2y-4z-4=0$.

Вкажіть точку симетричну точці $M(2;1;3)$ відносно початку координат $O(0;0;0)$?

Вкажіть точку симетричну точці $M(2;-1;3)$ відносно координатної площини xOy ?

Вкажіть точку симетричну точці $M(2;-1;3)$ відносно осі Oz ?

Вкажіть координати проекції точки $M(4;3;2)$ на площину xOy .

Вкажіть координати проекції точки $M(4;3;2)$ на площину yOz .

Вкажіть координати проекції точки $M(4;3;2)$ на площину xOz.

Вкажіть точку, яка належить площині xOy.

Вкажіть точку, яка належить осі Oz.

Вкажіть точку, яка належить площині xOz.

Вкажіть точку, яка належить осі Oy.

Знайдіть координати точки перетину площини $6x-4y+5z-120=0$ з віссю абсцис.

Знайдіть координати точки перетину площини $6x-4y+5z-120=0$ з віссю ординат.

Знайдіть координати точки перетину площини $6x-4y+5z-120=0$ з віссю аплікат.

Приклад індивідуального завдання

1. Дано три вершини трикутника ABC:
$A(2;\ 5)$, $B(-3;\ 1)$, $C(0;\ 4)$.

Знайти:

а) рівняння сторони (AB);

б) рівняння висоти (CM);

в) рівняння медіани (AK);

г) точку N перетину медіани AK і висоти CM;

д) рівняння прямої l, що проходить через вершину C паралельно стороні AB;

е) відстань від точки C до прямої AB (через нормальне рівняння прямої).

2. Дано чотири точки $A_1(0;4;5)$, $A_2(3;-2;1)$, $A_3(4;5;6)$, $A_4(3;3;2)$

Скласти рівняння:

а) площини $A_1A_2A_3$;

б) прямої A_1A_2;

в) прямої A_4M, перпендикулярної до площини $A_1A_2A_3$;

г) прямої A_3N, паралельної до прямої A_1A_4.

Зразок завдань контрольної роботи

1. Задано комплексне число $z = \dfrac{8}{1-\sqrt{3}\,i}$. Знайти:

   1) записати число z в алгебраїчній формі;
   2) записати число z в тригонометричній формі;
   3) записати число z в показниковій формі;
   4) знайти z^4;
   5) знайти $\sqrt{z}$.

2. Обчислити добуток матриць

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{pmatrix}.$$

3. Обчислити визначник пониженням порядку до другого:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 0 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

4. Розв’язати систему лінійних рівнянь за правилом Крамера (методом оберненої матриці та за формулами Крамера)

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 4, \\ x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 5. \end{cases}$$

5. Розв’язати систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

ЗМІСТ