Перший курс · економічні спеціальності

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 17

Повний диференціал. Частинні похідні вищих порядків

Мета заняття. Навчитися обчислювати частинні похідні першого та другого порядків, знаходити змішані похідні, складати повний диференціал, використовувати його для наближених обчислень та аналізу економічних моделей.

Короткі теоретичні відомості

Для функції $z = f(x, y)$ повний диференціал першого порядку має вигляд

$$\boxed{dz = f_x(x, y)\,dx + f_y(x, y)\,dy.}$$

Частинні похідні другого порядку:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Якщо змішані похідні неперервні в околі точки, то $f_{xy} = f_{yx}$ (теорема Шварца). Для малих приростів аргументів

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx dz = f_x \Delta x + f_y \Delta y.$$

Матриця других похідних (матриця Гессе):

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Розв’язання завдань

Завдання 1.

Знайти всі частинні похідні першого і другого порядків функції $z = x^3 + 2x^2y - 3xy^2 + y^3$.

Розв’язання. При диференціюванні за x вважаємо y сталою, а при диференціюванні за y — сталою вважаємо x:

$$z_x = 3x^2 + 4xy - 3y^2, \qquad z_y = 2x^2 - 6xy + 3y^2,$$
$$z_{xx} = 6x + 4y, \qquad z_{xy} = 4x - 6y,$$
$$z_{yx} = 4x - 6y, \qquad z_{yy} = -6x + 6y.$$

Відповідь: $z_{xy} = z_{yx} = 4x - 6y$; решта похідних наведені вище.

Завдання 2.

Для $z = x^2y + xy^2$ обчислити $z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yx}, z_{yy}$ та перевірити рівність змішаних похідних.

Розв'язання. Послідовно диференціюємо:

$$z_x = 2xy + y^2, \qquad z_y = x^2 + 2xy,$$
$$z_{xx} = 2y, \qquad z_{xy} = 2x + 2y,$$
$$z_{yx} = 2x + 2y, \qquad z_{yy} = 2x.$$

Відповідь: $z_{xy} = z_{yx} = 2x + 2y$; рівність перевірено.

Завдання 3.

Знайти частинні похідні другого порядку: а) $z = e^{x+y}$; б) $z = e^{xy}$; в) $z = \ln(x^2+y^2)$.

Розв'язання.

а) $z = e^{x+y}$. За правилом похідної складної функції

$$z_x = e^{x+y}, \quad z_y = e^{x+y}; \qquad z_{xx} = z_{xy} = z_{yx} = z_{yy} = e^{x+y}.$$

б) $z = e^{xy}$. Спочатку

$$z_x = ye^{xy}, \qquad z_y = xe^{xy}.$$

Далі застосовуємо правило похідної добутку:

$$z_{xx} = y \cdot ye^{xy} = y^2 e^{xy},$$
$$z_{xy} = (ye^{xy})_y = e^{xy} + y \cdot xe^{xy} = (1+xy)e^{xy},$$
$$z_{yx} = (xe^{xy})_x = e^{xy} + x \cdot ye^{xy} = (1+xy)e^{xy},$$
$$z_{yy} = x \cdot xe^{xy} = x^2 e^{xy}.$$

в) $z = \ln(x^2+y^2)$, $(x,y) \neq (0,0)$. Маємо

$$z_x = \frac{2x}{x^2+y^2}, \qquad z_y = \frac{2y}{x^2+y^2}.$$

Використовуючи правило похідної частки, дістаємо

$$z_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},$$
$$z_{xy} = \frac{-2x \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2},$$
$$z_{yx} = \frac{-2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2},$$
$$z_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Відповідь: Для кожної функції всі чотири похідні другого порядку знайдено; у всіх трьох випадках $z_{xy} = z_{yx}$.

Завдання 4.

Знайти всі частинні похідні другого порядку $z = \sin(xy)$. Перевірити $z_{xy} = z_{yx}$.

Розв'язання. Спочатку застосовуємо правило похідної складної функції:

$$z_x = y\cos(xy), \qquad z_y = x\cos(xy).$$

Диференціюємо ще раз:

$$z_{xx} = y[-\sin(xy)]\,y = -y^2\sin(xy),$$
$$z_{xy} = \cos(xy) + y[-\sin(xy)]\,x = \cos(xy) - xy\sin(xy),$$
$$z_{yx} = \cos(xy) + x[-\sin(xy)]\,y = \cos(xy) - xy\sin(xy),$$
$$z_{yy} = x[-\sin(xy)]\,x = -x^2\sin(xy).$$

Відповідь: $z_{xy} = z_{yx} = \cos(xy) - xy\sin(xy)$.

Завдання 5.

Знайти повний диференціал $z = x^2+3xy-2y^2$ та обчислити dz у точці $(1;2)$, якщо $dx = 0{,}02$, $dy = -0{,}01$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні:

$$z_x = 2x + 3y, \qquad z_y = 3x - 4y.$$

Отже, $dz = (2x+3y)\,dx + (3x-4y)\,dy$. У точці $(1;2)$ маємо $z_x = 8$, $z_y = -5$. Тому

$$dz = 8\cdot 0{,}02 + (-5)\cdot(-0{,}01) = 0{,}16 + 0{,}05 = 0{,}21.$$

Відповідь: $dz = (2x+3y)\,dx + (3x-4y)\,dy$; числове значення $dz = 0{,}21$.

Завдання 6.

Для $z = x^2y^3$ знайти dz та його значення при $x = 2$, $y = 1$, $dx = 0{,}01$, $dy = 0{,}03$.

Розв'язання. Похідні за правилом степеня:

$$z_x = 2xy^3, \qquad z_y = 3x^2y^2.$$

Тоді

$$dz = 2xy^3\,dx + 3x^2y^2\,dy.$$

Підставляємо дані: $z_x(2,1) = 4$, $z_y(2,1) = 12$, звідси

$$dz = 4\cdot 0{,}01 + 12\cdot 0{,}03 = 0{,}04 + 0{,}36 = 0{,}40.$$

Відповідь: $dz = 2xy^3\,dx + 3x^2y^2\,dy$; $dz = 0{,}40$.

Завдання 7.

Знайти dz для $z = \ln(x^2+y^2)$ та обчислити його в точці $(3;4)$ при $dx = 0{,}02$, $dy = -0{,}01$.

Розв'язання. Застосовуємо формулу похідної логарифма складної функції:

$$z_x = \frac{2x}{x^2+y^2}, \qquad z_y = \frac{2y}{x^2+y^2}.$$

Тому

$$dz = \frac{2x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{2y}{x^2+y^2}\,dy.$$

У точці $(3;4)$ знаменник дорівнює $3^2+4^2 = 25$, отже

$$dz = \frac{6}{25}\cdot 0{,}02 + \frac{8}{25}\cdot(-0{,}01) = 0{,}0048 - 0{,}0032 = 0{,}0016.$$

Відповідь: $dz = \dfrac{2x\,dx + 2y\,dy}{x^2+y^2}$; $dz = 0{,}0016$.

Завдання 8.

За допомогою повного диференціала наближено обчислити $\sqrt{4{,}02^2 + 2{,}99^2}$.

Розв'язання. Розглянемо $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Обираємо близьку точку $(4;3)$, оскільки $f(4,3) = 5$. Тоді

$$\Delta x = 4{,}02 - 4 = 0{,}02, \qquad \Delta y = 2{,}99 - 3 = -0{,}01.$$

Частинні похідні:

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

У точці $(4;3)$: $f_x = 4/5$, $f_y = 3/5$. Отже,

$$df = \frac{4}{5}\cdot 0{,}02 + \frac{3}{5}\cdot(-0{,}01) = 0{,}016 - 0{,}006 = 0{,}010.$$

Тому $f(4{,}02, 2{,}99) \approx f(4,3) + df = 5 + 0{,}010 = 5{,}010$.
Відповідь: $\sqrt{4{,}02^2 + 2{,}99^2} \approx 5{,}01$.

Завдання 9.

За допомогою повного диференціала наближено знайти $(1{,}02)^2(1{,}01)^3$.

Розв'язання. Нехай $f(x,y) = x^2y^3$. Візьмемо $(x_0, y_0) = (1,1)$: $f(1,1) = 1$, $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta y = 0{,}01$. Обчислюємо

$$f_x = 2xy^3, \qquad f_y = 3x^2y^2; \qquad f_x(1,1) = 2, \quad f_y(1,1) = 3.$$

Звідси

$$df = 2\cdot 0{,}02 + 3\cdot 0{,}01 = 0{,}04 + 0{,}03 = 0{,}07.$$

Тому $f(1{,}02, 1{,}01) \approx f(1,1) + df = 1 + 0{,}07 = 1{,}07$.
Відповідь: $(1{,}02)^2(1{,}01)^3 \approx 1{,}07$.

Завдання 10.

Для $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ знайти похідні першого і другого порядків, скласти матрицю Гессе та обчислити її в точці $(1;1)$.

Розв'язання. Спочатку

$$f_x = 3x^2 - 3y, \qquad f_y = 3y^2 - 3x.$$

Диференціюємо вдруге:

$$f_{xx} = 6x, \qquad f_{xy} = -3, \qquad f_{yx} = -3, \qquad f_{yy} = 6y.$$

Матриця других похідних:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

Підставляємо $x = 1$, $y = 1$:

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

Завдання 11.

Виробнича функція $Q(K,L) = 5K^{1/2}L^{1/2}$. Знайти Q_K, Q_L, скласти dQ, оцінити зміну випуску при $K = 100$, $L = 64$, $\Delta K = 2$, $\Delta L = 1$ та пояснити економічний зміст.

Розв'язання. 1. За правилом диференціювання степеневої функції

$$Q_K = 5 \cdot \tfrac{1}{2} K^{-1/2} L^{1/2} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{L}{K}},$$

$$Q_L = 5K^{1/2} \cdot \tfrac{1}{2} L^{-1/2} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{K}{L}}.$$

2. Повний диференціал:

$$dQ = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{L}{K}}\,dK + \frac{5}{2}\sqrt{\frac{K}{L}}\,dL.$$

3. При $K = 100$, $L = 64$:

$$Q_K = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{64}{100}} = 2, \qquad Q_L = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{100}{64}} = 3{,}125.$$

Тому

$$\Delta Q \approx dQ = 2 \cdot 2 + 3{,}125 \cdot 1 = 7{,}125.$$

4. Q_K та Q_L — граничні продукти капіталу і праці. За невеликих одночасних збільшень капіталу на 2 одиниці та праці на 1 одиницю випуск орієнтовно зросте на $7{,}125$ одиниці продукції. Початковий випуск $Q(100,64) = 400$.

Відповідь: $Q_K = \frac{5}{2}\sqrt{L/K}$, $Q_L = \frac{5}{2}\sqrt{K/L}$; $\Delta Q \approx 7{,}125$.

Завдання 12.

Сукупні витрати підприємства $C(x,y) = 10000 + 40x + 50y + 0{,}2x^2 + 0{,}3y^2 + 0{,}1xy$. Знайти частинні похідні першого і другого порядків, перевірити змішані похідні, скласти dC та оцінити зміну витрат при $(x,y) = (100,50)$, $\Delta x = 2$, $\Delta y = 1$.

Розв'язання. 1. Знаходимо похідні за кожним аргументом:

$$C_x = 40 + 0{,}4x + 0{,}1y, \qquad C_y = 50 + 0{,}6y + 0{,}1x.$$

C_x та C_y — граничні витрати: наближена додаткова вартість випуску ще однієї одиниці відповідного товару за незмінного випуску іншого.

2–3. Частинні похідні другого порядку:

$$C_{xx} = 0{,}4, \qquad C_{xy} = 0{,}1, \qquad C_{yx} = 0{,}1, \qquad C_{yy} = 0{,}6.$$

Отже, $C_{xy} = C_{yx} = 0{,}1$. Додатні другі похідні C_{xx} і C_{yy} свідчать про зростання відповідних граничних витрат.

4. Повний диференціал:

$$dC = (40 + 0{,}4x + 0{,}1y)\,dx + (50 + 0{,}6y + 0{,}1x)\,dy.$$

5. При $x = 100$, $y = 50$:

$$C_x(100,50) = 40 + 0{,}4 \cdot 100 + 0{,}1 \cdot 50 = 85,$$

$$C_y(100,50) = 50 + 0{,}6 \cdot 50 + 0{,}1 \cdot 100 = 90.$$

Тому

$$\Delta C \approx dC = 85 \cdot 2 + 90 \cdot 1 = 260.$$

6. Диференціал ураховує лише лінійну частину приросту функції. Для даної квадратичної моделі точна зміна дорівнює

$$\begin{aligned}\Delta C &= dC + 0{,}2(\Delta x)^2 + 0{,}3(\Delta y)^2 + 0{,}1\Delta x \Delta y \\ &= 260 + 0{,}2 \cdot 4 + 0{,}3 \cdot 1 + 0{,}1 \cdot 2 \cdot 1 = 261{,}3.\end{aligned}$$

Різниця між точною зміною та оцінкою становить $1{,}3$ грошової одиниці.

Відповідь: $C_{xx} = 0{,}4$, $C_{xy} = C_{yx} = 0{,}1$, $C_{yy} = 0{,}6$; $\Delta C \approx 260$ (точно $261{,}3$).