ЛЕКЦІЯ № 8

Вища математика

Перший курс. Економічні спеціальності

ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

План лекції. 1. Неозначений інтеграл. Таблиця інтегралів. 2. Безпосереднє інтегрування та заміна змінної. 3. Інтегрування частинами. 4. Інтегрування найпростіших раціональних функцій. 5. Визначений інтеграл. 6. Геометричні та економічні застосування.

1. Неозначений інтеграл. Таблиця інтегралів

Означення. Функція $F(x)$ називається *первісною* для $f(x)$ на проміжку I, якщо $F'(x) = f(x)$ для кожного $x \in I$.

Означення. *Неозначеним інтегралом* функції $f(x)$ називають множину всіх її первісних:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.}$$

Тут $f(x)$ — підінтегральна функція, dx — диференціал аргументу, C — довільна стала. Основні властивості (для сталих a, b):

$$\int (af(x) + bg(x))\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx, \qquad \left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$$

Таблиця основних інтегралів (на проміжках, де вирази визначені):

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1), \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1),$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$$

2. Безпосереднє інтегрування та метод заміни змінної

Безпосереднє інтегрування — застосування таблиці та лінійності інтеграла.

Приклад 1. Обчислити $\int (3x^2 - 4x + 5)\,dx$.

Розв'язання. Інтегруємо кожний доданок окремо:

$$\int (3x^2 - 4x + 5)\,dx = 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 5x + C = \boxed{x^3 - 2x^2 + 5x + C}.$$

Приклад 2. Обчислити $\int \left(\frac{2}{x} + 3e^x - \cos x\right) dx$.

Розв'язання. За таблицею інтегралів:

$$\int \left(\frac{2}{x} + 3e^x - \cos x\right) dx = \boxed{2\ln|x| + 3e^x - \sin x + C}.$$

Метод заміни змінної. Якщо $u = \varphi(x)$, то

$$\boxed{\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(\varphi(x)) + C.}$$

Приклад 3. Обчислити $\int 2x\cos(x^2+1)\,dx$.

Розв'язання. Покладемо $u = x^2 + 1$. Тоді $du = 2x\,dx$. Отже,

$$\int 2x\cos(x^2+1)\,dx = \int \cos u\,du = \sin u + C = \boxed{\sin(x^2+1) + C}.$$

Приклад 4. Обчислити $\int \dfrac{3x^2}{x^3+2}\,dx$.

Розв'язання. Нехай $u = x^3 + 2$, $du = 3x^2\,dx$. Тоді

$$\int \frac{3x^2}{x^3+2}\,dx = \int \frac{du}{u} = \boxed{\ln|x^3+2| + C}.$$

3. Інтегрування частинами

Теорема (формула інтегрування частинами). Якщо $u(x)$ і $v(x)$ диференційовні, то

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du.}$$

Метод зручний для добутків многочлена на показникову, логарифмічну або тригонометричну функцію. Вибираємо u так, щоб du було простішим, а dv легко інтегрувалося.

Приклад 5. Обчислити $\int xe^x\,dx$.

Розв'язання. Візьмемо $u = x$, $dv = e^x\,dx$. Тоді $du = dx$, $v = e^x$ і

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = \boxed{e^x(x-1) + C}.$$

Приклад 6. Обчислити $\int \ln x\,dx$, $x > 0$.

Розв'язання. Запишемо $\ln x\,dx = (\ln x)\cdot dx$. Нехай $u = \ln x$, $dv = dx$. Тоді $du = dx/x$, $v = x$:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = \boxed{x\ln x - x + C}.$$

4. Інтегрування найпростіших раціональних функцій

Раціональна функція — частка многочленів $R(x) = P(x)/Q(x)$, $Q(x) \neq 0$. Для простих дробів застосовуємо таблицю; правильні раціональні дроби часто розкладаємо на найпростіші.

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C, \qquad \int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{(x-a)^{1-n}}{1-n} + C \quad (n \neq 1).$$

Приклад 7. Обчислити $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2+x-2}\,dx$.

Розв'язання. Розкладемо знаменник: $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$. Шукаємо A, B:

$$\frac{3x+5}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2},\quad 3x+5=A(x+2)+B(x-1).$$

При $x=1$ маємо $8=3A$, отже $A=8/3$; при $x=-2$ маємо $-1=-3B$, отже $B=1/3$. Тому

$$\boxed{\int \frac{3x+5}{x^2+x-2}\,dx=\frac{8}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{3}\ln|x+2|+C}.$$

Приклад 8. Обчислити $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$.

Розв'язання. Похідна знаменника дорівнює $2x+1$. Заміна $u=x^2+x+1$ дає

$$\boxed{\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx=\ln(x^2+x+1)+C}.$$

5. Визначений інтеграл. Формула Ньютона — Лейбніца

Означення. *Визначений інтеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ — границя інтегральних сум, якщо вона існує. Для неперервної на $[a,b]$ функції інтеграл існує.

Теорема (Ньютона — Лейбніца). Якщо f неперервна на $[a,b]$ і $F'=f$, то

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).}$$

Властивості: $\int_a^b (f+g)\,dx=\int_a^b f\,dx+\int_a^b g\,dx$; $\int_a^b f\,dx=-\int_b^a f\,dx$; $\int_a^b f\,dx=\int_a^c f\,dx+\int_c^b f\,dx$.

Приклад 9. Обчислити $\displaystyle\int_0^2 (3x^2+2x)\,dx$.

Розв'язання. Первісна $F(x)=x^3+x^2$. За формулою Ньютона — Лейбніца:

$$\int_0^2 (3x^2+2x)\,dx=(x^3+x^2)\Big|_0^2=(8+4)-0=\boxed{12}.$$

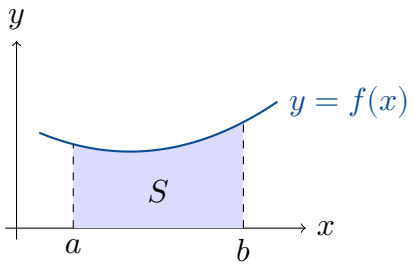
Приклад 10. Обчислити $\displaystyle\int_0^1 2xe^{x^2}\,dx$.

Розв'язання. Замінимо $u=x^2$, $du=2x\,dx$. Нові межі: $x=0\Rightarrow u=0$, $x=1\Rightarrow u=1$:

$$\int_0^1 2xe^{x^2}\,dx=\int_0^1 e^u\,du=e^u\Big|_0^1=\boxed{e-1}.$$

6. Геометричні та економічні застосування

Геометричний зміст. Якщо $f(x)\ge 0$ на $[a,b]$, площа криволінійної трапеції під графіком $y=f(x)$ дорівнює $S=\int_a^b f(x)\,dx$. Якщо $f\ge g$, площа між графіками дорівнює $S=\int_a^b (f-g)\,dx$.



Приклад 11. Знайти площу між графіками $y = 2x$ і $y = x^2$.

Розв'язання. Точки перетину: $2x = x^2 \Rightarrow x = 0$ або $x = 2$. На $[0, 2]$ маємо $2x \geq x^2$, тому

$$S = \int_0^2 (2x - x^2)\, dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \boxed{\frac{4}{3}}.$$

Економічні застосування. Якщо $MC(q) = C'(q)$ — граничні витрати, то приріст загальних витрат при зміні випуску від q_0 до q_1:

$$\boxed{C(q_1) - C(q_0) = \int_{q_0}^{q_1} MC(q)\, dq.}$$

Аналогічно за граничним доходом $MR(q) = R'(q)$ знаходять приріст доходу.

Приклад 12. Граничні витрати підприємства $MC(q) = 4q + 10$ (грн/од.). Знайти приріст витрат при збільшенні випуску від 10 до 20 одиниць.

Розв'язання.

$$\Delta C = \int_{10}^{20} (4q + 10)\, dq = (2q^2 + 10q)\Big|_{10}^{20} = 1000 - 300 = \boxed{700 \text{ грн}}.$$

Надлишки споживача і виробника. Якщо $p_d(q)$ — обернена функція попиту, $p_s(q)$ — обернена функція пропозиції, а (q_*, p_*) — ринкова рівновага, то

$$CS = \int_0^{q_*} (p_d(q) - p_*) dq, \qquad PS = \int_0^{q_*} (p_* - p_s(q)) dq.$$

Приклад 13. Нехай $p_d(q) = 100 - 2q$, $p_s(q) = 20 + 2q$. Знайти рівновагу й надлишки.

Розв'язання. З рівності $100 - 2q = 20 + 2q$ маємо $q_* = 20$, $p_* = 60$. Тоді

$$CS = \int_0^{20} (100 - 2q - 60)\, dq = (40q - q^2)\Big|_0^{20} = \boxed{400},$$

$$PS = \int_0^{20} (60 - 20 - 2q)\, dq = (40q - q^2)\Big|_0^{20} = \boxed{400}.$$

Зауваження. В економічних задачах обов'язково перевіряємо зміст змінних, одиниці вимірювання та допустимий діапазон випуску.