ЛЕКЦІЯ № 8

Лінійна алгебра та аналітична геометрія

Перший курс. Спеціальність «Інженерія програмного забезпечення»

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ. ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

План лекції. 1. Поняття поверхні другого порядку. 2. Сфера та еліпсоїд. 3. Гіперболоїди. 4. Параболоїди. 5. Конічні та циліндричні поверхні. 6. Розпізнавання поверхонь за рівняннями.

1. Поняття поверхні другого порядку

Означення. Поверхнею другого порядку називають множину точок простору, координати яких задовольняють рівняння

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0,$$

де принаймні один із коефіцієнтів при квадратичних членах ненульовий. Після відповідної заміни прямокутних координат (перенесення початку та повороту осей) рівняння багатьох таких поверхонь набувають канонічного вигляду. Різні поверхні зручно розпізнавати за перерізами площинами $x = c$, $y = c$, $z = c$.

Зауваження. Не кожне квадратичне рівняння задає непорожню невироджену поверхню: наприклад, $x^2 + y^2 + z^2 = -1$ не має дійсних точок, а $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ задає лише початок координат.

2. Сфера та еліпсоїд

Означення. Сфера з центром $M_0(a, b, c)$ і радіусом $R > 0$ задається рівнянням

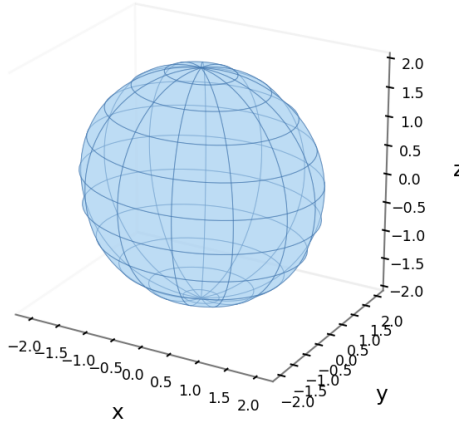
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Приклад 1. Визначити центр і радіус сфери $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$.

Розв’язання. Виділяємо повні квадрати:

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 25.$$

Відповідь. Центр $(1, -2, 3)$, радіус $R = 5$.



Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

Означення. Еліпсоїд із центром у початку координат має канонічне рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a, b, c > 0.$$

Переріз $z = z_0$ при $|z_0| < c$ є еліпсом:

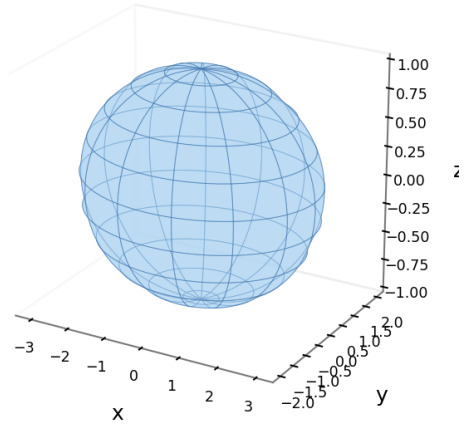
$$\frac{x^2}{a^2(1 - z_0^2/c^2)} + \frac{y^2}{b^2(1 - z_0^2/c^2)} = 1.$$

Якщо $a = b = c$, еліпсоїд є сферою.

Приклад 2. Знайти перетини еліпсоїда $x^2/9 + y^2/4 + z^2 = 1$ з осями координат.

Розв'язання. На осі Ox покладемо $y = z = 0$, звідки $x = \pm 3$. Аналогічно $y = \pm 2$, $z = \pm 1$.

Відповідь. $(\pm 3, 0, 0)$, $(0, \pm 2, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$.



Еліпсоїд із півосями $3, 2, 1$

3. Гіперболоїди

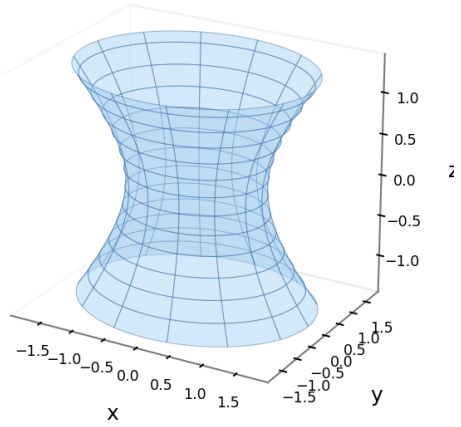
Означення. Однопорожнинний гіперболоїд задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

За фіксованого $z = z_0$ маємо еліпс; при $y = 0$ або $x = 0$ отримуємо гіперболи. Поверхня зв'язна і має найвужчий еліптичний переріз при $z = 0$.

Приклад 3. Визначити переріз $z = 2$ поверхні $x^2/4 + y^2 - z^2/9 = 1$.

Розв'язання. Підставляємо $z = 2$: $x^2/4 + y^2 = 13/9$. Це еліпс із півосями $2\sqrt{13}/3$ та $\sqrt{13}/3$.



Однопорожнинний гіперболоїд

Означення. Двопорожнинний гіперболоїд має рівняння

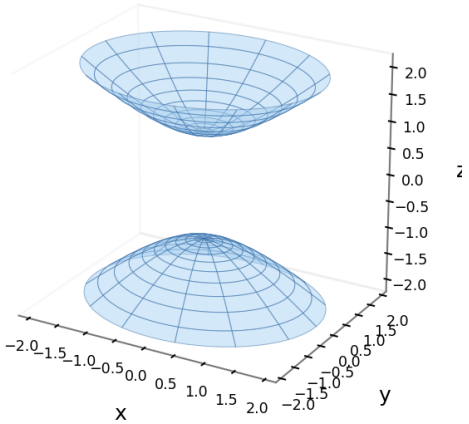
$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Дійсні точки існують лише при $|z| \geq c$; поверхня складається з двох окремих частин. При $z = z_0$, $|z_0| > c$, переріз є еліпсом.

Приклад 4. Знайти вершини поверхні $z^2/16 - x^2/9 - y^2/4 = 1$.

Розв'язання. На осі Oz покладемо $x = y = 0$, тоді $z^2 = 16$.

Відповідь. Вершини $(0, 0, 4)$ і $(0, 0, -4)$.



Двопорожнинний гіперболоїд

4. Параболоїди

Означення. Еліптичний параболоїд задається рівнянням

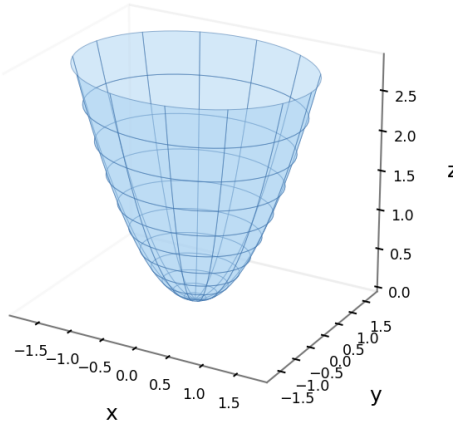
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \qquad a, b > 0.$$

Його вершина — $(0, 0, 0)$. Перерізи $z = h > 0$ — еліпси, а вертикальні перерізи $x = 0$, $y = 0$ — параболи.

Приклад 5. Знайти переріз поверхні $z = x^2/4 + y^2$ площиною $z = 4$.

Розв'язання. $x^2/4 + y^2 = 4$, тобто $x^2/16 + y^2/4 = 1$.

Відповідь. Еліпс із півосями 4 і 2.



Еліптичний параболоїд

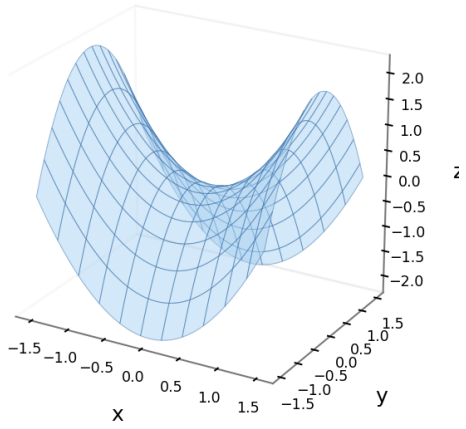
Означення. Гіперболічний параболоїд має канонічне рівняння

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Його називають сідловою поверхнею. У площині $y = 0$ бачимо параболу, напрямлену вгору; у площині $x = 0$ — параболу, напрямлену вниз. При $z = 0$ переріз задається двома прямими $y = \pm(b/a)x$.

Приклад 6. Знайти перерізи поверхні $z = x^2 - y^2$ площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Розв'язання. Відповідно $z = -y^2$, $z = x^2$, $x^2 - y^2 = 0$, тобто $y = \pm x$.



Гіперболічний параболоїд

5. Конічні та циліндричні поверхні

Означення. Еліптичний конус другого порядку задається рівнянням

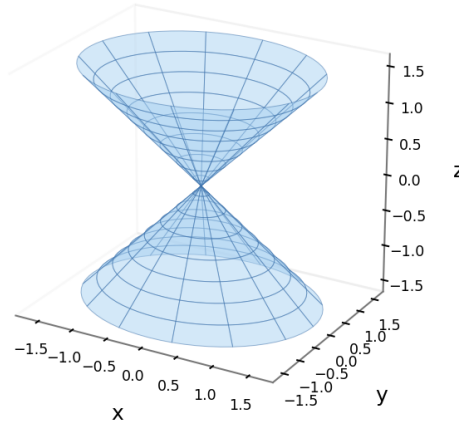
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

Він має дві частини, що сходяться у вершині $(0, 0, 0)$. При $z = h \neq 0$ переріз є еліпсом.

Приклад 7. Знайти переріз конуса $x^2 + y^2 = z^2$ площиною $z = 3$.

Розв'язання. Маємо $x^2 + y^2 = 9$.

Відповідь. Коло радіуса 3.



Круговий конус (дві частини)

Означення. Циліндричною поверхнею називають поверхню, утворену прямими, паралельними фіксованому напрямку. Якщо в рівнянні відсутня змінна z, твірні паралельні осі Oz. Приклади канонічних рівнянь:

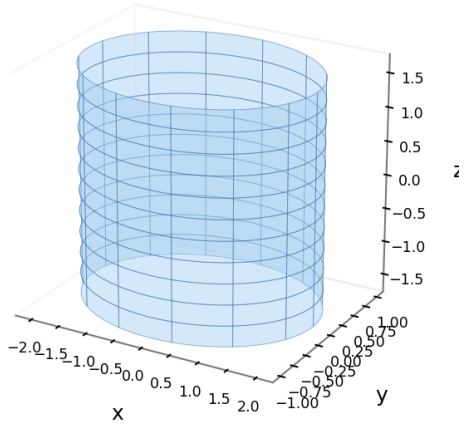
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{(еліптичний циліндр)},$$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (гіперболічний циліндр), $y^2 = 2px$ (параболічний циліндр).

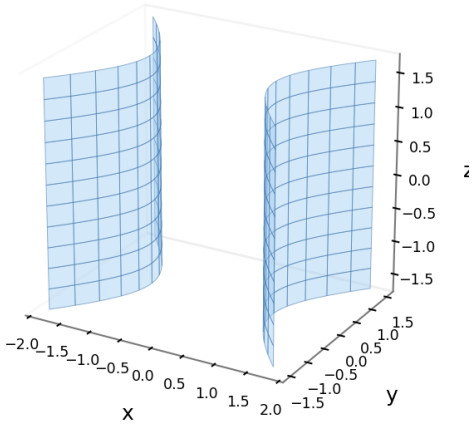
Приклад 8. Яку поверхню задає рівняння $x^2/9 + y^2/4 = 1$ у просторі?

Розв'язання. Змінна z відсутня, тому через кожну точку еліпса в площині Oxy проходить пряма, паралельна Oz.

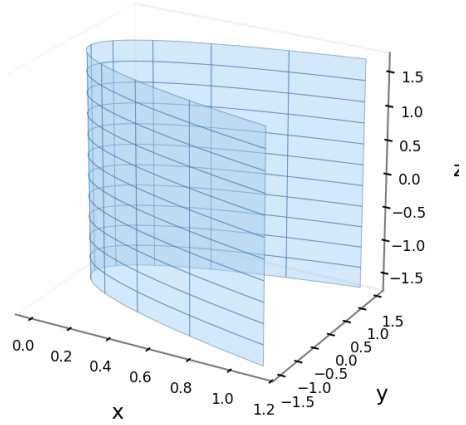
Відповідь. Еліптичний циліндр із півосями 3 і 2.



Еліптичний циліндр



Гіперболічний циліндр $x^2 - y^2 = 1$



Параболічний циліндр $y^2 = 2x$

6. Розпізнавання поверхонь другого порядку

Для рівнянь без змішаних членів зручно виділяти повні квадрати, переносити сталі та ділити на праву частину. Далі аналізуємо знаки квадратів і кількість змінних.

Приклад 9. Розпізнати поверхню $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 5 = 0$.

Розв'язання. Виділяємо квадрати:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 9.$$

Відповідь. Сфера з центром $(2, -1, 3)$ і радіусом 3.

Приклад 10. Розпізнати поверхню $4x^2 + 9y^2 - z^2 - 8x + 18y - 6 = 0$.

Розв'язання. $4(x-1)^2 + 9(y+1)^2 - z^2 = 19$, звідки

$$\frac{(x-1)^2}{19/4} + \frac{(y+1)^2}{19/9} - \frac{z^2}{19} = 1.$$

Відповідь. Однопорожнинний гіперболоїд із центром $(1, -1, 0)$.

Приклад 11. Розпізнати поверхню $x^2 + 4y^2 - 2z + 6 = 0$.

Розв'язання. Переносимо: $z = \frac{x^2}{2} + 2y^2 + 3$.

Відповідь. Еліптичний параболоїд із вершиною $(0, 0, 3)$.

Приклад 12. Розпізнати поверхню $y^2 - 4x = 0$.

Розв'язання. Змінна z відсутня, а $y^2 = 4x$ — парабола в площині Oxy.

Відповідь. Параболічний циліндр із твірними, паралельними Oz.

Зауваження. За наявності змішаних членів xy, xz, yz для повного зведення загального рівняння до канонічного вигляду може знадобитися поворот координат; саме виділення квадратів тоді не завжди достатнє.