ЛЕКЦІЯ № 7

Лінійна алгебра та аналітична геометрія

Перший курс. Спеціальність «Інженерія програмного забезпечення»

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ. ПРЯМА І ПЛОЩИНА

План лекції. 1. Прямокутна система координат у просторі. 2. Рівняння площини. 3. Взаємне розміщення площин. 4. Рівняння прямої у просторі. 5. Взаємне розміщення прямих і площин.

1. Прямокутна система координат у просторі

У просторі три взаємно перпендикулярні осі Ox, Oy, Oz утворюють прямокутну систему координат. Положення точки задається трійкою $M(x, y, z)$.

Означення. Відстань між точками $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$ дорівнює

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Означення. Середина відрізка AB має координати

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

Приклад 1. Знайти відстань між $A(1, -2, 3)$ та $B(5, 1, -3)$ і середину відрізка AB.

Розв'язання. Різниця координат: $(4, 3, -6)$. Отже,

$$AB = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{61}, \qquad M\left(3, -\frac{1}{2}, 0\right).$$

Відповідь. $AB = \sqrt{61}$; $M(3, -\frac{1}{2}, 0)$.

2. Рівняння площини у просторі

Означення. Загальне рівняння площини має вигляд

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

Вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ називається нормальним вектором площини: він перпендикулярни до кожного напрямного вектора, що лежить у площині.

Теорема. Площина, що проходить через $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і має нормальний вектор $\vec{n} = (A, B, C) \neq \vec{0}$, задається рівнянням

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Приклад 2. Скласти рівняння площини через $M_0(1, -2, 3)$ з нормаллю $\vec{n} = (2, -1, 4)$.

Розв'язання. Підставляємо координати:

$$2(x-1)-(y+2)+4(z-3)=0 \iff 2x-y+4z-16=0.$$

Відповідь. $2x-y+4z-16=0$.

Теорема. Через три точки A, B, C, які не лежать на одній прямій, проходить єдина площина; її рівняння:

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix} = 0.$$

Приклад 3. Знайти площину через $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,3)$.

Розв'язання. Точки лежать на координатних осях, тому рівняння у відрізках має вигляд

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1.$$

Помноживши на 6, дістанемо $6x+3y+2z-6=0$. Перевірка підстановкою координат усіх трьох точок дає нуль.

Відповідь. $6x+3y+2z-6=0$.

Означення. Рівняння площини у відрізках на осях:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \qquad abc\neq 0.$$

Зауваження. Числа a, b, c є координатами точок перетину площини з осями Ox, Oy, Oz відповідно. Не кожна площина допускає такий запис.

Приклад 4. Знайти точки перетину площини $2x+3y+6z=12$ з координатними осями.

Розв'язання. Послідовно покладаємо дві координати рівними нулю: $x=6$, $y=4$, $z=2$.

Відповідь. $(6,0,0)$, $(0,4,0)$, $(0,0,2)$.

3. Взаємне розміщення двох площин

Нехай $\alpha_i:\ A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0$, $i=1,2$, та $\vec{n}_i=(A_i,B_i,C_i)$.

Теорема. Площини паралельні тоді й тільки тоді, коли $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ колінеарні, тобто $\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\vec{0}$. За цієї умови площини збігаються, якщо четвірки коефіцієнтів пропорційні.

Теорема. Площини перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли

$$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Означення. Гострий кут φ між площинами дорівнює гострому куту між їх нормалями:

$$\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Приклад 5. Дослідити площини $x + 2y - z + 1 = 0$ і $2x + 4y - 2z - 5 = 0$.

Розв'язання. Нормалі $(1, 2, -1)$ і $(2, 4, -2)$ пропорційні, а вільні члени 1 та -5 не мають такого самого відношення. Отже, площини паралельні, але не збігаються.

Відповідь. Різні паралельні площини.

Приклад 6. Знайти кут між площинами $x + y + z = 1$ та $x - y = 2$.

Розв'язання. $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{n}_2 = (1, -1, 0)$; їх скалярний добуток $1 - 1 + 0 = 0$.

Відповідь. $\varphi = 90^\circ$.

Теорема. Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ дорівнює

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Приклад 7. Знайти відстань від $M(1, 2, -1)$ до площини $2x - y + 2z - 6 = 0$.

Розв'язання. Обчислюємо чисельник: $|2 - 2 - 2 - 6| = 8$; знаменник: $\sqrt{4 + 1 + 4} = 3$.

Відповідь. $d = \frac{8}{3}$.

4. Рівняння прямої у просторі

Означення. Пряма через $M_0(x_0, y_0, z_0)$ із напрямним вектором $\vec{s} = (l, m, n) \neq \vec{0}$ має векторне рівняння

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

У координатній формі це **параметричні рівняння**:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$$

Якщо $lmn \neq 0$, виключаючи параметр, дістанемо **канонічні рівняння**:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Зауваження. Якщо одна з компонент $\vec{s}$ нульова, відповідна координата стала; параметрична форма завжди коректна.

Приклад 8. Скласти параметричні й канонічні рівняння прямої через $M_0(1, -1, 2)$ з $\vec{s} = (2, 3, -1)$.

Розв'язання. Безпосередньо підставляємо дані:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -1 + 3t, \\ z = 2 - t, \end{cases} \qquad \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 1}{3} = \frac{z - 2}{-1}.$$

Приклад 9. Записати рівняння прямої через $A(1, 0, 2)$ і $B(3, -2, 5)$.

Розв'язання. Напрямний вектор $\overrightarrow{AB} = B - A = (2, -2, 3)$. Тому

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{3}.$$

Відповідь. $x = 1 + 2t$, $y = -2t$, $z = 2 + 3t$.

Означення. Пряму можна задати як лінію перетину двох непаралельних площин:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Напрямний вектор прямої дорівнює $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Приклад 10. Подати параметрично пряму перетину площин $x + y + z = 2$ і $x - y = 0$.

Розв'язання. Із другого рівняння $y = x$. Тоді $2x + z = 2$. Покладемо $x = t$, звідки $y = t$, $z = 2 - 2t$.

Відповідь. $(x, y, z) = (0, 0, 2) + t(1, 1, -2)$.

5. Взаємне розміщення прямих і площин у просторі

Теорема. Для двох прямих із напрямними векторами $\vec{s}_1, \vec{s}_2$ умова паралельності має вигляд $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \vec{0}$, а умова перпендикулярності їх напрямів — $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$.

Зауваження. У просторі ортогональні напрямні вектори можуть належати мимобіжним прямим; щоб прямі перетиналися під прямим кутом, потрібно також перевірити наявність спільної точки.

Означення. Кут φ між напрямами двох прямих обчислюють за формулою

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1|\,|\vec{s}_2|}.$$

Приклад 11. Знайти кут між прямими з напрямними векторами $\vec{s}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{s}_2 = (1, 0, 1)$.

Розв'язання. $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 1$, $|\vec{s}_1| = |\vec{s}_2| = \sqrt{2}$, тому $\cos\varphi = \frac{1}{2}$.

Відповідь. $\varphi = 60^\circ$.

Означення. Дві прямі у просторі називаються мимобіжними, якщо вони не паралельні й не перетинаються.

Приклад 12. Перевірити взаємне розміщення прямих

$$\ell_1 : (x, y, z) = (t, 0, 0), \qquad \ell_2 : (x, y, z) = (0, s, 1).$$

Розв'язання. Напрямні вектори $(1, 0, 0)$ та $(0, 1, 0)$ не колінеарні. Перша пряма має $z = 0$, друга — $z = 1$, тому спільних точок немає.

Відповідь. Прямі мимобіжні.

Теорема. Пряма з напрямним вектором $\vec{s} = (l, m, n)$ паралельна площині з нормаллю $\vec{n} = (A, B, C)$ за умови

$$\vec{s} \cdot \vec{n} = Al + Bm + Cn = 0.$$

При цьому пряма або лежить у площині, або не має з нею спільних точок; для розрізнення підставляємо координати точки прямої у рівняння площини.

Теорема. Пряма перпендикулярна площині тоді й тільки тоді, коли $\vec{s}$ колінеарний $\vec{n}$.

Означення. Гострий кут θ між прямою та площиною задається формулою

$$\sin\theta = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

Приклад 13. Визначити положення прямої $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 3$ відносно площини $x + y + z = 6$.

Розв'язання. Маємо $\vec{s} = (1, -1, 0)$, $\vec{n} = (1, 1, 1)$, $\vec{s} \cdot \vec{n} = 0$. Точка $(1, 2, 3)$ задовольняє рівняння площини: $1 + 2 + 3 = 6$.

Відповідь. Пряма лежить у площині.

Приклад 14. Знайти точку перетину прямої

$$x = 1 + t, \qquad y = 2t, \qquad z = 3 - t$$

із площиною $x + y + z = 8$.

Розв'язання. Підставляємо параметричні рівняння:

$$(1 + t) + 2t + (3 - t) = 8 \quad \Longrightarrow \quad 4 + 2t = 8, \quad t = 2.$$

Отже, $x = 3$, $y = 4$, $z = 1$.

Відповідь. $P(3, 4, 1)$.

Приклад 15. Знайти кут між прямою з напрямним вектором $\vec{s} = (1, 1, 1)$ і площиною $x + y = 0$.

Розв'язання. Нормаль $\vec{n} = (1, 1, 0)$, тому

$$\sin\theta = \frac{|1 + 1 + 0|}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Відповідь. $\theta = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$.