ЛЕКЦІЯ № 6

Лінійна алгебра та аналітична геометрія

Перший курс. Спеціальність «Інженерія програмного забезпечення»

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

План лекції. 1. Прямокутна система координат на площині. 2. Рівняння прямої на площині. 3. Взаємне розміщення двох прямих. 4. Криві другого порядку.

1. Прямокутна система координат на площині

На площині виберемо взаємно перпендикулярні осі Ox та Oy з однаковою одиницею довжини. Кожній точці M відповідає впорядкована пара координат $M(x, y)$.

Означення. Відстань між точками $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$ визначається формулою

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Означення. Середина відрізка AB має координати

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Приклад 1. Знайти довжину відрізка з кінцями $A(-2, 1)$, $B(4, 9)$ та координати його середини.

Розв'язання. Обчислюємо $AB = \sqrt{(4+2)^2 + (9-1)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$; $M\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{1+9}{2}\right) = (1, 5)$.

Відповідь. $AB = 10$, $M(1, 5)$.

2. Рівняння прямої на площині

Означення. Загальним рівнянням прямої називають рівняння

$$Ax + By + C = 0, \qquad A^2 + B^2 \neq 0.$$

Вектор $\vec{n} = (A, B)$ є *нормальним* до прямої, а $\vec{s} = (-B, A)$ — її напрямним вектором.

Означення. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд $y = kx + b$, де $k = \tan\alpha$ — тангенс кута нахилу прямої до додатного напряму осі Ox (для невертикальної прямої).

Означення. Пряма, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ з кутовим коефіцієнтом k, задається рівнянням

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Приклад 2. Скласти рівняння прямої через $M_0(2, -1)$ з $k = 3$.

Розв'язання. $y + 1 = 3(x - 2)$, звідси $y = 3x - 7$.

Відповідь. $3x - y - 7 = 0$.

Означення. Пряма через дві різні точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$ має рівняння

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Якщо $x_2 \neq x_1$ та $y_2 \neq y_1$, його можна записати як

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Приклад 3. Знайти рівняння прямої через $A(1, 2)$ і $B(5, 4)$.

Розв'язання. $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{2}$, тому $x - 2y + 3 = 0$.

Відповідь. $x - 2y + 3 = 0$.

Означення. Канонічне рівняння прямої через $M_0(x_0, y_0)$ із напрямним вектором $\vec{s} = (m, n)$ має вигляд

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \qquad mn \neq 0.$$

Параметричні рівняння, придатні й для нульових компонент напрямного вектора:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad (m, n) \neq (0, 0).$$

Приклад 4. Записати параметричні рівняння прямої через $(-1, 3)$ з $\vec{s} = (2, -5)$.

Розв'язання. Підставляємо координати точки та компоненти напрямного вектора.

Відповідь. $x = -1 + 2t$, $y = 3 - 5t$.

Означення. Рівняння прямої у відрізках на осях:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad ab \neq 0,$$

де $(a, 0)$ і $(0, b)$ — точки перетину з осями координат.

Приклад 5. Знайти відрізки, які відтинає пряма $2x + 3y = 6$ на осях.

Розв'язання. Поділимо рівняння на 6: $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$.

Відповідь. $a = 3$, $b = 2$.

3. Взаємне розміщення двох прямих на площині

Розглянемо прямі $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Теорема. Прямі паралельні тоді й тільки тоді, коли їх нормальні вектори колінеарні:

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0.$$

Вони збігаються, якщо трійки коефіцієнтів пропорційні; інакше за цієї умови прямі різні та паралельні.

Теорема. Прямі перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Теорема. Якщо дві прямі задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами

$$y = k_1 x + b_1, \qquad y = k_2 x + b_2,$$

то вони перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли

$$\boxed{k_1 k_2 = -1}.$$

Зауваження. Ця умова застосовується до двох невертикальних прямих. Вертикальна пряма $x = a$ перпендикулярна до горизонтальної прямої $y = b$; для вертикальної прямої кутовий коефіцієнт не існує.

Означення. Гострий кут φ між двома прямими визначається за формулою

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

Для прямих $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$ при $1 + k_1k_2 \neq 0$ маємо $\tan\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|$.

Приклад 6. Визначити взаємне розміщення прямих $2x - y + 1 = 0$ і $4x - 2y - 3 = 0$.

Розв'язання. $2(-2) - 4(-1) = 0$, отже, нормальні вектори колінеарні. Але $\frac{2}{4} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{1}{-3}$, тому прямі не збігаються.

Відповідь. Прямі паралельні та різні.

Приклад 7. Знайти кут між прямими $x + y = 1$ та $x - y = 2$.

Розв'язання. Їх нормалі $\vec{n}_1 = (1, 1)$, $\vec{n}_2 = (1, -1)$; скалярний добуток $1 - 1 = 0$.

Відповідь. $\varphi = 90^\circ$.

Приклад 8. Знайти точку перетину прямих $x + y = 5$ та $2x - y = 1$.

Розв'язання. Додаємо рівняння: $3x = 6$, отже, $x = 2$, $y = 3$.

Відповідь. $(2, 3)$.

Означення. Відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ дорівнює

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Приклад 9. Знайти відстань від $M(1, -2)$ до прямої $3x + 4y - 5 = 0$.

Розв'язання. $d = \frac{|3\cdot 1 + 4(-2) - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$.

Відповідь. $d = 2$.

4. Криві другого порядку на площині

Означення. Кривою другого порядку називають множину точок площини, координати яких задовольняють рівняння

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

Розглянемо основні невироджені криві другого порядку в канонічних координатах.

Коло

Означення. Коло — множина точок, рівновіддалених від центра $O(a,b)$ на відстань $R>0$:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

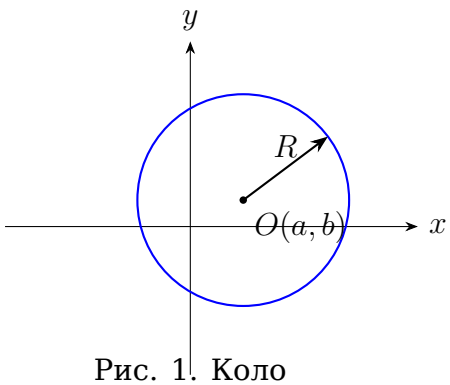

Рис. 1. Коло

Приклад 10. Звести рівняння $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ до канонічного вигляду.

Розв'язання. Виділяємо повні квадрати: $(x-2)^2-4+(y+3)^2-9-12=0$, тобто $(x-2)^2+(y+3)^2=25$.

Відповідь. Центр $(2,-3)$, радіус $R=5$.

Еліпс

Означення. Еліпс — множина точок, сума відстаней від яких до двох фокусів є сталою і більшою за відстань між фокусами. Канонічне рівняння:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a>b>0.$$

Фокуси $F_{1,2}=(\mp c,0)$, де $c^2=a^2-b^2$; ексцентриситет $e=c/a\in(0,1)$.

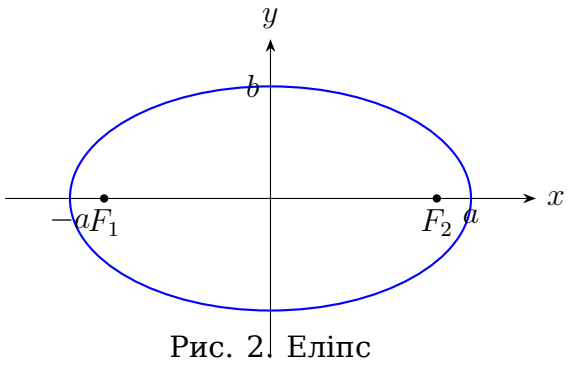

Рис. 2. Еліпс

Приклад 11. Для еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ знайти півосі, фокуси й ексцентриситет.

Розв'язання. $a=5$, $b=3$, $c=\sqrt{25-9}=4$, $e=\frac{4}{5}$.

Відповідь. $F_1(-4,0)$, $F_2(4,0)$; $e=\frac{4}{5}$.

Гіпербола

Означення. Гіпербола — множина точок, модуль різниці відстаней від яких до двох фокусів є сталою додатною величиною, меншою за відстань між фокусами. Канонічне рівняння:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a, b > 0.$$

Фокуси $F_{1,2} = (\mp c, 0)$, де $c^2 = a^2 + b^2$; асимптоти $y = \pm\frac{b}{a}x$, ексцентриситет $e = c/a > 1$.

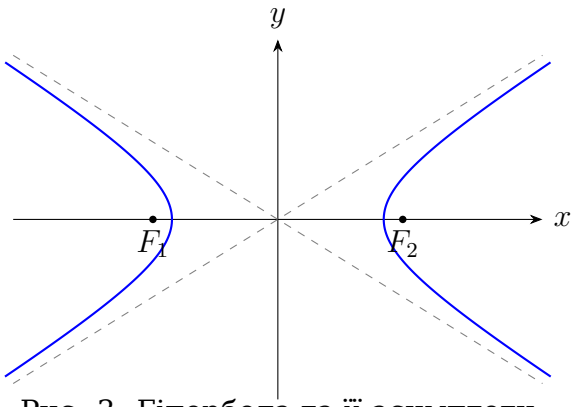

Рис. 3. Гіпербола та її асимптоти

Приклад 12. Для гіперболи $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ знайти вершини, фокуси й асимптоти.

Розв'язання. $a = 3$, $b = 4$, $c = \sqrt{9 + 16} = 5$.

Відповідь. Вершини $(\pm 3, 0)$; фокуси $(\pm 5, 0)$; асимптоти $y = \pm\frac{4}{3}x$.

Парабола

Означення. Парабола — множина точок, рівновіддалених від заданої точки (фокуса) та заданої прямої (директриси). Канонічне рівняння:

$$y^2 = 2px, \qquad p > 0.$$

Її вершина $O(0, 0)$, фокус $F(\frac{p}{2}, 0)$, директриса $x = -\frac{p}{2}$.

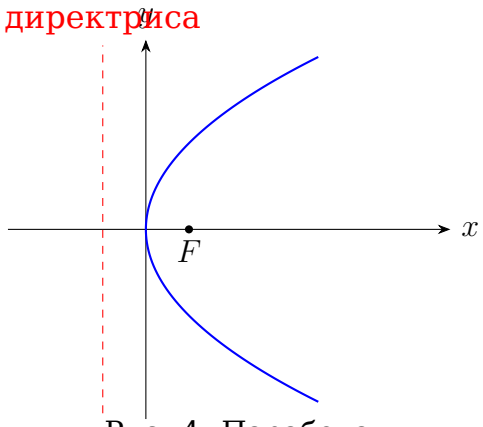

Рис. 4. Парабола

Приклад 13. Знайти фокус і директрису параболи $y^2 = 8x$.

Розв'язання. Порівнюємо з $y^2 = 2px$: $2p = 8$, отже, $p = 4$.

Відповідь. Фокус $F(2, 0)$, директриса $x = -2$.

Зауваження. Канонічні рівняння можуть мати іншу орієнтацію: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ задає гіперболу з вертикальною дійсною віссю, а $x^2 = 2py$ — параболу з вертикальною віссю. Для кола, еліпса, гіперболи й параболи важливо правильно визначати центр або вершину, осі симетрії та характерні точки.

Приклад 14. Визначити тип кривої $9x^2+4y^2 = 36$ і знайти її перетини з осями.

Розв'язання. Поділимо на 36: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Це еліпс із більшою піввіссю вздовж Oy.

Відповідь. Перетини з осями: $(\pm 2, 0)$, $(0, \pm 3)$.

Приклад 15. Визначити тип кривої $x^2 - 6x - y^2 + 4y + 4 = 0$.

Розв'язання. Виділяємо квадрати: $(x-3)^2 - 9 - (y-2)^2 + 4 + 4 = 0$, отже, $(x-3)^2 - (y-2)^2 = 1$.

Відповідь. Гіпербола з центром $(3, 2)$, півосями $a = b = 1$.