ЛЕКЦІЯ № 14

Математичний аналіз

Перший курс. Спеціальність «Інженерія програмного забезпечення»

НАЙБІЛЬШЕ І НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ. УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ

План лекції. 1. Найбільше та найменше значення функції двох змінних на замкненій обмеженій області. 2. Умовний екстремум функції двох змінних.

1. Найбільше та найменше значення функції двох змінних на замкненій обмеженій області

У попередній лекції ми досліджували *локальні* екстремуми. Тепер знайдемо найбільше і найменше значення функції на всій заданій області.

Означення. Число M називають *найбільшим значенням* функції f на множині D, якщо існує точка $P \in D$ така, що $f(P) = M$ і $f(x,y) \le M$ для всіх $(x,y) \in D$. Аналогічно визначають *найменше значення* m.

Теорема (Вейєрштрасса). Якщо функція $f(x,y)$ неперервна на непорожній замкненій обмеженій множині $D \subset \mathbb{R}^2$, то вона набуває на D найбільшого та найменшого значень.

Зауваження. Теорема гарантує існування обох значень, але не вказує, де саме їх шукати. Найбільше і найменше значення можуть досягатися як усередині області, так і на її межі.

Алгоритм знаходження найбільшого та найменшого значень.

1. Знайти стаціонарні точки $f'_x = f'_y = 0$ усередині D і обчислити значення функції в них; окремо врахувати внутрішні точки, де похідні не існують.
2. Дослідити функцію на кожній частині межі ∂D (параметризацією або підстановкою); врахувати кінці відрізків і точки, де похідна не існує.
3. Порівняти всі отримані значення; найбільше з них є максимумом на D, найменше — мінімумом на D.

Приклад 1. Знайти найбільше і найменше значення $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ на прямокутнику $D = [0,3] \times [0,4]$.

Розв'язання. Маємо $f'_x = 2x - 2$, $f'_y = 2y - 4$, звідки внутрішня стаціонарна точка

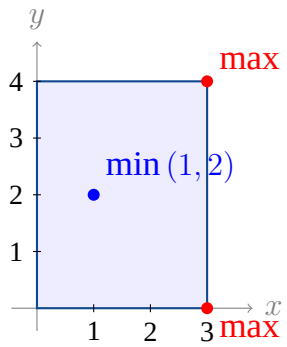
$(1,2)$ і $f(1,2) = -5$. На межі:

$$y = 0: \quad f(x,0) = x^2 - 2x, \quad x \in [0,3], \quad y = 4: \quad f(x,4) = x^2 - 2x, \quad x \in [0,3],$$
$$x = 0: \quad f(0,y) = y^2 - 4y, \quad y \in [0,4],$$
$$x = 3: \quad f(3,y) = y^2 - 4y + 3, \quad y \in [0,4].$$

Для перших двох сторін критична точка $x = 1$, значення -1; у кінцях $x = 0, 3$ значення $0, 3$. Для третьої сторони критична точка $y = 2$, значення -4; у кінцях 0. Для четвертої сторони при $y = 2$ значення -1, а на кінцях 3. Порівнюємо з внутрішнім значенням -5.

Відповідь. $f_{\min} = -5$ у точці $(1,2)$; $f_{\max} = 3$ у точках $(3,0)$ і $(3,4)$.

Геометрична ілюстрація до прикладу 1.



Приклад 2. Знайти екстремальні значення $f(x,y) = x + y$ на трикутнику з вершинами $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,3)$.

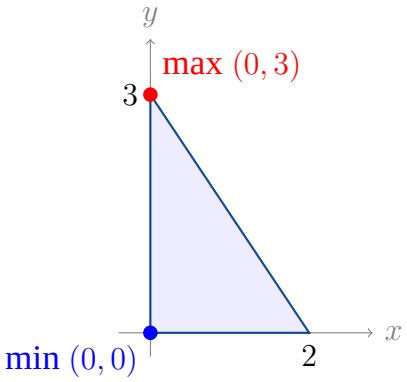
Розв'язання. Внутрішніх стаціонарних точок немає, оскільки $f'_x = f'_y = 1$. На сторонах $x = 0$ та $y = 0$ маємо відповідно $f = y \in [0,3]$ та $f = x \in [0,2]$. На похилій стороні $y = 3 - \frac{3}{2}x$, $0 \le x \le 2$, тому

$$f(x, 3 - \tfrac{3}{2}x) = 3 - \tfrac{1}{2}x,$$

що спадає від 3 до 2.

Відповідь. $f_{\min} = 0$ у $(0,0)$; $f_{\max} = 3$ у $(0,3)$.

Геометрична ілюстрація до прикладу 2.



Приклад 3. Знайти найбільше та найменше значення $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$ на крузі $D:\ x^2 + y^2 \le 4$.

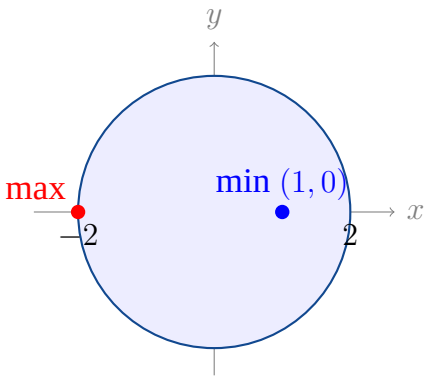
Розв'язання. Усередині круга $f'_x = 2x - 2$, $f'_y = 2y$, звідки $(1,0)$ і $f(1,0) = -1$. На колі $x^2 + y^2 = 4$ маємо

$$f = 4 - 2x, \qquad -2 \le x \le 2.$$

Тому на межі найменше значення 0 при $x = 2, y = 0$, а найбільше 8 при $x = -2, y = 0$.

Відповідь. $f_{\min} = -1$ у $(1,0)$; $f_{\max} = 8$ у $(-2,0)$.

Геометрична ілюстрація до прикладу 3.

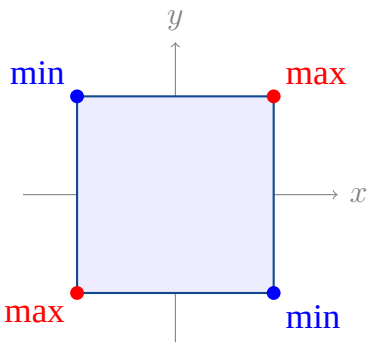


Приклад 4. Дослідити $f(x,y) = xy$ на квадраті $[-1,1] \times [-1,1]$.

Розв'язання. Усередині $f'_x = y$, $f'_y = x$; стаціонарна точка $(0,0)$ дає $f = 0$. На сторонах $x = \pm 1$ маємо $f = \pm y \in [-1,1]$, а на сторонах $y = \pm 1$ — $f = \pm x \in [-1,1]$.

Відповідь. $f_{\max} = 1$ у $(1,1)$ та $(-1,-1)$; $f_{\min} = -1$ у $(1,-1)$ та $(-1,1)$.

Геометрична ілюстрація до прикладу 4.



Приклад 5. Знайти найбільше та найменше значення $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ на диску $x^2 + y^2 \le 1$.

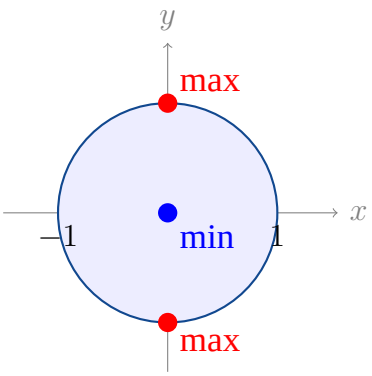
Розв'язання. Усередині стаціонарна точка $(0,0)$, де $f = 0$. На межі $x^2 + y^2 = 1$:

$$f = x^2 + 2y^2 = 1 + y^2, \qquad 0 \le y^2 \le 1.$$

Отже, на колі найменше значення 1 при $(\pm 1, 0)$, найбільше 2 при $(0, \pm 1)$.

Відповідь. $f_{\min} = 0$ у $(0,0)$; $f_{\max} = 2$ у $(0,1)$ та $(0,-1)$.

Геометрична ілюстрація до прикладу 5.

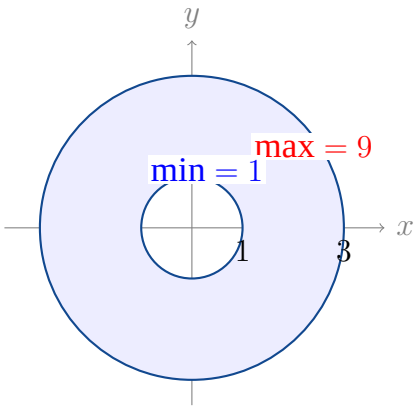


Приклад 6. Знайти екстремальні значення $f(x,y) = x^2 + y^2$ на кільці $1 \le x^2 + y^2 \le 9$.

Розв'язання. Точка $(0,0)$ не належить області. На внутрішньому колі $x^2 + y^2 = 1$ значення функції дорівнює 1, а на зовнішньому колі $x^2 + y^2 = 9$ дорівнює 9.

Відповідь. $f_{\min} = 1$ на внутрішньому колі; $f_{\max} = 9$ на зовнішньому колі.

Геометрична ілюстрація до прикладу 6.



2. Умовний екстремум функції двох змінних

Означення. Нехай функцію $f(x,y)$ потрібно дослідити за умови $g(x,y) = 0$. Точку (x_0, y_0), що задовольняє умову, називають *точкою умовного локального максимуму* (відповідно мінімуму), якщо в деякому її околі серед усіх точок, що задовольняють $g = 0$, виконується $f(x,y) \le f(x_0,y_0)$ (відповідно $f(x,y) \ge f(x_0,y_0)$).

Зауваження. Умовний екстремум шукаємо лише на допустимій кривій $g(x,y) = 0$. Точка умовного екстремуму не обов'язково є стаціонарною точкою функції f на площині.

Метод підстановки. Якщо з умови можна виразити $y = \varphi(x)$, то підставляємо у f і досліджуємо функцію однієї змінної $F(x) = f(x, \varphi(x))$.

Приклад 7. Знайти умовний екстремум $f(x,y)=x^2+y^2$ за умови $x+y=4$.

Розв'язання. Виражаємо $y=4-x$ і дістаємо

$$F(x)=x^2+(4-x)^2=2x^2-8x+16=2(x-2)^2+8.$$

Маємо $F'(x)=4x-8=0$, звідки $x=2$, $y=2$. Оскільки $F''(x)=4>0$, це мінімум.

Відповідь. Умовний мінімум $f=8$ у точці $(2,2)$; умовного максимуму немає.

Приклад 8. Знайти умовний екстремум $f(x,y)=xy$ за умови $x+y=10$.

Розв'язання. Підставляємо $y=10-x$:

$$F(x)=x(10-x)=25-(x-5)^2.$$

Отже, $F(x)\le 25$, причому рівність при $x=5$, $y=5$. При $|x|\to\infty$ функція $F(x)\to-\infty$.

Відповідь. Умовний максимум 25 у $(5,5)$; мінімуму немає.

Приклад 9. Знайти умовні екстремуми $f(x,y)=x^2-y^2$ за умови $x^2+y^2=1$.

Розв'язання. Із умови $y^2=1-x^2$, $-1\le x\le 1$. Тоді

$$F(x)=x^2-(1-x^2)=2x^2-1.$$

Найменше значення -1 досягається при $x=0$, $y=\pm1$; найбільше 1 при $x=\pm1$, $y=0$.

Відповідь. Мінімум -1 у $(0,\pm1)$; максимум 1 у $(\pm1,0)$.

Метод множників Лагранжа. Цей метод зручний, коли умову складно розв'язати відносно однієї змінної.

Означення. *Функцією Лагранжа* називають функцію

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y),$$

де λ — множник Лагранжа.

Теорема (необхідна умова умовного екстремуму). Нехай $f,g\in C^1$ в околі допустимої точки (x_0,y_0), $g(x_0,y_0)=0$, $\nabla g(x_0,y_0)\neq\vec{0}$. Якщо f має в цій точці умовний локальний екстремум за умовою $g=0$, то існує число λ таке, що

$$\boxed{\begin{cases} f'_x-\lambda g'_x=0,\\ f'_y-\lambda g'_y=0,\\ g(x,y)=0. \end{cases}}$$

Геометрично це означає, що в точці умовного екстремуму вектори ∇f і ∇g паралельні: $\nabla f=\lambda\nabla g$.

Зауваження. Система Лагранжа дає *кандидатів* на екстремум. Їх характер потрібно визначити додатково. Точки, де $\nabla g = \vec{0}$, перевіряють окремо: сформульована теорема їх не охоплює.

Приклад 10. Розв'язати приклад 7 методом Лагранжа.

Розв'язання. $f = x^2 + y^2$, $g = x + y - 4$, тому

$$\mathcal{L} = x^2 + y^2 - \lambda(x + y - 4).$$

Знаходимо похідні та розв'язуємо систему:

$$\begin{cases} 2x - \lambda = 0, \\ 2y - \lambda = 0, \\ x + y - 4 = 0. \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = y = 2, \quad \lambda = 4.$$

Оскільки на прямій $x + y = 4$ маємо $f = 2(x-2)^2 + 8$, отримана точка дає мінімум.

Відповідь. Умовний мінімум 8 у $(2, 2)$.

Приклад 11. Знайти умовні екстремуми $f(x, y) = xy$ за умови $x^2 + y^2 = 2$.

Розв'язання. Візьмемо $g = x^2 + y^2 - 2$. Маємо

$$\mathcal{L} = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 2), \qquad \begin{cases} y = 2\lambda x, \\ x = 2\lambda y, \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$$

На колі x і y не можуть дорівнювати нулю одночасно. Із перших двох рівнянь $4\lambda^2 = 1$, отже, $\lambda = \pm\frac{1}{2}$. При $\lambda = \frac{1}{2}$ маємо $y = x$ і точки $(1, 1)$, $(-1, -1)$; при $\lambda = -\frac{1}{2}$ маємо $y = -x$ і точки $(1, -1)$, $(-1, 1)$. Значення f дорівнюють відповідно 1 і -1.

Відповідь. Умовний максимум 1 у $(1, 1)$, $(-1, -1)$; умовний мінімум -1 у $(1, -1)$, $(-1, 1)$.

Приклад 12. Знайти найменше значення $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ за умови $x + y = 6$.

Розв'язання. $\mathcal{L} = x^2 + 4y^2 - \lambda(x + y - 6)$. Система

$$\begin{cases} 2x = \lambda, \\ 8y = \lambda, \\ x + y = 6 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = 4y, \quad y = \frac{6}{5}, \quad x = \frac{24}{5}.$$

Підстановка $y = 6 - x$ дає $F(x) = x^2 + 4(6 - x)^2$, причому $F''(x) = 10 > 0$, отже, це мінімум.

$$f\left(\frac{24}{5}, \frac{6}{5}\right) = \frac{576}{25} + 4 \cdot \frac{36}{25} = \frac{144}{5}.$$

Відповідь. Умовний мінімум $144/5$ у точці $(24/5, 6/5)$.

Приклад 13. Знайти найбільше і найменше значення $f(x,y)=2x+y$ на колі $x^2+y^2=5$.

Розв'язання. $\mathcal{L}=2x+y-\lambda(x^2+y^2-5)$. Тоді

$$\begin{cases} 2=2\lambda x,\\ 1=2\lambda y,\\ x^2+y^2=5. \end{cases}$$

Із перших двох рівнянь $x=2y$. Звідси $5y^2=5$, тобто $y=\pm1$, $x=\pm2$ з однаковими знаками. Значення функції: $f(2,1)=5$, $f(-2,-1)=-5$.

Відповідь. Максимум 5 у $(2,1)$; мінімум -5 у $(-2,-1)$.

Приклад 14. Знайти умовні екстремуми $f(x,y)=x^2+y^2$ за умови $xy=1$.

Розв'язання. $\mathcal{L}=x^2+y^2-\lambda(xy-1)$, звідки

$$\begin{cases} 2x-\lambda y=0,\\ 2y-\lambda x=0,\\ xy=1. \end{cases}$$

Із $xy=1$ маємо $x,y\neq0$. Перші рівняння дають $x^2=y^2$, а з $xy=1$ випливає $x=y=1$ або $x=y=-1$. За нерівністю $x^2+y^2\geq2|xy|=2$ обидві точки дають мінімум. На гіперболі при $|x|\to\infty$ функція необмежено зростає.

Відповідь. Умовний мінімум 2 у $(1,1)$ та $(-1,-1)$; максимуму немає.

Приклад 15. Знайти умовні екстремуми $f(x,y)=x+y$ за умови $x^2+y^2=8$.

Розв'язання. $\mathcal{L}=x+y-\lambda(x^2+y^2-8)$. Маємо $1=2\lambda x$, $1=2\lambda y$, тому $x=y$. З умови $2x^2=8$ дістаємо $(2,2)$ та $(-2,-2)$. Значення f дорівнюють 4 і -4.

Відповідь. Максимум 4 у $(2,2)$; мінімум -4 у $(-2,-2)$.

Підсумкове зауваження. Для пошуку найбільшого й найменшого значень на замкненій обмеженій області потрібно дослідити як внутрішні точки, так і межу. Для умовного екстремуму використовують підстановку або метод Лагранжа; знайдені кандидати обов'язково перевіряють.