ЛЕКЦІЯ № 13

Математичний аналіз

Перший курс. Спеціальність «Інженерія програмного забезпечення»

ЛОКАЛЬНІ ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

План лекції. 1. Поняття локального екстремуму функції двох змінних. 2. Необхідна умова існування локального екстремуму. 3. Достатня умова існування локального екстремуму.

1. Поняття локального екстремуму функції двох змінних

Нехай $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$.

Означення. Точка M_0 називається *точкою локального максимуму* функції f, якщо існує $r > 0$ таке, що для всіх (x, y) з круга $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$ виконується

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0).$$

Означення. Точка M_0 називається *точкою локального мінімуму*, якщо в деякому околі цієї точки

$$f(x, y) \ge f(x_0, y_0).$$

Якщо нерівності строгі для всіх точок околу, відмінних від M_0, то екстремум називається *строгим*. Локальний максимум або мінімум називають *локальним екстремумом*.

Геометричний зміст. Графік $z = f(x, y)$ є поверхнею у просторі. Поблизу точки локального мінімуму поверхня розташована не нижче відповідної висоти, а поблизу локального максимуму — не вище. Водночас екстремум може не бути найбільшим або найменшим значенням на всій області.

Приклад 1. Дослідити $f(x, y) = x^2 + y^2$ у точці $(0, 0)$.

Розв'язання. Для всіх (x, y) маємо $x^2 + y^2 \ge 0 = f(0, 0)$; рівність можлива лише при $x = y = 0$.

Відповідь. У точці $(0, 0)$ строгий локальний (і глобальний) мінімум, $f_{\min} = 0$.

Приклад 2. Дослідити $f(x, y) = 5 - x^2 - 4y^2$ у точці $(0, 0)$.

Розв'язання. Оскільки $x^2 + 4y^2 \ge 0$, то $f(x, y) \le 5 = f(0, 0)$, причому рівність лише в початку координат.

Відповідь. Строгий локальний максимум, $f_{\max} = 5$.

Приклад 3. Чи має екстремум функція $f(x, y) = x^2 - y^2$ у точці $(0, 0)$?

Розв'язання. На прямій $y = 0$ маємо $f(x, 0) = x^2 > 0$ при $x \neq 0$, а на прямій $x = 0$ маємо $f(0, y) = -y^2 < 0$ при $y \neq 0$. Отже, в кожному околі початку координат функція набуває як більших, так і менших значень, ніж $f(0, 0) = 0$.

Відповідь. Екстремуму немає; точка $(0, 0)$ є сідловою.

Приклад 4. Дослідити $f(x, y) = x^2$ у точках $(0, y_0)$.

Розв'язання. $f(x, y) = x^2 \geq 0 = f(0, y_0)$ для довільного y_0. Однак $f(0, y) = 0$ для всіх y, тому мінімум нестрогий.

Відповідь. Кожна точка прямої $x = 0$ — точка нестрогого локального мінімуму.

2. Необхідна умова існування локального екстремуму

Теорема (Ферма для функції двох змінних). Якщо функція $f(x, y)$ має локальний екстремум у внутрішній точці $M_0(x_0, y_0)$ області визначення і в цій точці існують обидві частинні похідні першого порядку, то

$$\boxed{f'_x(x_0, y_0) = 0, \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0.}$$

Доведення. Зафіксуємо $y = y_0$. Функція однієї змінної $g(x) = f(x, y_0)$ має локальний екстремум при $x = x_0$. За теоремою Ферма для однієї змінної $g'(x_0) = f'_x(x_0, y_0) = 0$. Аналогічно, зафіксувавши $x = x_0$, одержуємо $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Означення. Точку, у якій одночасно виконуються рівності $f'_x = 0$ і $f'_y = 0$, називають *стаціонарною точкою* функції.

Зауваження. Необхідна умова не є достатньою: стаціонарна точка може бути максимумом, мінімумом або не бути екстремумом. Якщо частинні похідні не існують, екстремум також можливий; такі точки слід досліджувати окремо.

Приклад 5. Знайти стаціонарні точки $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 4x + 6y + 7$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні:

$$f'_x = 2x - 4, \qquad f'_y = 6y + 6.$$

Прирівнюємо їх до нуля і розв'язуємо систему:

$$\begin{cases} 2x - 4 = 0, \\ 6y + 6 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = 2, \quad y = -1.$$

Відповідь. Єдина стаціонарна точка $(2, -1)$.

Приклад 6. Знайти стаціонарні точки $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Розв'язання. Маємо $f'_x = 3x^2 - 3y$, $f'_y = 3y^2 - 3x$. Отже,

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x = y^2. \end{cases}$$

Підставляючи $y = x^2$ у друге рівняння, дістаємо $x = x^4$, тобто $x(x^3 - 1) = 0$. Звідси $x = 0$ або $x = 1$; відповідно $y = 0$ або $y = 1$.

Відповідь. Стаціонарні точки $(0, 0)$ і $(1, 1)$.

Приклад 7. Знайти стаціонарні точки $f(x, y) = x^2y + y^2 - 4y$.

Розв'язання. $f'_x = 2xy$, $f'_y = x^2 + 2y - 4$. Розв'язуємо

$$\begin{cases} 2xy = 0, \\ x^2 + 2y - 4 = 0. \end{cases}$$

Якщо $x = 0$, то $y = 2$. Якщо $y = 0$, то $x^2 = 4$, тобто $x = \pm 2$.

Відповідь. Точки $(0, 2)$, $(2, 0)$, $(-2, 0)$.

Приклад 8. Показати, що необхідна умова не гарантує екстремуму.

Розв'язання. Для $f(x, y) = xy$ маємо $f'_x = y$, $f'_y = x$, тому $(0, 0)$ стаціонарна. Однак $f(t, t) = t^2 > 0$, а $f(t, -t) = -t^2 < 0$ для $t \neq 0$.

Відповідь. У стаціонарній точці $(0, 0)$ екстремуму немає.

3. Достатня умова існування локального екстремуму

Нехай функція f має неперервні частинні похідні другого порядку в деякому околі стаціонарної точки M_0. Позначимо

$$A = f''_{xx}(M_0), \qquad B = f''_{xy}(M_0), \qquad C = f''_{yy}(M_0).$$

Означення. Матрицю

$$H_f(M_0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{yx}(M_0) & f''_{yy}(M_0) \end{pmatrix}$$

називають *матрицею Гессе* (гесіаном). Її визначник у разі рівності мішаних похідних має вигляд

$$\boxed{D = \det H_f(M_0) = AC - B^2.}$$

Теорема (достатня умова локального екстремуму). Нехай M_0 — стаціонарна точка функції $f \in C^2$ у деякому околі M_0. Тоді:

1. якщо $D > 0$ і $A > 0$, то M_0 — точка строгого локального мінімуму;

2. якщо $D > 0$ і $A < 0$, то M_0 — точка строгого локального максимуму;
3. якщо $D < 0$, то M_0 не є точкою локального екстремуму (сідлова точка);
4. якщо $D = 0$, то ознака не дає відповіді: потрібне додаткове дослідження.

Пояснення. Поблизу стаціонарної точки головна частина приросту визначається квадратичною формою

$$\Delta f = \frac{1}{2}\big(A(\Delta x)^2 + 2B\Delta x\Delta y + C(\Delta y)^2\big) + o(\rho^2), \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

При $D > 0$ форма має один знак, який визначається знаком A; при $D < 0$ набуває обох знаків.

Алгоритм дослідження. Знайти f'_x, f'_y; розв'язати систему $f'_x = f'_y = 0$; обчислити f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}; у кожній стаціонарній точці знайти D і застосувати теорему; за потреби обчислити значення функції.

Приклад 9. Дослідити $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8$.

Розв'язання. $f'_x = 2x - 4$, $f'_y = 2y + 6$. Стаціонарна точка $(2, -3)$. Далі

$$f''_{xx} = 2, \quad f''_{xy} = 0, \quad f''_{yy} = 2, \quad D = 2 \cdot 2 - 0^2 = 4 > 0.$$

Оскільки $A = 2 > 0$, маємо строгий локальний мінімум. Його значення:

$$f(2, -3) = 4 + 9 - 8 - 18 + 8 = -5.$$

Відповідь. Строгий мінімум у $(2, -3)$, $f_{\min} = -5$.

Приклад 10. Дослідити $f(x, y) = 10 - x^2 - 2y^2 + 2x + 8y$.

Розв'язання. $f'_x = -2x + 2$, $f'_y = -4y + 8$, звідки $M_0 = (1, 2)$. Маємо

$$A = -2, \quad B = 0, \quad C = -4, \quad D = (-2)(-4) = 8 > 0.$$

Оскільки $A < 0$, це строгий максимум. Обчислюємо

$$f(1, 2) = 10 - 1 - 8 + 2 + 16 = 19.$$

Відповідь. Строгий максимум у $(1, 2)$, $f_{\max} = 19$.

Приклад 11. Дослідити $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^2$.

Розв'язання. $f'_x = 2x - 4y$, $f'_y = -4x + 2y$. Система дає $x = y = 0$. Другі похідні:

$$A = 2, \quad B = -4, \quad C = 2, \quad D = 2 \cdot 2 - (-4)^2 = -12 < 0.$$

Відповідь. Точка $(0, 0)$ сідлова, екстремуму немає.

Приклад 12. Дослідити обидві стаціонарні точки $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Розв'язання. Із прикладу 6 маємо $(0,0)$ та $(1,1)$. Другі похідні:

$$f''_{xx} = 6x, \qquad f''_{xy} = -3, \qquad f''_{yy} = 6y, \qquad D = 36xy - 9.$$

У точці $(0,0)$: $D = -9 < 0$, тому екстремуму немає. У точці $(1,1)$: $D = 27 > 0$, $A = 6 > 0$, отже, маємо строгий локальний мінімум, $f(1,1) = 1 + 1 - 3 = -1$.

Відповідь. $(0,0)$ — сідлова точка; $(1,1)$ — строгий локальний мінімум зі значенням -1.

Приклад 13. Дослідити стаціонарні точки $f(x,y) = x^2y + y^2 - 4y$.

Розв'язання. Із прикладу 7 маємо $(0,2)$, $(2,0)$, $(-2,0)$. Другі похідні:

$$f''_{xx} = 2y, \qquad f''_{xy} = 2x, \qquad f''_{yy} = 2, \qquad D = 4y - 4x^2.$$

У $(0,2)$: $D = 8 > 0$, $A = 4 > 0$, тому строгий мінімум, $f(0,2) = 4 - 8 = -4$. У $(2,0)$ та $(-2,0)$: $D = -16 < 0$, отже, це сідлові точки.

Відповідь. Мінімум у $(0,2)$ зі значенням -4; $(\pm 2, 0)$ — сідлові точки.

Приклад 14. Дослідити $f(x,y) = x^4 + y^4$ у точці $(0,0)$.

Розв'язання. $f'_x = 4x^3$, $f'_y = 4y^3$, отже, $(0,0)$ стаціонарна. Маємо $f''_{xx} = 12x^2$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{yy} = 12y^2$. У точці $(0,0)$ отримуємо $D = 0$, тому достатня умова не дає відповіді. Однак

$$f(x,y) = x^4 + y^4 \geq 0 = f(0,0),$$

причому рівність лише при $(x,y) = (0,0)$.

Відповідь. У точці $(0,0)$ строгий локальний мінімум.

Приклад 15. Дослідити $f(x,y) = x^4 - y^4$ у точці $(0,0)$.

Розв'язання. Обидві частинні похідні першого порядку в $(0,0)$ дорівнюють нулю, а всі другі похідні там дорівнюють нулю; отже, $D = 0$. Дослідимо функцію на координатних осях:

$$f(x,0) = x^4 > 0 \ (x \neq 0), \qquad f(0,y) = -y^4 < 0 \ (y \neq 0).$$

Відповідь. У точці $(0,0)$ екстремуму немає.

Приклад 16. Дослідити $f(x,y) = -x^4 - y^4$ у точці $(0,0)$.

Розв'язання. Тут $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$ та $D = 0$. Але $-x^4 - y^4 \leq 0 = f(0,0)$, причому рівність лише в початку координат.

Відповідь. У точці $(0,0)$ строгий локальний максимум.

Приклад 17. Дослідити $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 4x - 6y$.

Розв'язання. $f'_x = 2x + 2y - 4$, $f'_y = 2x + 4y - 6$. Система

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x + 2y = 3 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad (x, y) = (1, 1).$$

Другі похідні: $A = 2$, $B = 2$, $C = 4$, $D = 2 \cdot 4 - 2^2 = 4 > 0$. Оскільки $A > 0$, маємо строгий мінімум. Значення $f(1, 1) = 1 + 2 + 2 - 4 - 6 = -5$.

Відповідь. Строгий локальний мінімум у $(1, 1)$, $f_{\min} = -5$.

Підсумкове зауваження. Рівності $f'_x = f'_y = 0$ дозволяють знайти кандидатів на екстремум, але не визначають їх характеру. Якщо $D > 0$, знак f''_{xx} розрізняє мінімум і максимум; якщо $D < 0$, екстремуму немає; якщо $D = 0$, дослідження потрібно продовжити іншими методами.