ЛЕКЦІЯ № 12

Математичний аналіз

Перший курс. Спеціальність «Інженерія програмного забезпечення»

ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. ПОВНИЙ ДИФЕРЕНЦІАЛ

План лекції. 1. Повний приріст і диференційовність функції. 2. Повний диференціал. 3. Наближені обчислення. 4. Похідні складеної функції. 5. Похідна за напрямом і градієнт.

1. Повний приріст функції двох змінних. Диференційовність

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в околі точки $M_0(x_0, y_0)$. При одночасній зміні аргументів на Δx і Δy *повним приростом* функції називають

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Означення. Функція f називається *диференційовною* в точці M_0, якщо її повний приріст можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

де A, B — сталі, $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ при $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. Еквівалентно,

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \qquad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Теорема (необхідна умова). Якщо f диференційовна в M_0, то існують $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$ і $A = f'_x(M_0)$, $B = f'_y(M_0)$. *Пояснення.* Поклавши $\Delta y = 0$, поділимо приріст на Δx і перейдемо до границі: $f'_x(M_0) = A$. Аналогічно $f'_y(M_0) = B$.

Наслідок. Диференційовність у точці забезпечує неперервність у цій точці.

Теорема (достатня умова). Якщо f'_x і f'_y існують у деякому околі M_0 та неперервні в M_0, то f диференційовна в M_0.

Приклад 1. Перевірити диференційовність $f(x, y) = x^2 + xy$ у точці $(1, 2)$.

Розв'язання. Маємо $f'_x = 2x + y$, $f'_y = x$. Ці похідні неперервні, отже, функція диференційовна. У точці $(1, 2)$ маємо $f'_x = 4$, $f'_y = 1$. Безпосередньо:

$$\Delta z = 4\Delta x + \Delta y + (\Delta x)^2 + \Delta x \Delta y.$$

Останні два доданки становлять $o(\rho)$, бо їх модуль не перевищує $2\rho^2$.

Відповідь. Лінійна частина приросту дорівнює $4\Delta x + \Delta y$.

Приклад 2. Показати, що існування частинних похідних не гарантує диференційовності.

Розв'язання. Розглянемо

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

На осях $f(x,0) = f(0,y) = 0$, тому $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$. Однак $f(x,x) = \frac{1}{2}$ при $x \neq 0$, отже, функція не є неперервною, а тому й диференційовною в $(0,0)$.

2. Повний диференціал функції двох змінних

Означення. *Повним диференціалом* диференційовної функції $z = f(x,y)$ називають головну лінійну частину повного приросту:

$$\boxed{dz = f'_x(x,y)\,dx + f'_y(x,y)\,dy}, \qquad dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y.$$

При цьому $\Delta z = dz + o(\rho)$. Частинна похідна описує зміну за одним аргументом, а повний диференціал враховує одночасну зміну обох аргументів.

Геометричний зміст. Для поверхні $z = f(x,y)$ рівняння дотичної площини в точці (x_0, y_0, z_0) має вигляд

$$z - z_0 = f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0).$$

Приклад 3. Знайти повний диференціал $z = x^3y^2 + 5xy - 7y$.

Розв'язання. $f'_x = 3x^2y^2 + 5y$, $f'_y = 2x^3y + 5x - 7$. Отже,

$$dz = (3x^2y^2 + 5y)\,dx + (2x^3y + 5x - 7)\,dy.$$

Приклад 4. Знайти dz для $z = \sin(xy) + e^{x+2y}$.

Розв'язання. Застосовуємо правило похідної складеної функції:

$$f'_x = y\cos(xy) + e^{x+2y}, \qquad f'_y = x\cos(xy) + 2e^{x+2y}.$$

Тому

$$dz = \left(y\cos(xy) + e^{x+2y}\right)dx + \left(x\cos(xy) + 2e^{x+2y}\right)dy.$$

Приклад 5. Скласти рівняння дотичної площини до $z = x^2 + y^2$ у точці $(1,2,5)$.

Розв'язання. $f'_x = 2x$, $f'_y = 2y$, тому $f'_x(1,2) = 2$, $f'_y(1,2) = 4$ і

$$z - 5 = 2(x-1) + 4(y-2).$$

Відповідь. $z = 2x + 4y - 5$.

3. Застосування повного диференціала до наближених обчислень

Для малих приростів Δx, Δy справедливо $\Delta z \approx dz$, тобто

$$\boxed{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y}.$$

Для обчислення вибираємо зручну точку (x_0, y_0), знаходимо прирости, обчислюємо значення функції та її похідних у цій точці й підставляємо у формулу.

Приклад 6. Наближено обчислити $\sqrt{4{,}04 + 8{,}94}$.

Розв'язання. Нехай $f(x,y) = \sqrt{x+y}$, $(x_0, y_0) = (4, 9)$, $\Delta x = 0{,}04$, $\Delta y = -0{,}06$. Маємо

$$f(4,9) = \sqrt{13}, \qquad f'_x = f'_y = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}.$$

Отже,

$$\sqrt{12{,}98} \approx \sqrt{13} + \frac{0{,}04 - 0{,}06}{2\sqrt{13}} = \sqrt{13} - \frac{0{,}01}{\sqrt{13}} \approx 3{,}6028.$$

Приклад 7. Наближено обчислити $(1{,}02)^2(0{,}99)^3$.

Розв'язання. Візьмемо $f(x,y) = x^2y^3$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$, $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta y = -0{,}01$. Тоді

$$f(1,1) = 1, \quad f'_x(1,1) = 2, \quad f'_y(1,1) = 3.$$

$$f(1{,}02; 0{,}99) \approx 1 + 2 \cdot 0{,}02 + 3 \cdot (-0{,}01) = 1{,}01.$$

Приклад 8. Оцінити зміну площі прямокутника при малих змінах сторін.

Розв'язання. Оскільки $S = xy$, то $dS = y\,dx + x\,dy$. При $x = 10$ см, $y = 6$ см, $dx = 0{,}1$ см, $dy = -0{,}05$ см маємо

$$dS = 6 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot (-0{,}05) = 0{,}1 \text{ см}^2.$$

Відповідь. Площа приблизно збільшиться на $0{,}1$ см^2.

4. Похідні складеної функції двох змінних

Випадок 1. Нехай $z = f(x,y)$, де $x = x(t)$, $y = y(t)$. Якщо всі відповідні функції диференційовні, то за правилом ланцюга

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}}.$$

Приклад 9. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = x^2y + \sin y$, $x = t^2$, $y = 3t$.

Розв'язання. Спочатку знаходимо $f'_x = 2xy$, $f'_y = x^2 + \cos y$, $x'(t) = 2t$, $y'(t) = 3$. За правилом ланцюга

$$\frac{dz}{dt} = 2xy \cdot 2t + (x^2 + \cos y) \cdot 3.$$

Підставляючи $x = t^2$, $y = 3t$, отримуємо

$$\frac{dz}{dt} = 12t^4 + 3t^4 + 3\cos(3t) = 15t^4 + 3\cos(3t).$$

Приклад 10. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = e^{xy}$, $x = \cos t$, $y = \sin t$.

Розв'язання. $f'_x = ye^{xy}$, $f'_y = xe^{xy}$, $x' = -\sin t$, $y' = \cos t$. Тому

$$\frac{dz}{dt} = e^{xy}(-y\sin t + x\cos t) = e^{\sin t\cos t}(\cos^2 t - \sin^2 t).$$

Відповідь. $\dfrac{dz}{dt} = e^{\sin t\cos t}\cos(2t)$.

Випадок 2. Нехай $z = f(x, y)$, де $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Тоді

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}}, \qquad \boxed{\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}}.$$

Приклад 11. Знайти частинні похідні $z = x^2 + xy$, якщо $x = u + v$, $y = u - v$.

Розв'язання. $f'_x = 2x + y$, $f'_y = x$, $x'_u = y'_u = x'_v = 1$, $y'_v = -1$. Отже,

$$z'_u = (2x + y)\cdot 1 + x\cdot 1 = 3x + y = 4u + 2v,$$

$$z'_v = (2x + y)\cdot 1 + x\cdot(-1) = x + y = 2u.$$

Приклад 12. Знайти z'_u, z'_v для $z = \ln(x^2 + y^2)$, $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $u > 0$.

Розв'язання. Маємо $f'_x = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $f'_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$, а також

$$x'_u = \cos v, \quad y'_u = \sin v, \quad x'_v = -u\sin v, \quad y'_v = u\cos v.$$

Тому

$$z'_u = \frac{2(x\cos v + y\sin v)}{x^2 + y^2} = \frac{2}{u}, \qquad z'_v = \frac{2u(-x\sin v + y\cos v)}{x^2 + y^2} = 0.$$

Перевірка: $x^2 + y^2 = u^2$, звідки $z = 2\ln u$.

5. Похідна за напрямом. Градієнт функції

Нехай $\vec{\ell} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ — одиничний вектор напряму, $M_0 = (x_0, y_0)$.

Означення. *Похідною за напрямом* $\vec{\ell}$ у точці M_0 називають границю

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}}(M_0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Для диференційовної функції

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}} = f'_x\cos\alpha + f'_y\sin\alpha}.$$

Означення. *Градієнтом* функції f називають вектор

$$\boxed{\operatorname{grad} f = \nabla f = (f'_x, f'_y)}.$$

Таким чином, похідна за напрямом є скалярним добутком

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}} = \nabla f \cdot \vec{\ell}.$$

Якщо $\nabla f \neq \vec{0}$, то градієнт указує напрям найшвидшого зростання функції, а найбільше значення похідної за одиничним напрямом дорівнює $|\nabla f|$. Градієнт перпендикулярний до регулярної лінії рівня $f(x, y) = c$.

Приклад 13. Знайти градієнт $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ у точці $(1, 2)$.

Розв'язання. $f'_x = 2x + 3y$, $f'_y = 3x + 2y$. У точці $(1, 2)$ отримуємо $f'_x = 8$, $f'_y = 7$.

Відповідь. $\nabla f(1, 2) = (8, 7)$, $|\nabla f(1, 2)| = \sqrt{113}$.

Приклад 14. Знайти похідну $f(x, y) = x^2 + y^2$ у точці $(1, 2)$ за напрямом вектора $\vec{a} = (3, 4)$.

Розв'язання. Довжина $|\vec{a}| = 5$, тому одиничний вектор $\vec{\ell} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Градієнт $\nabla f(1, 2) = (2, 4)$. Тоді

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}}(1, 2) = 2 \cdot \frac{3}{5} + 4 \cdot \frac{4}{5} = \frac{22}{5}.$$

Зауваження. Перед застосуванням формули вектор напряму необхідно нормувати.

Приклад 15. Знайти напрям найбільшого зростання $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$ у точці $(2, 1)$.

Розв'язання. $f'_x = 2x - y$, $f'_y = -x + 4y$. Отже, $\nabla f(2, 1) = (3, 2)$. Напрям найбільшого зростання задає одиничний вектор

$$\vec{\ell} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right), \qquad \max_{|\vec{\ell}|=1} \frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}} = \sqrt{13}.$$

Напрям найбільшого спадання протилежний: $\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$. **Зв'язок із наступною темою.** У внутрішній точці локального екстремуму диференційовної функції необхідно $\nabla f = \vec{0}$. Достатні умови екстремуму розглядатимемо окремо.