ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 16

Частинні похідні функції двох змінних

Вища математика. Перший курс. Економічні спеціальності

1. Короткі теоретичні відомості

Нехай задано функцію $z = f(x, y)$. Щоб знайти частинну похідну за x, вважаємо y сталою і диференціюємо функцію за x. Аналогічно, під час диференціювання за y змінна x є сталою.

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y).}$$

Зокрема, $\frac{\partial}{\partial x}(y^m) = 0$, $\frac{\partial}{\partial x}(xy) = y$, $\frac{\partial}{\partial y}(xy) = x$. Правила диференціювання суми, добутку та частки такі самі, як для функції однієї змінної:

$$(uv)'_x = u'_x v + uv'_x, \qquad \left(\frac{u}{v}\right)'_x = \frac{u'_x v - uv'_x}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

Для складеної функції $z = F(u(x, y))$ діє правило ланцюга:

$$z'_x = F'(u)u'_x, \qquad z'_y = F'(u)u'_y.$$

Частинні похідні другого порядку позначають

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Якщо мішані похідні неперервні в околі точки, то $f''_{xy} = f''_{yx}$.

2. Найпростіші частинні похідні

Приклад 1. Знайти частинні похідні функції $z = 3x^2y - 5xy^2 + 4x - 7y + 9$.

Розв'язання. Зафіксуємо y. Тоді $3x^2y$ диференціюємо як $3y \cdot x^2$, а $-7y + 9$ є сталою:

$$\begin{aligned} z'_x &= (3x^2y)'_x - (5xy^2)'_x + (4x)'_x - (7y)'_x + 9'_x \\ &= 3y \cdot 2x - 5y^2 \cdot 1 + 4 - 0 + 0 = 6xy - 5y^2 + 4. \end{aligned}$$

Тепер вважаємо x сталою:

$$\begin{aligned} z'_y &= 3x^2 \cdot 1 - 5x \cdot 2y + 0 - 7 + 0 \\ &= 3x^2 - 10xy - 7. \end{aligned}$$

Відповідь. $z'_x = 6xy - 5y^2 + 4$, $z'_y = 3x^2 - 10xy - 7$.

Приклад 2. Знайти z'_x і z'_y для $z = x^3y^2 - 2x^2y + 6y^3$.

Розв'язання. При диференціюванні за x множники y^2, y і y^3 є сталими:

$$z'_x = y^2 \cdot 3x^2 - 2y \cdot 2x + 0 = 3x^2y^2 - 4xy.$$

При диференціюванні за y сталими є x^3 і x^2:

$$z'_y = x^3 \cdot 2y - 2x^2 \cdot 1 + 6 \cdot 3y^2 = 2x^3y - 2x^2 + 18y^2.$$

Відповідь. $z'_x = 3x^2y^2 - 4xy$, $z'_y = 2x^3y - 2x^2 + 18y^2$.

3. Похідні добутку та частки

Приклад 3. Знайти частинні похідні $z = (x^2 + y)(xy^2 + 1)$.

Розв'язання. Позначимо $u = x^2+y$, $v = xy^2+1$. Використаємо формулу $(uv)' = u'v + uv'$. За x: $u'_x = 2x$, $v'_x = y^2$, тому

$$z'_x = \underbrace{2x(xy^2 + 1)}_{u'_x v} + \underbrace{(x^2 + y)y^2}_{uv'_x} = 3x^2y^2 + 2x + y^3.$$

За y: $u'_y = 1$, $v'_y = 2xy$, тому

$$z'_y = \underbrace{1 \cdot (xy^2 + 1)}_{u'_y v} + \underbrace{(x^2 + y)2xy}_{uv'_y} = 2x^3y + 3xy^2 + 1.$$

Відповідь. $z'_x = 3x^2y^2 + 2x + y^3$, $z'_y = 2x^3y + 3xy^2 + 1$.

Приклад 4. Знайти частинні похідні $z = \dfrac{x + y}{x - y}$, $x \neq y$.

Розв'язання. Нехай $u = x + y$, $v = x - y$. За правилом похідної частки

$$z'_x = \frac{u'_x v - uv'_x}{v^2} = \frac{1 \cdot (x - y) - (x + y) \cdot 1}{(x - y)^2} = \frac{-2y}{(x - y)^2}.$$

За y маємо $u'_y = 1$, $v'_y = -1$:

$$z'_y = \frac{1 \cdot (x - y) - (x + y)(-1)}{(x - y)^2} = \frac{2x}{(x - y)^2}.$$

Відповідь. $z'_x = -\dfrac{2y}{(x - y)^2}$, $z'_y = \dfrac{2x}{(x - y)^2}$.

Приклад 5. Знайти частинні похідні $z = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$, $xy \neq 0$.

Розв'язання. Спочатку спростимо дріб:

$$z = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Тепер y при диференціюванні за x є сталою, а x — при диференціюванні за y:

$$z'_x = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}, \qquad z'_y = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}.$$

Відповідь. $z'_x = \dfrac{1}{y} - \dfrac{y}{x^2}$, $z'_y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{y^2}$.

4. Похідні складених функцій

Приклад 6. Знайти частинні похідні $z = (x^2 + 3xy)^5$.

Розв'язання. Позначимо $u = x^2 + 3xy$. Зовнішня функція u^5 має похідну $5u^4$; внутрішня — $u'_x = 2x + 3y$, $u'_y = 3x$. За правилом ланцюга:

$$z'_x = 5(x^2 + 3xy)^4 \cdot (2x + 3y),$$
$$z'_y = 5(x^2 + 3xy)^4 \cdot 3x = 15x(x^2 + 3xy)^4.$$

Відповідь. $z'_x = 5(2x + 3y)(x^2 + 3xy)^4$, $z'_y = 15x(x^2 + 3xy)^4$.

Приклад 7. Знайти частинні похідні $z = \sqrt{4 + x^2 + 2y^2}$.

Розв'язання. Запишемо корінь як степінь: $z = (4+x^2+2y^2)^{1/2}$. Для $u^{1/2}$ похідна дорівнює $\frac{1}{2}u^{-1/2}u'$:

$$z'_x = \frac{1}{2}(4 + x^2 + 2y^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{4 + x^2 + 2y^2}},$$

$$z'_y = \frac{1}{2}(4 + x^2 + 2y^2)^{-1/2} \cdot 4y = \frac{2y}{\sqrt{4 + x^2 + 2y^2}}.$$

Відповідь. $z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{4 + x^2 + 2y^2}}$, $z'_y = \dfrac{2y}{\sqrt{4 + x^2 + 2y^2}}$.

Приклад 8. Знайти частинні похідні $z = \ln(x^2 + xy + y^2 + 1)$.

Розв'язання. Для $z = \ln u$ використовуємо $(\ln u)' = u'/u$. Тут $u = x^2+xy+y^2+1 > 0$:

$$u'_x = 2x + y, \qquad u'_y = x + 2y.$$

Отже,

$$z'_x = \frac{2x + y}{x^2 + xy + y^2 + 1}, \qquad z'_y = \frac{x + 2y}{x^2 + xy + y^2 + 1}.$$

Відповідь. $z'_x = \dfrac{2x + y}{x^2 + xy + y^2 + 1}$, $z'_y = \dfrac{x + 2y}{x^2 + xy + y^2 + 1}$.

Приклад 9. Знайти частинні похідні $z = e^{xy}\sin(x + y)$.

Розв'язання. Це добуток $u = e^{xy}$ і $v = \sin(x + y)$. За правилом ланцюга:

$$u'_x = ye^{xy}, \quad u'_y = xe^{xy}, \quad v'_x = \cos(x + y), \quad v'_y = \cos(x + y).$$

Тому за правилом похідної добутку:

$$\begin{aligned} z'_x &= ye^{xy}\sin(x + y) + e^{xy}\cos(x + y) \\ &= e^{xy}\big(y\sin(x + y) + \cos(x + y)\big), \\ z'_y &= xe^{xy}\sin(x + y) + e^{xy}\cos(x + y) \\ &= e^{xy}\big(x\sin(x + y) + \cos(x + y)\big). \end{aligned}$$

Відповідь. Отримані формули для z'_x та z'_y.

5. Значення частинних похідних у точці

Приклад 10. Для $z = x^2y + 3xy^2$ обчислити $z'_x(1,2)$ і $z'_y(1,2)$.

Розв'язання. Спочатку знаходимо похідні як функції двох змінних:

$$z'_x = 2xy + 3y^2, \qquad z'_y = x^2 + 6xy.$$

Лише після цього підставляємо координати точки $(1,2)$:

$$z'_x(1,2) = 2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 = 4 + 12 = 16,$$

$$z'_y(1,2) = 1^2 + 6 \cdot 1 \cdot 2 = 1 + 12 = 13.$$

Відповідь. $z'_x(1,2) = 16$, $z'_y(1,2) = 13$.

6. Частинні похідні другого порядку

Приклад 11. Знайти всі частинні похідні другого порядку $z = x^3y^2 + 2xy^3$.

Розв'язання. Спочатку обчислимо похідні першого порядку:

$$z'_x = 3x^2y^2 + 2y^3, \qquad z'_y = 2x^3y + 6xy^2.$$

Диференціюємо z'_x за x і за y:

$$z''_{xx} = (3x^2y^2 + 2y^3)'_x = 6xy^2,$$

$$z''_{xy} = (3x^2y^2 + 2y^3)'_y = 6x^2y + 6y^2.$$

Диференціюємо z'_y за x і за y:

$$z''_{yx} = (2x^3y + 6xy^2)'_x = 6x^2y + 6y^2,$$

$$z''_{yy} = (2x^3y + 6xy^2)'_y = 2x^3 + 12xy.$$

Бачимо, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Відповідь. $z''_{xx} = 6xy^2$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 6x^2y + 6y^2$, $z''_{yy} = 2x^3 + 12xy$.

Приклад 12. Знайти похідні другого порядку для $z = \ln(x + y)$, $x + y > 0$.

Розв'язання. Похідні першого порядку:

$$z'_x = \frac{1}{x+y}, \qquad z'_y = \frac{1}{x+y}.$$

Застосовуємо похідну степеня $(x+y)^{-1}$:

$$z''_{xx} = -\frac{1}{(x+y)^2}, \quad z''_{xy} = -\frac{1}{(x+y)^2}, \quad z''_{yx} = -\frac{1}{(x+y)^2}, \quad z''_{yy} = -\frac{1}{(x+y)^2}.$$

Відповідь. Усі чотири похідні другого порядку дорівнюють $-\dfrac{1}{(x+y)^2}$.

7. Економічний зміст частинних похідних

Якщо $Q = Q(K, L)$ — обсяг випуску залежно від капіталу K і праці L, то Q'_K показує граничний приріст випуску за капіталом при незмінній праці, а Q'_L — за працею при незмінному капіталі. Похідні описують миттєві темпи зміни моделі, а не точні прирости за скінченних змін.

Приклад 13. Виробнича функція $Q(K, L) = 5K^{1/2}L^{1/2}$, $K, L > 0$. Знайти граничні продукти факторів.

Розв'язання. При диференціюванні за K множник $5L^{1/2}$ сталий:

$$Q'_K = 5L^{1/2} \cdot \frac{1}{2}K^{-1/2} = \frac{5\sqrt{L}}{2\sqrt{K}}.$$

За L аналогічно:

$$Q'_L = 5K^{1/2} \cdot \frac{1}{2}L^{-1/2} = \frac{5\sqrt{K}}{2\sqrt{L}}.$$

Відповідь. $Q'_K = \dfrac{5\sqrt{L}}{2\sqrt{K}}$, $Q'_L = \dfrac{5\sqrt{K}}{2\sqrt{L}}$.

Приклад 14. Витрати підприємства задано $C(x, y) = 2x^2 + xy + 3y^2 + 100$. Знайти граничні витрати за кожним видом продукції та їхні значення при $x = 10$, $y = 5$.

Розв'язання. Знаходимо похідні за кожною змінною:

$$C'_x = 4x + y, \qquad C'_y = x + 6y.$$

Підставляємо $x = 10$, $y = 5$:

$$C'_x(10, 5) = 4 \cdot 10 + 5 = 45, \qquad C'_y(10, 5) = 10 + 6 \cdot 5 = 40.$$

Відповідь. Граничні витрати за x — 45, за y — 40 (в одиницях витрат на одиницю відповідної продукції).

Приклад 15. Функція доходу $R(x, y) = 80x + 60y - x^2 - 2xy - y^2$. Знайти R'_x, R'_y та оцінити їх у точці $(10, 5)$.

Розв'язання. Вважаючи іншу змінну сталою, отримуємо:

$$R'_x = 80 - 2x - 2y, \qquad R'_y = 60 - 2x - 2y.$$

Тоді

$$R'_x(10, 5) = 80 - 20 - 10 = 50, \qquad R'_y(10, 5) = 60 - 20 - 10 = 30.$$

Відповідь. $R'_x = 80 - 2x - 2y$, $R'_y = 60 - 2x - 2y$; у точці $(10, 5)$ — 50 та 30.

8. Завдання для самостійної роботи

Знайти частинні похідні першого порядку (у завданні 5 — також другого порядку):

1. $z = 4x^3y - 2xy^2 + 5y$.

2. $z = (x + y)(x^2 - y)$.
3. $z = \dfrac{x}{x + y}$, $x + y \neq 0$.
4. $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$.
5. $z = x^2 y + x y^2$.
6. $z = e^{2x - y}$.
7. $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$.
8. $C(x, y) = 3x^2 + 2xy + 4y^2 + 50$: знайти $C'_x(2, 3)$, $C'_y(2, 3)$.

Відповіді до самостійної роботи

1. $z'_x = 12x^2 y - 2y^2$, $z'_y = 4x^3 - 4xy + 5$.
2. $z'_x = 3x^2 + 2xy - y$, $z'_y = x^2 - x - 2y$.
3. $z'_x = \dfrac{y}{(x + y)^2}$, $z'_y = -\dfrac{x}{(x + y)^2}$.
4. $z'_x = \dfrac{2x}{1 + x^2 + y^2}$, $z'_y = \dfrac{2y}{1 + x^2 + y^2}$.
5. $z'_x = 2xy + y^2$, $z'_y = x^2 + 2xy$; $z''_{xx} = 2y$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 2x + 2y$, $z''_{yy} = 2x$.
6. $z'_x = 2e^{2x - y}$, $z'_y = -e^{2x - y}$.
7. $z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$, $z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$.
8. $C'_x(2, 3) = 18$, $C'_y(2, 3) = 28$.