ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 6

Математичний аналіз

Перший курс. Спеціальність «Інженерія програмного забезпечення»

Функції багатьох змінних. Область визначення. Лінії рівня. Границі функцій двох змінних

Мета заняття. Навчитися обчислювати значення функцій кількох змінних, знаходити й зображати їхні області визначення, будувати лінії рівня, обчислювати границі та перевіряти їх існування різними шляхами наближення.

Короткі теоретичні відомості

Функція двох змінних має вигляд $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Для знаходження області визначення потрібно враховувати обмеження: знаменник не дорівнює нулю; підкореневий вираз парного кореня невід'ємний; аргумент логарифма строго додатний. Лінії рівня визначаються рівнянням $f(x, y) = c$. Границя $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A$ існує, якщо значення функції прямують до A незалежно від шляху наближення. Два шляхи з різними граничними значеннями доводять, що границі немає. У полярних координатах $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; для доведення границі потрібна оцінка, незалежна від φ.

1. Обчислення значень функцій

Завдання 1. Нехай $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2$. Знайти $f(2, -1)$ і $f(-1, 2)$.

Розв'язання. Підставляємо координати в заданий вираз, не змінюючи порядку дій:

$$f(2, -1) = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot (-1) + 3(-1)^2 = 4 + 4 + 3 = 11.$$

$$f(-1, 2) = (-1)^2 - 2(-1) \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 = 1 + 4 + 12 = 17.$$

Відповідь. $f(2, -1) = 11$, $f(-1, 2) = 17$.

Завдання 2. Нехай $u(x, y, z) = \dfrac{x + y}{1 + z^2} + xyz$. Знайти $u(1, 3, 2)$ і $u(0, 2, -1)$.

Розв'язання. Послідовно підставляємо три аргументи:

$$u(1, 3, 2) = \frac{1 + 3}{1 + 2^2} + 1 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{4}{5} + 6 = \frac{34}{5}.$$

$$u(0, 2, -1) = \frac{0 + 2}{1 + (-1)^2} + 0 \cdot 2 \cdot (-1) = \frac{2}{2} = 1.$$

Відповідь. $\dfrac{34}{5}$; 1.

2. Області визначення функцій двох змінних

Завдання 3. Знайти область визначення $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ і зобразити її.

Розв'язання. Корінь визначений тоді й тільки тоді, коли $16 - x^2 - y^2 \geq 0$, тобто

$$x^2 + y^2 \leq 16.$$

Це замкнений круг радіуса 4 із центром у початку координат. Коло входить до області визначення.

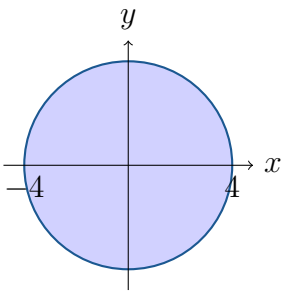

Рис. 1. Замкнений круг $x^2 + y^2 \le 16$.

Відповідь. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 16\}$.

Завдання 4. Знайти область визначення $z = \ln(25 - x^2 - y^2)$ і зобразити її.

Розв'язання. Для логарифма вимагаємо строго додатний аргумент:

$$25 - x^2 - y^2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 < 25.$$

Маємо відкритий круг радіуса 5. Його граничне коло не належить області.

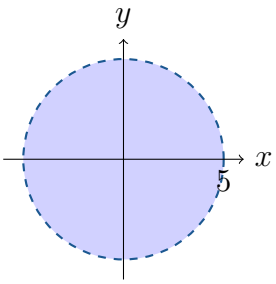

Рис. 2. Відкритий круг: пунктирна межа виключена.

Відповідь. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 25\}$.

Завдання 5. Знайти область визначення $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 4}$ і зобразити її.

Розв'язання. Знаменник не може дорівнювати нулю:

$$x^2 + y^2 - 4 \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 \neq 4.$$

Отже, виключаємо тільки коло радіуса 2; внутрішні й зовнішні точки дозволені.

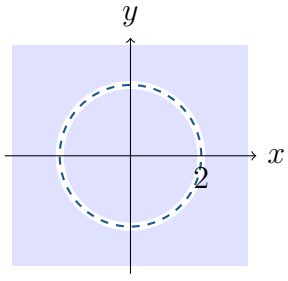

Рис. 3. Виключено лише коло $x^2 + y^2 = 4$.

Відповідь. $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\}$.

Завдання 6. Знайти область визначення $z = \sqrt{y - x^2}$. Зобразити її на площині.

Розв'язання. Умова існування квадратного кореня:

$$y - x^2 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y \geq x^2.$$

Область лежить на параболі $y = x^2$ і вище від неї. Парабола входить до області.

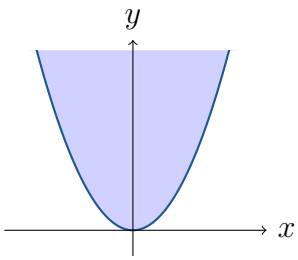

Рис. 4. Область $y \geq x^2$.

Відповідь. $D = \{(x, y) : y \geq x^2\}$.

Завдання 7. Знайти область визначення $z = \dfrac{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}{\ln(y + 2)}$. Зобразити її.

Розв'язання. Одночасно маємо три обмеження:

$$9 - x^2 - y^2 \geq 0, \qquad y + 2 > 0, \qquad \ln(y + 2) \neq 0.$$

Остання умова еквівалентна $y + 2 \neq 1$, тобто $y \neq -1$. Отже, беремо замкнений круг радіуса 3, залишаємо тільки точки з $y > -2$ та виключаємо відрізок прямої $y = -1$, який лежить у крузі.

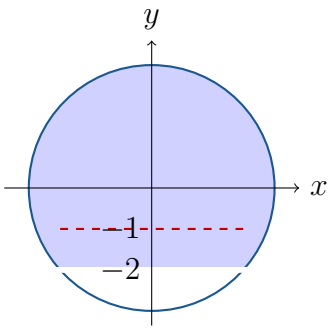

Рис. 5. Круг із обмеженням $y > -2$ і виключеною прямою $y = -1$.

Відповідь. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9,\ y > -2,\ y \neq -1\}$.

3. Лінії рівня

Завдання 8. Знайти й побудувати лінії рівня функції $z = x^2 + y^2$ для $c = 1, 4, 9$.

Розв'язання. За означенням покладаємо $z = c$:

$$x^2 + y^2 = c.$$

При $c = 1, 4, 9$ отримуємо концентричні кола з центром $(0, 0)$ і радіусами $1, 2, 3$ відповідно.

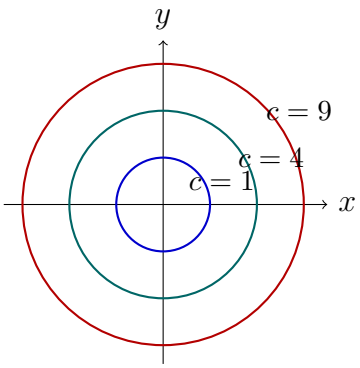

Рис. 6. Концентричні лінії рівня.

Відповідь. Три кола радіусів 1, 2, 3.

Завдання 9. Знайти й побудувати лінії рівня функції $z = 2x - y$ для $c = -2, 0, 2$.

Розв'язання. З рівняння $2x - y = c$ виражаємо y:

$$y = 2x - c.$$

Для $c = -2, 0, 2$ одержуємо прямі $y = 2x + 2$, $y = 2x$, $y = 2x - 2$. Вони паралельні, оскільки мають однаковий кутовий коефіцієнт 2.

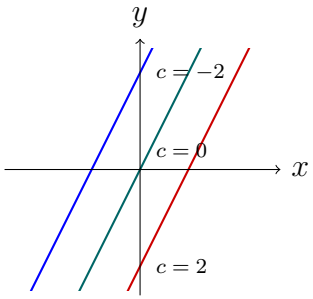

Рис. 7. Три паралельні прямі.

Відповідь. $y = 2x + 2$, $y = 2x$, $y = 2x - 2$.

Завдання 10. Знайти й охарактеризувати лінії рівня функції $z = x^2 - y^2$ для $c = -1, 0, 1$.

Розв'язання. Рівняння лінії рівня: $x^2 - y^2 = c$. При $c = 1$ маємо гіперболу $x^2 - y^2 = 1$ із гілками вздовж осі Ox; при $c = -1$ — гіперболу $y^2 - x^2 = 1$ із гілками вздовж Oy. При $c = 0$:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = x \text{ або } y = -x.$$

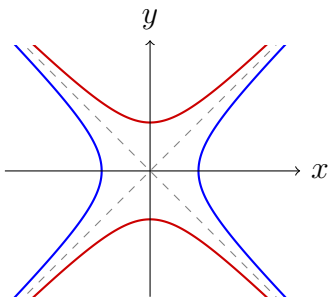

Рис. 8. Гіперболи $c = 1$ (сині), $c = -1$ (червоні), прямі $c = 0$ (пунктир).

Відповідь. Для $c = \pm 1$ — гіперболи; для $c = 0$ — дві прямі $y = \pm x$.

4. Обчислення границь функцій двох змінних

Завдання 11. Обчислити $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} (x^2 + 3xy - y^2)$.

Розв'язання. Многочлен неперервний на $\mathbb{R}^2$. Тому підставляємо координати граничної точки:

$$2^2 + 3 \cdot 2 \cdot (-1) - (-1)^2 = 4 - 6 - 1 = -3.$$

Відповідь. -3.

Завдання 12. Обчислити $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x^2 + y}{x + y^2}$.

Розв'язання. Чисельник і знаменник — многочлени, а знаменник у точці $(1, 2)$ дорівнює $1 + 2^2 = 5 \neq 0$. Отже, можна підставити:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2 + y}{x + y^2} = \frac{1^2 + 2}{1 + 2^2} = \frac{3}{5}.$$

Відповідь. $\dfrac{3}{5}$.

Завдання 13. Обчислити $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$.

Розв'язання. Безпосередня підстановка дає невизначеність $0/0$. Для $(x, y) \neq (0, 0)$ оцінюємо модуль:

$$0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = |y| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Коли $(x, y) \to (0, 0)$, останній вираз прямує до нуля. За теоремою про двох міліціонерів границя дорівнює нулю.

Відповідь. 0.

Завдання 14. Обчислити $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ за допомогою полярних координат.

Розв'язання. Покладемо $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Тоді

$$\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \frac{r^4 \cos^2\varphi \sin^2\varphi}{r^2} = r^2 \cos^2\varphi \sin^2\varphi.$$

Оскільки $0 \leq \cos^2\varphi \sin^2\varphi \leq \frac{1}{4}$, маємо

$$0 \leq \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{r^2}{4} \xrightarrow[r\to 0+]{} 0.$$

Оцінка не залежить від кута φ, тому границя існує.

Відповідь. 0.

Завдання 15. Обчислити $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$.

Розв'язання. Використаємо нерівності $x^4 \le (x^2+y^2)x^2$ та $y^4 \le (x^2+y^2)y^2$. Тоді

$$0 \le \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \le x^2+y^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

Отже, за теоремою про двох міліціонерів маємо шукану границю.

Відповідь. 0.

5. Дослідження існування границь різними шляхами

Завдання 16. Дослідити $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Розв'язання. Перевіримо два шляхи. Уздовж $y=0$:

$$\frac{x\cdot 0}{x^2+0} = 0 \quad (x\neq 0), \qquad \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Уздовж $y=x$:

$$\frac{x\cdot x}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \quad (x\neq 0), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Отримані значення 0 і $\frac{1}{2}$ різні. Тому спільної границі немає.

Відповідь. Границя не існує.

Завдання 17. Дослідити $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Розв'язання. Уздовж осі Ox (тобто $y=0$):

$$\frac{x^2-0}{x^2+0} = 1 \quad (x\neq 0).$$

Уздовж осі Oy (тобто $x=0$):

$$\frac{0-y^2}{0+y^2} = -1 \quad (y\neq 0).$$

Оскільки вздовж двох допустимих шляхів отримали різні граничні значення, загальна границя відсутня.

Відповідь. Границя не існує.

Завдання 18. Дослідити $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$. Чи достатньо перевірки прямих $y=kx$?

Розв'язання. Нехай спочатку $y=kx$. Якщо $k\neq 0$, то

$$\frac{x^2(kx)}{x^4+k^2x^2} = \frac{kx}{x^2+k^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Для $k=0$ функція також дорівнює нулю при $x\neq 0$. Уздовж вертикальної прямої $x=0$ вона теж дорівнює нулю при $y\neq 0$. Проте візьмемо криволінійний шлях $y=x^2$:

$$\frac{x^2\cdot x^2}{x^4+(x^2)^2} = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \quad (x\neq 0).$$

Маємо різні граничні значення: 0 уздовж прямих і $\frac{1}{2}$ уздовж параболи. Перевірка всіх прямих сама по собі не доводить існування границі.

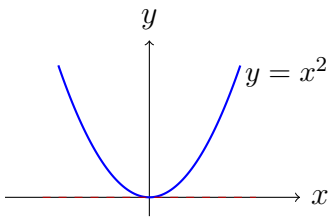

Рис. 9. Криволінійний шлях $y = x^2$ до початку координат.

Відповідь. Границя не існує; перевірки прямих недостатньо.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти область визначення $z = \sqrt{y + 2 - x^2}$ та зобразити її.
2. Знайти область визначення $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$ та зобразити її.
3. Побудувати лінії рівня $z = x^2 + 4y^2$ для $c = 1$ і $c = 4$.
4. Обчислити $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2 + 2y^2}$.
5. Дослідити $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$.

Короткі відповіді для перевірки. 1) $y \geq x^2 - 2$; 2) $x^2 + y^2 < 4$; 3) еліпси з півосями $(1, \frac{1}{2})$ і $(2, 1)$; 4) 0; 5) границі немає (уздовж осей отримуємо 1 і 0).