ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 12

Векторний і мішаний добутки векторів та їх застосування

Дисципліна: Лінійна алгебра та аналітична геометрія. **Спеціальність:** Інженерія програмного забезпечення (1 курс).

Мета: навчитися обчислювати векторний і мішаний добутки, визначати площі трикутників і паралелограмів, об'єми паралелепіпедів і тетраедрів, перевіряти колінеарність і компланарність, знаходити нормалі до площин, досліджувати системи векторів на утворення базису.

Короткі теоретичні відомості

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ a_1&a_2&a_3\\ b_1&b_2&b_3\end{vmatrix},\qquad |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\varphi.$$

$$S_{\text{пар.}}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|,\qquad S_{\triangle}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|.$$

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\ b_1&b_2&b_3\\ c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}.$$

$$V_{\text{пар-да}}=|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]|,\qquad V_{\text{тетр.}}=\frac{1}{6}|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]|.$$

Зауваження. Векторний добуток у цьому занятті розглядаємо для векторів простору $\mathbb{R}^3$. Три вектори компланарні тоді й лише тоді, коли їхній мішаний добуток дорівнює нулю. Три вектори утворюють базис $\mathbb{R}^3$ тоді й лише тоді, коли визначник їхніх координат відмінний від нуля.

Частина I. Векторний добуток і площі

Завдання 1. Дано $\boldsymbol{a}=(2;-1;3)$, $\boldsymbol{b}=(1;4;-2)$. Знайти $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

Розв'язання. Розкладаємо визначник за першим рядком:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ 2&-1&3\\ 1&4&-2\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}\big((-1)(-2)-3\cdot4\big)-\boldsymbol{j}\big(2(-2)-3\cdot1\big)+\boldsymbol{k}\big(2\cdot4-(-1)\cdot1\big).$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(-10;7;9).$$

Відповідь: $(-10;7;9)$.

Завдання 2. Для $\boldsymbol{a}=(1;2;2)$, $\boldsymbol{b}=(2;0;1)$ знайти обидва добутки $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ та перевірити їхню властивість.

Розв'язання. Розкладаємо визначник за першим рядком (за ортами $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$):

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ 1&2&2\\ 2&0&1\end{vmatrix}=(2\cdot1-2\cdot0)\boldsymbol{i}-(1\cdot1-2\cdot2)\boldsymbol{j}+(1\cdot0-2\cdot2)\boldsymbol{k}$$
$$=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}=(2;3;-4).$$

Змінюючи порядок множників, отримуємо $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=(-2;-3;4)=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

Відповідь: $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (2; 3; -4)$, $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = (-2; -3; 4)$.

Завдання 3. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\boldsymbol{a} = (1; 2; 0)$ і $\boldsymbol{b} = (3; -1; 2)$.

Розв'язання. Маємо

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (2 \cdot 2 - 0(-1))\boldsymbol{i} - (1 \cdot 2 - 0 \cdot 3)\boldsymbol{j} + (1(-1) - 2 \cdot 3)\boldsymbol{k} \\ &= 4\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k} = (4; -2; -7).\end{aligned}$$

Отже, $S = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-7)^2} = \sqrt{69}$.

Відповідь: $S = \sqrt{69}$.

Завдання 4. Знайти площу трикутника з вершинами $A(1; 0; 2)$, $B(3; 1; 0)$, $C(2; 4; 3)$.

Розв'язання. Вектори сторін із вершини A:

$$\overrightarrow{AB} = (2; 1; -2), \qquad \overrightarrow{AC} = (1; 4; 1).$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1 \cdot 1 - (-2) \cdot 4)\boldsymbol{i} - (2 \cdot 1 - (-2) \cdot 1)\boldsymbol{j} + (2 \cdot 4 - 1 \cdot 1)\boldsymbol{k} \\ &= 9\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k} = (9; -4; 7).\end{aligned}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{9^2 + (-4)^2 + 7^2} = \frac{\sqrt{146}}{2}.$$

Відповідь: $S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{146}}{2}$.

Завдання 5. Визначити, чи колінеарні $\boldsymbol{a} = (2; -4; 6)$ і $\boldsymbol{b} = (-1; 2; -3)$, використавши векторний добуток.

Розв'язання. Обчислимо:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -4 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \\ &= ((-4)(-3) - 6 \cdot 2)\boldsymbol{i} - (2(-3) - 6(-1))\boldsymbol{j} \\ &\quad + (2 \cdot 2 - (-4)(-1))\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0} = (0; 0; 0).\end{aligned}$$

Оскільки $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, ненульові вектори колінеарні. Також $\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{b}$, тому вони протилежно напрямлені.

Відповідь: колінеарні, протилежно напрямлені.

Завдання 6. Знайти одиничний вектор нормалі до площини, натягнутої на $\boldsymbol{a} = (1; 0; 2)$ та $\boldsymbol{b} = (0; 3; 1)$.

Розв'язання. Вектор нормалі

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -6\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k} = (-6; -1; 3).$$

, його довжина $|\boldsymbol{n}| = \sqrt{36+1+9} = \sqrt{46}$. Нормуючи, отримуємо

$$\boldsymbol{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{46}}(-6;-1;3).$$

Протилежний вектор також є одиничною нормаллю.

Відповідь: $\boldsymbol{n}_0 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{46}}(-6;-1;3)$.

Завдання 7. Знайти m, якщо площа паралелограма на $\boldsymbol{a} = (m;0;0)$ і $\boldsymbol{b} = (0;3;4)$ дорівнює 20.

Розв'язання.

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ m & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -4m\boldsymbol{j} + 3m\boldsymbol{k} = (0;-4m;3m).$$

Тому

$$S = \sqrt{16m^2+9m^2} = 5|m| = 20.$$

Отже, $|m| = 4$.

Відповідь: $m = \pm 4$.

Завдання 8. Дано $A(0;1;2)$, $B(2;0;1)$, $C(1;3;0)$. Знайти площу паралелограма зі сторонами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

Розв'язання. $\overrightarrow{AB} = (2;-1;-1)$, $\overrightarrow{AC} = (1;2;-2)$, звідси

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k} = (4;3;5).$$

$$S = \sqrt{16+9+25} = 5\sqrt{2}.$$

Відповідь: $S = 5\sqrt{2}$.

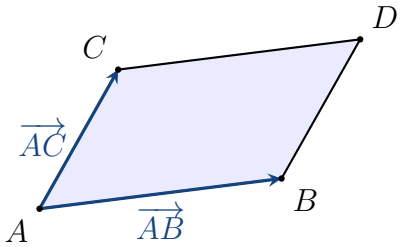


Схема паралелограма, побудованого на $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ (не в масштабі).

Частина II. Мішаний добуток, об'єми та компланарність

Завдання 9. Обчислити $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$, якщо $\boldsymbol{a} = (1;2;0)$, $\boldsymbol{b} = (0;1;3)$, $\boldsymbol{c} = (2;-1;1)$.

Розв'язання. За формулою визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1+3) - 2(0-6) = 4+12 = 16.$$

Відповідь: $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = 16$.

Завдання 10. Знайти об'єм паралелепіпеда на векторах $\boldsymbol{a} = (1; 0; 2)$, $\boldsymbol{b} = (2; 1; 0)$, $\boldsymbol{c} = (0; 3; 1)$.

Розв'язання. Мішаний добуток

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1(1 \cdot 1 - 0 \cdot 3) + 2(2 \cdot 3 - 1 \cdot 0) = 13.$$

Об'єм дорівнює модулю мішаного добутку: $V = |13| = 13$.

Відповідь: $V = 13$.

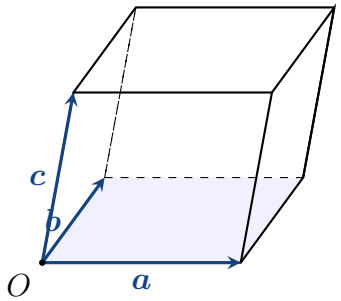


Схема паралелепіпеда на трьох векторах (не в масштабі).

Завдання 11. Знайти об'єм тетраедра з вершинами $A(0; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $C(0; 3; 0)$, $D(1; 1; 4)$.

Розв'язання. Беремо три ребра з вершини A:

$$\overrightarrow{AB} = (2; 0; 0), \quad \overrightarrow{AC} = (0; 3; 0), \quad \overrightarrow{AD} = (1; 1; 4).$$

$$V = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}|2 \cdot 3 \cdot 4| = 4.$$

Відповідь: $V = 4$.

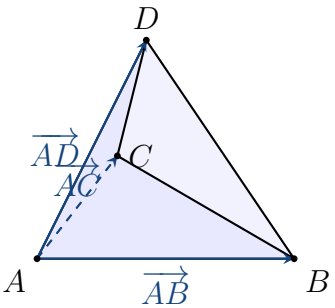


Схема тетраедра $ABCD$ (не в масштабі).

Завдання 12. Перевірити на компланарність вектори $\boldsymbol{a} = (1; 2; 3)$, $\boldsymbol{b} = (2; 1; 0)$, $\boldsymbol{c} = (3; 3; 3)$.

Розв'язання. Оскільки $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, вектори лінійно залежні. Перевіримо критерієм:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 6 + 3 \cdot 3 = 0.$$

Отже, вектори компланарні.

Відповідь: вектори компланарні.

Завдання 13. Знайти параметр m, за якого вектори $\boldsymbol{a} = (1; 2; 1)$, $\boldsymbol{b} = (0; 1; 2)$, $\boldsymbol{c} = (3; m; 4)$ компланарні.

Розв'язання. Необхідна і достатня умова — нульовий визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & m & 4 \end{vmatrix} = (4 - 2m) + 2 \cdot 6 + (0 - 3) = 13 - 2m.$$

Тому $13 - 2m = 0$, звідки $m = \dfrac{13}{2}$.

Відповідь: $m = \dfrac{13}{2}$.

Завдання 14. Чи лежать точки $A(0; 0; 0)$, $B(1; 2; 0)$, $C(0; 1; 1)$, $D(2; 5; 1)$ в одній площині?

Розв'язання. $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0; 1; 1)$, $\overrightarrow{AD} = (2; 5; 1)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1(1 - 5) - 2(0 - 2) = -4 + 4 = 0.$$

Отже, чотири точки компланарні.

Відповідь: так, точки лежать в одній площині.

Завдання 15. Дано $A(1; 0; 0)$, $B(2; 1; 0)$, $C(1; 2; 1)$, $D(3; 1; 4)$. Знайти об'єм тетраедра $ABCD$.

Розв'язання.

$$\overrightarrow{AB} = (1; 1; 0), \quad \overrightarrow{AC} = (0; 2; 1), \quad \overrightarrow{AD} = (2; 1; 4).$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1(8 - 1) - 1(0 - 2) = 9.$$

Тому $V = \dfrac{|9|}{6} = \dfrac{3}{2}$.

Відповідь: $V = \dfrac{3}{2}$.

Завдання 16. Знайти параметр m, якщо об'єм паралелепіпеда на векторах $\boldsymbol{a} = (1; 0; 0)$, $\boldsymbol{b} = (0; 2; 0)$, $\boldsymbol{c} = (1; 1; m)$ дорівнює 12.

Розв'язання.

$$V = \left| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} \right| = |2m| = 12.$$

Отже, $|m| = 6$.

Відповідь: $m = \pm 6$.

Завдання 17. Знайти площу грані ABC і висоту тетраедра $ABCD$, опущену з вершини D, якщо $A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $C(0;4;0)$, $D(1;1;6)$.

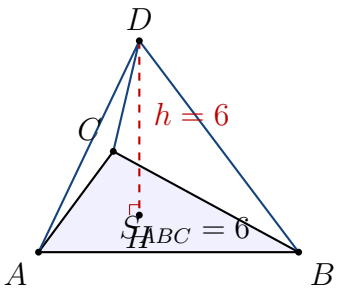
Розв'язання. $\overrightarrow{AB} = (3;0;0)$, $\overrightarrow{AC} = (0;4;0)$, тому

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0;0;12), \qquad S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6.$$

Мішаний добуток із $\overrightarrow{AD} = (1;1;6)$ дорівнює $12 \cdot 6 = 72$. Отже,

$$V = \frac{72}{6} = 12, \qquad h = \frac{3V}{S_{ABC}} = \frac{36}{6} = 6.$$

Відповідь: $S_{ABC} = 6$, $h = 6$.



Тетраедр $ABCD$: основа ABC і висота $DH \perp (ABC)$ (схематично, не в масштабі).

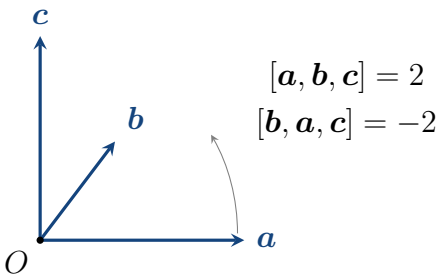
Завдання 18. Довести на конкретному прикладі, що перестановка двох множників змінює знак мішаного добутку. Взяти $\boldsymbol{a} = (1;0;0)$, $\boldsymbol{b} = (0;1;0)$, $\boldsymbol{c} = (0;0;2)$.

Розв'язання. Безпосередньо обчислюємо

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, \qquad [\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

При цьому об'єм паралелепіпеда в обох випадках однаковий і дорівнює 2, оскільки береться модуль визначника.

Відповідь: $[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}] = -[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$.



Перестановка двох векторів змінює орієнтацію і знак мішаного добутку (схематично).

Частина III. Базис у просторі $\mathbb{R}^3$

Завдання 19. Дослідити, чи утворюють вектори $\boldsymbol{a} = (1;2;0)$, $\boldsymbol{b} = (0;1;1)$, $\boldsymbol{c} = (2;0;1)$ базис простору $\mathbb{R}^3$.

Розв'язання. Три вектори утворюють базис $\mathbb{R}^3$ тоді й лише тоді, коли вони лінійно незалежні, тобто визначник матриці їхніх координат не дорівнює нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(1\cdot 1 - 1\cdot 0) - 2(0\cdot 1 - 1\cdot 2) = 1 + 4 = 5 \neq 0.$$

Отже, вектори лінійно незалежні та утворюють базис простору $\mathbb{R}^3$.

Відповідь: так, вектори утворюють базис $\mathbb{R}^3$.

Завдання 20. Знайти всі значення параметра m, за яких вектори $\boldsymbol{a} = (1;1;0)$, $\boldsymbol{b} = (0;1;2)$, $\boldsymbol{c} = (2;m;1)$ утворюють базис простору $\mathbb{R}^3$. Для значень, за яких базис не утворюється, виразити один вектор через два інші.

Розв'язання. Обчислюємо визначник:

$$\Delta(m) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & m & 1 \end{vmatrix} = 1(1 - 2m) - 1(0 - 4) = 5 - 2m.$$

Умова базису: $\Delta(m) \neq 0$, тобто $m \neq \frac{5}{2}$. Якщо $m = \frac{5}{2}$, то

$$2\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b} = (2;2;0) + (0;\tfrac{1}{2};1) = (2;\tfrac{5}{2};1) = \boldsymbol{c}.$$

Тому за $m = \frac{5}{2}$ вектори лінійно залежні й базису не утворюють.

Відповідь: утворюють базис при $m \neq \dfrac{5}{2}$; при $m = \dfrac{5}{2}$ маємо $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{a} + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$.