ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 11

ДІЇ НАД ВЕКТОРАМИ. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК

Лінійна алгебра та аналітична геометрія
Спеціальність «Інженерія програмного забезпечення» · 1 курс

Мета заняття. Навчитися знаходити координати та довжину вектора, виконувати лінійні операції, обчислювати скалярний добуток, кути між векторами, перевіряти перпендикулярність і колінеарність, розв'язувати задачі у $\mathbb{R}^n$.

Основні формули

Для $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ маємо

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n), \qquad \lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n).$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A,\, y_B - y_A), \qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i, \qquad \cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}.$$

Ненульові вектори перпендикулярні тоді й лише тоді, коли $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; колінеарні тоді й лише тоді, коли один є числовим кратним іншого.

Завдання з детальними розв'язаннями

Завдання 1. Дано $A(2; -1)$, $B(5; 3)$. Знайти координати $\overrightarrow{AB}$ та його довжину.

Розв'язання. Від координат кінця віднімаємо координати початку:

$$\overrightarrow{AB} = (5 - 2;\ 3 - (-1)) = (3; 4).$$

За формулою довжини:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

Відповідь. $\overrightarrow{AB} = (3; 4)$, $|\overrightarrow{AB}| = 5$.

Завдання 2. $\vec{a} = (2; -3)$, $\vec{b} = (-1; 4)$. Знайти $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $2\vec{a}$, $-3\vec{b}$, $2\vec{a} - 3\vec{b}$.

Розв'язання. Додаємо, віднімаємо та множимо на число покоординатно:

$$\vec{a} + \vec{b} = (2 - 1;\ -3 + 4) = (1; 1),$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (2 - (-1);\ -3 - 4) = (3; -7),$$

$$2\vec{a} = (4; -6), \qquad -3\vec{b} = (3; -12),$$

$$2\vec{a} - 3\vec{b} = (4; -6) - (-3; 12) = (7; -18).$$

Відповідь. $(1;1)$; $(3;-7)$; $(4;-6)$; $(3;-12)$; $(7;-18)$.

Завдання 3. $\vec{a}=(1;2;-1)$, $\vec{b}=(3;-1;2)$. Знайти $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $3\vec{a}+2\vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}&=(1+3;\,2-1;\,-1+2)=(4;1;1),\\ \vec{a}-\vec{b}&=(1-3;\,2+1;\,-1-2)=(-2;3;-3),\\ 3\vec{a}+2\vec{b}&=(3;6;-3)+(6;-2;4)=(9;4;1),\\ |\vec{a}|&=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6},\\ |\vec{b}|&=\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{14}.\end{aligned}$$

Відповідь. $(4;1;1)$; $(-2;3;-3)$; $(9;4;1)$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{14}$.

Завдання 4. Знайти x, y, якщо $(2x-1;\,y+3)=(5;7)$.

Розв'язання. Рівні вектори мають однакові відповідні координати. Отже,

$$\begin{cases}2x-1=5,\\ y+3=7,\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}2x=6,\\ y=4,\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad x=3,\ y=4.$$

Відповідь. $x=3$, $y=4$; використано покоординатну рівність векторів.

Завдання 5. $A(1;2)$, $B(4;6)$, $C(-2;3)$. Знайти $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ і перевірити $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=(4-1;6-2)=(3;4),\\ \overrightarrow{AC}&=(-2-1;3-2)=(-3;1),\\ \overrightarrow{BC}&=(-2-4;3-6)=(-6;-3).\end{aligned}$$

Перевіряємо правило трикутника:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(3;4)+(-6;-3)=(-3;1)=\overrightarrow{AC}.$$

Відповідь. Рівність виконується.

Завдання 6. $\vec{a}=(2;-1;3)$, $\vec{b}=(1;4;-2)$. Знайти скалярний добуток і довжини.

Розв'язання. Перемножуємо відповідні координати й додаємо:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot1+(-1)\cdot4+3\cdot(-2)=2-4-6=-8.$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{14},\qquad|\vec{b}|=\sqrt{1+16+4}=\sqrt{21}.$$

Відповідь. -8, $\sqrt{14}$, $\sqrt{21}$.

Завдання 7. Знайти кут між $\vec{a}=(1;1)$ та $\vec{b}=(1;0)$.

Розв'язання.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 1 + 1\cdot 0 = 1, \quad |\vec{a}| = \sqrt{2}, \quad |\vec{b}| = 1.$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \varphi = 45^\circ.$$

Відповідь. 45°.

Завдання 8. Чи перпендикулярні $\vec{a} = (2;-3;1)$ та $\vec{b} = (1;1;1)$? Якщо ні, знайти косинус кута.

Розв'язання.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 1 + (-3)\cdot 1 + 1\cdot 1 = 0.$$

Оскільки скалярний добуток дорівнює нулю і обидва вектори ненульові, вони перпендикулярні. Тому $\cos\varphi = 0$.

Відповідь. Перпендикулярні; $\varphi = 90^\circ$, $\cos\varphi = 0$.

Завдання 9. Знайти m, якщо $\vec{a} = (m;2;-1)$, $\vec{b} = (3;-1;4)$ перпендикулярні.

Розв'язання. Умова перпендикулярності $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ дає

$$3m + 2(-1) + (-1)4 = 0 \quad\Longrightarrow\quad 3m - 6 = 0 \quad\Longrightarrow\quad m = 2.$$

Відповідь. $m = 2$.

Завдання 10. Перевірити колінеарність пар $\vec{a} = (2;-4)$, $\vec{b} = (-1;2)$ та $\vec{c} = (3;6)$, $\vec{d} = (2;5)$.

Розв'язання. Для першої пари

$$\vec{a} = -2\vec{b}, \quad \text{бо} \quad -2(-1;2) = (2;-4).$$

Отже, вектори колінеарні та протилежно напрямлені (коефіцієнт -2). Для другої пари перевіряємо визначник координат:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 5 - 6\cdot 2 = 3 \neq 0.$$

Отже, $\vec{c}$ та $\vec{d}$ неколінеарні.

Відповідь. Перша пара колінеарна, коефіцієнт -2, напрямки протилежні; друга пара неколінеарна.

Завдання 11. $A(1;1)$, $B(5;2)$, $C(3;6)$. Знайти кут $\angle BAC$.

Розв'язання. Кут при вершині A утворюють вектори

$$\overrightarrow{AB} = (5-1;2-1) = (4;1), \quad \overrightarrow{AC} = (3-1;6-1) = (2;5).$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\cdot 2 + 1\cdot 5 = 13, \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{17}, \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{29}.$$

$$\cos\angle BAC = \frac{13}{\sqrt{17}\sqrt{29}} = \frac{13}{\sqrt{493}}.$$

Відповідь. $\angle BAC = \arccos \dfrac{13}{\sqrt{493}} \approx 54{,}2^\circ$.

Завдання 12. У $\mathbb{R}^4$ дано $\vec{a} = (1;-2;3;1)$, $\vec{b} = (2;1;-1;3)$. Знайти $2\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$, довжини та косинус кута.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} 2\vec{a} - 3\vec{b} &= (2;-4;6;2) - (6;3;-3;9) = (-4;-7;9;-7),\\ \vec{a}\cdot\vec{b} &= 1\cdot 2 + (-2)\cdot 1 + 3\cdot(-1) + 1\cdot 3 = 2 - 2 - 3 + 3 = 0,\\ |\vec{a}| &= \sqrt{1+4+9+1} = \sqrt{15},\\ |\vec{b}| &= \sqrt{4+1+1+9} = \sqrt{15},\\ \cos\varphi &= \frac{0}{\sqrt{15}\sqrt{15}} = 0. \end{aligned}$$

Відповідь. $(-4;-7;9;-7)$; 0; $\sqrt{15}$ і $\sqrt{15}$; $\cos\varphi = 0$.

Завдання 13. У $\mathbb{R}^5$: $\vec{a} = (1;2;-1;3;2)$, $\vec{b} = (2;-1;4;1;-2)$, $\vec{c} = (m;1;2;-1;3)$. Знайти m, щоб $\vec{c} \perp (\vec{a} + \vec{b})$.

Розв'язання. Спочатку додаємо вектори:

$$\vec{a} + \vec{b} = (3;1;3;4;0).$$

Умова ортогональності:

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = 3m + 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + (-1)\cdot 4 + 3\cdot 0 = 3m + 3 = 0.$$

Звідси $3m = -3$, тобто $m = -1$.

Відповідь. $m = -1$.

Завдання 14. У $\mathbb{R}^4$: $\vec{a} = (1;2;-1;3)$, $\vec{b} = (2;-1;1;2)$, $\vec{c} = (5;3;-1;8)$. Чи існують α, β такі, що $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$?

Розв'язання. Прирівнюємо відповідні координати:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 5,\\ 2\alpha - \beta = 3,\\ -\alpha + \beta = -1,\\ 3\alpha + 2\beta = 8. \end{cases}$$

Із перших двох рівнянь: $\alpha = 5 - 2\beta$ і $2(5-2\beta) - \beta = 3$, звідки $\beta = \frac{7}{5}$, $\alpha = \frac{11}{5}$. Перевіряємо третє рівняння:

$$-\alpha + \beta = -\frac{11}{5} + \frac{7}{5} = -\frac{4}{5} \neq -1.$$

Отже, отримані значення не задовольняють усі рівняння системи; інших значень перші два рівняння не допускають.

Відповідь. Ні, вектор $\vec{c}$ не можна подати у вигляді $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$.

Завдання 15. У $\mathbb{R}^4$: $\vec{a}=(1;2;-1;2)$, $\vec{b}=(2;-1;3;1)$. Знайти $\vec{x}=2\vec{a}+\lambda\vec{b}$, якщо $\vec{x}\cdot\vec{a}=0$.

Розв'язання. За лінійністю скалярного добутку

$$(2\vec{a}+\lambda\vec{b})\cdot\vec{a}=2(\vec{a}\cdot\vec{a})+\lambda(\vec{b}\cdot\vec{a})=0.$$

Обчислюємо окремо:

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=1+4+1+4=10,\qquad \vec{b}\cdot\vec{a}=2-2-3+2=-1.$$

Тоді $20-\lambda=0$, тобто $\lambda=20$. Знаходимо координати:

$$\vec{x}=2(1;2;-1;2)+20(2;-1;3;1)=(42;-16;58;24).$$

Перевірка: $\vec{x}\cdot\vec{a}=42-32-58+48=0$.

Відповідь. $\lambda=20$, $\vec{x}=(42;-16;58;24)$.

Завдання 16. У $\mathbb{R}^5$: $\vec{a}=(1;-1;2;0;3)$, $\vec{b}=(2;1;-1;2;1)$, $\vec{c}=(m;2;1;-1;m)$. Знайти m, якщо кут між $\vec{c}$ і $\vec{a}+\vec{b}$ дорівнює 90°.

Розв'язання.

$$\vec{a}+\vec{b}=(3;0;1;2;4).$$

Кут 90° означає, що скалярний добуток дорівнює нулю:

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=3m+2\cdot0+1\cdot1+(-1)\cdot2+4m=7m-1=0.$$

Звідси $7m=1$, $m=\frac{1}{7}$.

Відповідь. $m=\dfrac{1}{7}$.