ВИЩА МАТЕМАТИКА
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 14

Тема: Дослідження функцій за допомогою похідної

Монотонність, екстремуми, опуклість і точки перегину

Мета. Навчитися визначати проміжки зростання і спадання функцій, знаходити критичні точки й локальні екстремуми, застосовувати достатні умови екстремуму, досліджувати опуклість графіка та знаходити точки перегину.

1. Основні теоретичні відомості

Монотонність. Якщо $f'(x) > 0$ на інтервалі, то f строго зростає на ньому; якщо $f'(x) < 0$, то строго спадає. **Критичною точкою** називають внутрішню точку області визначення, у якій $f'(x) = 0$ або похідна не існує. Точка, де $f'(x) = 0$, називається стаціонарною.

Локальний екстремум. У точці x_0 функція має локальний максимум, якщо $f(x) \le f(x_0)$ для всіх x з деякого околу x_0; для мінімуму знак нерівності протилежний. Якщо f диференційовна у внутрішній точці локального екстремуму, то $f'(x_0) = 0$ (теорема Ферма).

Перша достатня умова. Якщо при переході через критичну точку знак f' змінюється з «$+$» на «$-$», то маємо максимум; з «$-$» на «$+$» — мінімум. Якщо знак не змінюється, екстремуму немає.

Опуклість. Якщо $f''(x) > 0$, графік опуклий донизу (вгнутий); якщо $f''(x) < 0$, графік опуклий догори. Точка перегину — точка графіка, у якій змінюється характер опуклості. Якщо функція неперервна в точці та f'' змінює знак при переході через неї, це точка перегину.

2. Дослідження монотонності

Завдання 1. Дослідити $f(x) = x^2 - 6x + 5$ на монотонність.

Розв'язання. Знайдемо похідну й стаціонарну точку:

$$f'(x) = 2x - 6 = 2(x - 3), \qquad f'(x) = 0 \iff x = 3.$$

При $x < 3$ похідна від'ємна, а при $x > 3$ — додатна. Схема знаків:

x	$(-\infty, 3)$	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$

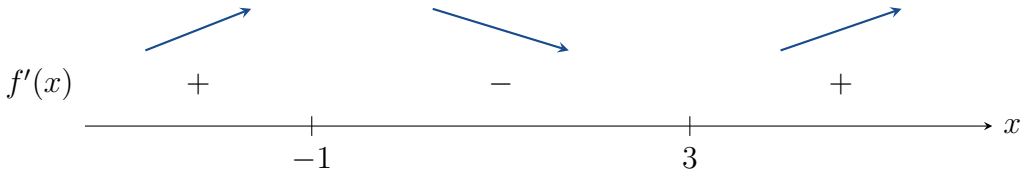
Відповідь. Спадає на $(-\infty, 3)$; зростає на $(3, +\infty)$.

Завдання 2. Дослідити $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

Розв'язання. Обчислюємо похідну й розкладаємо її на множники:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x + 1)(x - 3).$$

Критичні точки: $x = -1$ і $x = 3$. На $(-\infty, -1)$ маємо $f' > 0$, на $(-1, 3)$ маємо $f' < 0$, на $(3, +\infty)$ знову $f' > 0$.



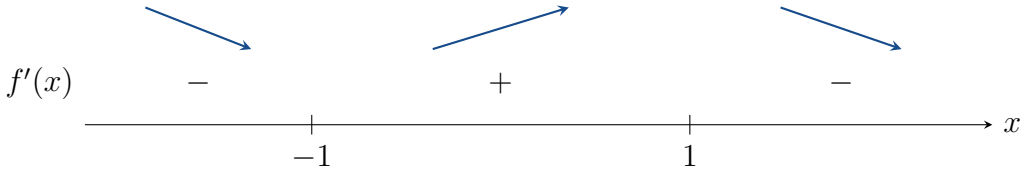
Відповідь. Зростає при $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$; спадає при $x \in (-1, 3)$.

Завдання 3. Дослідити $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Розв'язання. Область визначення — $\mathbb{R}$. Застосовуємо правило похідної частки:

$$f'(x) = \frac{(x)'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Знаменник додатний. Чисельник $1 - x^2$ додатний при $-1 < x < 1$ і від'ємний поза цим інтервалом.

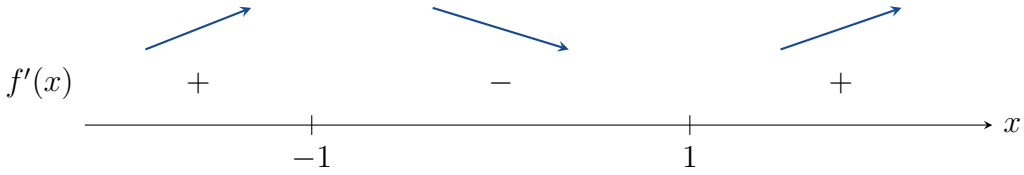


Відповідь. Спадає при $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; зростає при $x \in (-1, 1)$.

3. Локальні екстремуми: перша похідна

Завдання 4. Знайти локальні екстремуми $f(x) = x^3 - 3x$.

Розв'язання. Маємо $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. Критичні точки: -1 та 1. Знак похідної змінюється за схемою:



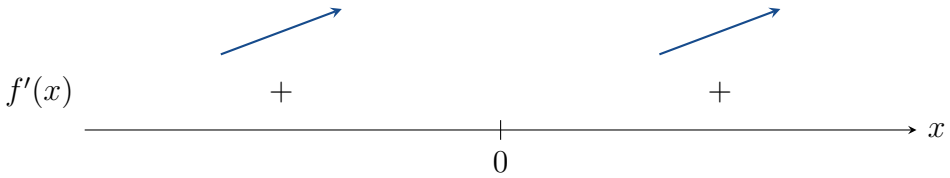
У точці -1 знак змінюється з плюса на мінус, отже це максимум; у точці 1 — з мінуса на плюс, отже мінімум. Обчислюємо значення:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2, \qquad f(1) = 1 - 3 = -2.$$

Відповідь. Локальний максимум $f(-1) = 2$; локальний мінімум $f(1) = -2$.

Завдання 5. Чи має екстремум функція $f(x) = x^3$ у точці $x = 0$?

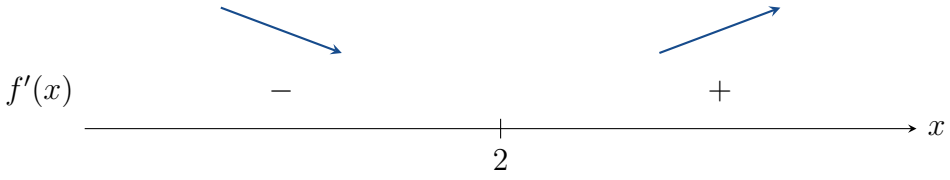
Розв'язання. $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, причому $f'(0) = 0$. Ліворуч і праворуч від нуля похідна додатна, отже її знак не змінюється. Функція зростає по обидва боки точки.



Відповідь. $x = 0$ — стаціонарна точка, але не точка екстремуму.

Завдання 6. Знайти екстремуми $f(x) = x^2 - 4x + 7$ за першою похідною.

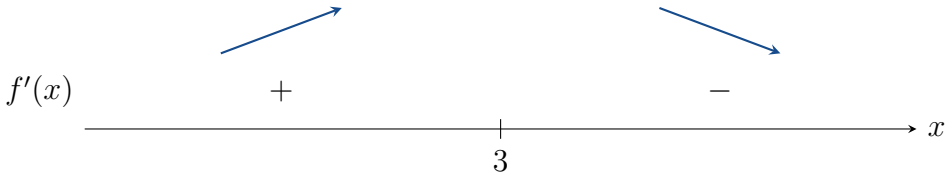
Розв'язання. Знайдемо похідну: $f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$. Стаціонарна точка $x = 2$. При $x < 2$ похідна від'ємна, а при $x > 2$ — додатна.



Отже, функція спочатку спадає, а потім зростає. $f(2) = 4 - 8 + 7 = 3$. **Відповідь.** Локальний мінімум $f(2) = 3$.

Завдання 7. Знайти екстремуми $f(x) = -x^2 + 6x - 4$ за першою похідною.

Розв'язання. $f'(x) = -2x + 6 = -2(x - 3)$. Стаціонарна точка $x = 3$. При $x < 3$ маємо $f' > 0$, при $x > 3$ — $f' < 0$.



Отже, функція зростає до точки $x = 3$, після чого спадає. $f(3) = -9 + 18 - 4 = 5$. **Відповідь.** Локальний максимум $f(3) = 5$.

Завдання 8. Дослідити $f(x) = x^4$ та $g(x) = x^3$ на екстремум за першою похідною.

Розв'язання. Для першої функції $f'(x) = 4x^3$. При $x < 0$ похідна від'ємна, при $x > 0$ — додатна.



Отже, $x = 0$ — точка мінімуму функції f, причому $f(0) = 0$. Для другої функції $g'(x) = 3x^2$. Похідна додатна по обидва боки нуля, тому g зростає на всій числовій прямій і не має екстремуму в нулі. **Відповідь.** f має локальний мінімум $f(0) = 0$; функція g екстремуму не має.

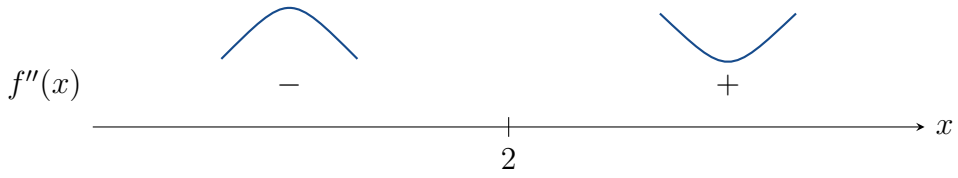
4. Опуклість графіка та точки перегину

Завдання 10. Дослідити опуклість $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$.

Розв'язання. Знаходимо другу похідну:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x, \qquad f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2).$$

При $x < 2$ маємо $f'' < 0$, при $x > 2$ — $f'' > 0$.



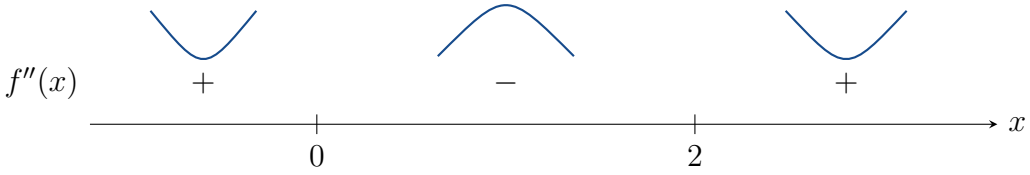
Друга похідна змінює знак у точці $x = 2$. $f(2) = 8 - 24 + 5 = -11$. **Відповідь.** Графік опуклий догори на $(-\infty, 2)$, донизу на $(2, +\infty)$; точка перегину $(2, -11)$.

Завдання 11. Дослідити опуклість $f(x) = x^4 - 4x^3$.

Розв'язання. $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$, а

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2).$$

На $(-\infty, 0)$ друга похідна додатна; на $(0, 2)$ — від'ємна; на $(2, +\infty)$ — додатна. Отже, характер опуклості змінюється при $x = 0$ і $x = 2$.



$$f(0) = 0, \qquad f(2) = 16 - 32 = -16.$$

Відповідь. Графік функції опуклий донизу при $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, догори на $(0, 2)$; точки перегину $(0, 0)$ та $(2, -16)$.

Завдання 12. Чи є точка $x = 0$ точкою перегину $f(x) = x^4$?

Розв'язання. $f''(x) = 12x^2 \geq 0$. Хоча $f''(0) = 0$, друга похідна не змінює знак при переході через нуль. **Відповідь.** Точки перегину при $x = 0$ немає.

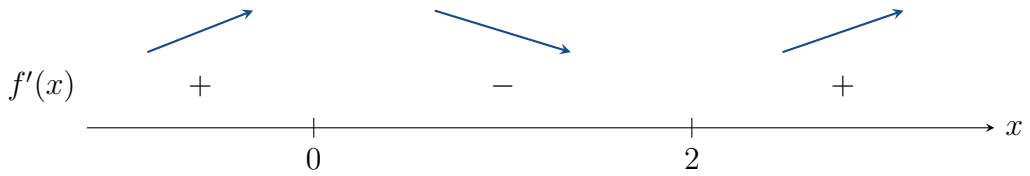
5. Комплексне дослідження функції

Завдання 13. Дослідити монотонність, екстремуми, опуклість і точки перегину $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Розв'язання. Крок 1. Область визначення: $\mathbb{R}$. **Крок 2.** Перша похідна:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2).$$

Стаціонарні точки $x = 0$ і $x = 2$. Знаки f': плюс на $(-\infty, 0)$, мінус на $(0, 2)$, плюс на $(2, +\infty)$.

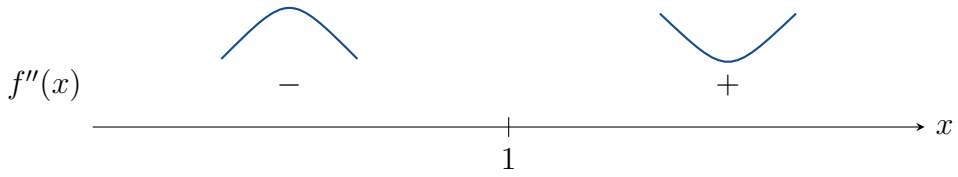


Крок 3. При $x = 0$ — локальний максимум $f(0) = 0$; при $x = 2$ — локальний мінімум $f(2) = 8 - 12 = -4$.

Крок 4. Друга похідна:

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1).$$

При $x < 1$ маємо $f'' < 0$ (опуклість догори), при $x > 1$ — $f'' > 0$ (опуклість донизу).



У точці $x = 1$ знак змінюється, $f(1) = 1 - 3 = -2$.

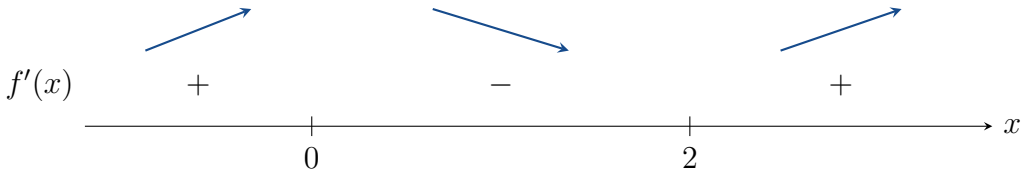
Відповідь. Зростає на $(-\infty, 0)$ і $(2, +\infty)$; спадає на $(0, 2)$. Максимум $(0, 0)$, мінімум $(2, -4)$, точка перегину $(1, -2)$.

Завдання 14. Дослідити $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ на монотонність та екстремуми.

Розв'язання. Область визначення: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. За правилом частки:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

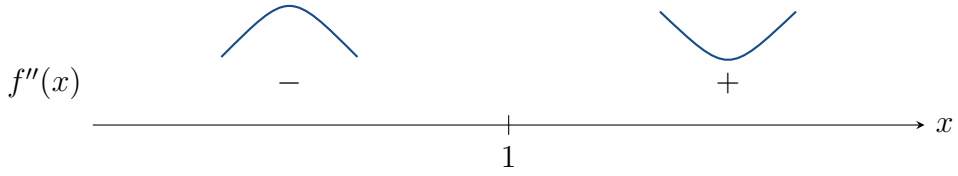
Похідна додатна на $(-\infty, 0)$ і $(2, +\infty)$; від'ємна на $(0, 1)$ і $(1, 2)$.



На схемі точку $x = 1$ всередині проміжку спадання необхідно виключити з області визначення. Для дослідження опуклості обчислимо другу похідну:

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

При $x < 1$ друга похідна від'ємна, а при $x > 1$ — додатна.



Графік опуклий догори при $x \in (-\infty, 1)$ та опуклий донизу при $x \in (1, +\infty)$. Точки перегину при $x = 1$ немає, оскільки функція там не визначена. Точка $x = 1$ не належить області визначення, тому не може бути точкою екстремуму. $f(0) = 0$, $f(2) = 4$. **Відповідь.** Зростає на $(-\infty, 0)$ і $(2, +\infty)$; спадає на $(0, 1)$ і $(1, 2)$. Локальний максимум $(0, 0)$; локальний мінімум $(2, 4)$. Опуклість догори при $x \in (-\infty, 1)$, донизу при $x \in (1, +\infty)$; точок перегину немає.

6. Завдання для самостійної роботи

1. Дослідити монотонність і знайти екстремуми $f(x) = x^3 - 12x + 1$.
2. Знайти екстремуми $f(x) = x^4 - 8x^2$.
3. Знайти проміжки опуклості й точки перегину $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$.
4. Дослідити монотонність, екстремуми та опуклість $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$, $x \neq 0$.