ЛЕКЦІЯ № 7

ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ, ПОВНИЙ ДИФЕРЕНЦІАЛ ТА ЕКСТРЕМУМИ

Вища математика · Перший курс економічних спеціальностей

План лекції. 1. Функції двох змінних. 2. Частинні похідні першого порядку. 3. Повний диференціал. 4. Частинні похідні вищих порядків. 5. Екстремуми функції двох змінних. 6. Дослідження на екстремум.

1. Функції двох змінних

Означення. Якщо кожній парі (x, y) із множини $D \subset \mathbb{R}^2$ поставлено у відповідність єдине число z, то задано функцію двох змінних $z = f(x, y)$. Множина D є *областю визначення*. Графік $z = f(x, y)$ у просторі зазвичай є поверхнею.

Приклад 1. Нехай витрати підприємства на два види продукції дорівнюють

$$C(x, y) = 500 + 8x + 12y + 0{,}02x^2 + 0{,}03y^2.$$

Обчислити $C(10, 20)$. **Розв’язання.** Підставимо обсяги виробництва:

$$C(10, 20) = 500 + 80 + 240 + 2 + 12 = 834.$$

Відповідь. 834 грошові одиниці. **Область визначення.** Для дробу знаменник не повинен дорівнювати нулю; для квадратного кореня підкореневий вираз має бути невід’ємним; для логарифма аргумент має бути додатним.

Приклад 2. Знайти область визначення $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. **Розв’язання.** Маємо $16 - x^2 - y^2 \geq 0$, тобто $x^2 + y^2 \leq 16$. **Відповідь.** Замкнений круг радіуса 4.

Приклад 3. Знайти область визначення $z = \ln(x + y - 3)$. **Розв’язання.** Умова $x + y - 3 > 0$. **Відповідь.** Півплощина $x + y > 3$ без граничної прямої.

2. Частинні похідні першого порядку

Означення. Частинною похідною за x називають границю

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h},$$

якщо вона існує. Під час диференціювання за x змінну y вважаємо сталою. Аналогічно

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}.$$

Приклад 4. Знайти частинні похідні $f(x, y) = x^3 y + 2xy^2 - 5y$. **Розв’язання.** За x усі множники, що залежать лише від y, є сталими:

$$f_x = 3x^2 y + 2y^2.$$

За y змінна x стала:

$$f_y = x^3 + 4xy - 5.$$

Приклад 5. Для $f(x,y) = e^{xy} + \ln(x+y)$, $x+y>0$, обчислити похідні. **Розв'язання.** За правилом складної функції:

$$f_x = ye^{xy} + \frac{1}{x+y}, \qquad f_y = xe^{xy} + \frac{1}{x+y}.$$

Економічний зміст. Якщо $C(x,y)$ — витрати на виробництво двох товарів, то C_x і C_y є граничними витратами за відповідними товарами при незмінному обсязі іншого.

Приклад 6. Для $C(x,y) = 200 + 4x + 7y + 0{,}1x^2 + 0{,}2xy$ знайти граничні витрати у точці $(10,5)$. **Розв'язання.**

$$C_x = 4 + 0{,}2x + 0{,}2y, \quad C_y = 7 + 0{,}2x;$$

$$C_x(10,5) = 7, \qquad C_y(10,5) = 9.$$

Відповідь. При малому збільшенні випуску першого товару витрати зростають приблизно на 7 одиниць за одиницю товару, другого — на 9.

3. Повний диференціал

Означення. Функція f є диференційовною в точці (x_0,y_0), якщо її приріст можна записати у вигляді

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right),$$

де A, B — сталі для даної точки. Тоді $A = f_x(x_0,y_0)$, $B = f_y(x_0,y_0)$, а *повний диференціал* має вигляд

$$\boxed{df = f_x\,dx + f_y\,dy.}$$

Якщо частинні похідні неперервні в околі точки, функція диференційовна в цій точці. Для малих приростів $\Delta f \approx df$.

Приклад 7. Знайти диференціал $f(x,y) = x^2y + 3y^2$. **Розв'язання.**

$$f_x = 2xy, \qquad f_y = x^2 + 6y,$$

$$df = 2xy\,dx + (x^2 + 6y)\,dy.$$

Приклад 8. Наближено обчислити зміну $z = xy$ при переході від $(20,30)$ до $(20{,}2;29{,}9)$. **Розв'язання.** Маємо $dx = 0{,}2$, $dy = -0{,}1$ і

$$dz = y\,dx + x\,dy = 30\cdot 0{,}2 + 20\cdot(-0{,}1) = 4.$$

Точна зміна $20{,}2\cdot 29{,}9 - 20\cdot 30 = 3{,}98$. **Відповідь.** Наближено 4 (точно $3{,}98$).

Приклад 9. Для функції доходу $R(p,q) = pq$ оцінити зміну доходу при $p = 50$, $q = 100$, $dp = 1$, $dq = -3$. **Розв'язання.**

$$dR = q\,dp + p\,dq = 100\cdot 1 + 50\cdot(-3) = -50.$$

Відповідь. Дохід зменшиться приблизно на 50 грошових одиниць.

4. Частинні похідні вищих порядків

Означення. Другі частинні похідні за однією змінною — це частинні похідні від відповідних перших похідних:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Мішані похідні отримують послідовним диференціюванням за різними змінними:

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(f_x), \qquad f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(f_y).$$

Теорема Шварца. Якщо мішані похідні другого порядку неперервні в околі точки, то $f_{xy} = f_{yx}$ у цій точці. **Похідні n-го порядку.** Для натурального $n \geq 2$ послідовне n-разове диференціювання за x дає $\partial^n f/\partial x^n$; аналогічно за y — $\partial^n f/\partial y^n$. Змішані похідні отримують диференціюванням за x та y у заданому порядку.

Приклад 10. Для $f(x,y) = x^3y^2 + 2x^2y$ знайти всі похідні другого порядку. **Розв'язання.** Спочатку

$$f_x = 3x^2y^2 + 4xy, \qquad f_y = 2x^3y + 2x^2.$$

Після повторного диференціювання:

$$f_{xx} = 6xy^2 + 4y, \qquad f_{yy} = 2x^3,$$

$$f_{xy} = 6x^2y + 4x, \qquad f_{yx} = 6x^2y + 4x.$$

Отже, $f_{xy} = f_{yx}$.

Приклад 11. Для $f(x,y) = x^3y^2$ знайти f_{xxy}. **Розв'язання.** Послідовно:

$$f_x = 3x^2y^2, \quad f_{xx} = 6xy^2, \quad f_{xxy} = 12xy.$$

5. Екстремуми функції двох змінних

Означення. Функція має локальний максимум у внутрішній точці (x_0, y_0), якщо в деякому її околі $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$; локальний мінімум — якщо $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$. **Необхідна умова.** Якщо диференційовна функція має локальний екстремум у внутрішній точці, то

$$\boxed{f_x(x_0,y_0) = 0, \qquad f_y(x_0,y_0) = 0.}$$

Таку точку називають *стаціонарною*. Не кожна стаціонарна точка є екстремумом.

Приклад 12. Знайти стаціонарні точки $f(x,y) = x^2+y^2-4x+6y+1$. **Розв'язання.**

$$f_x = 2x - 4 = 0, \qquad f_y = 2y + 6 = 0.$$

Відповідь. Єдина стаціонарна точка $(2, -3)$.

6. Дослідження функції двох змінних на екстремум

Достатня умова. Нехай другі частинні похідні неперервні поблизу стаціонарної точки. Позначимо

$$A = f_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f_{yy}(x_0, y_0), \quad \Delta = AC - B^2.$$

Якщо $\Delta > 0$ і $A > 0$, маємо строгий локальний мінімум; якщо $\Delta > 0$ і $A < 0$ — строгий локальний максимум. Якщо $\Delta < 0$, екстремуму немає (сідлова точка). Якщо $\Delta = 0$, критерій не дає відповіді. **Алгоритм.** Знайти f_x, f_y; розв'язати систему $f_x = f_y = 0$; обчислити f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}; у кожній стаціонарній точці знайти Δ та встановити характер точки; обчислити значення функції.

Приклад 13. Дослідити $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 1$. **Розв'язання.** Стаціонарна точка $(2, -3)$ (приклад 12). Далі

$$A = 2, \quad B = 0, \quad C = 2, \quad \Delta = 4 > 0.$$

Оскільки $A > 0$, це строгий мінімум. Його значення:

$$f(2, -3) = 4 + 9 - 8 - 18 + 1 = -12.$$

Відповідь. Мінімум -12 у точці $(2, -3)$.

Приклад 14. Дослідити $f(x, y) = -x^2 - 2y^2 + 4x + 8y$. **Розв'язання.**

$$f_x = -2x + 4 = 0, \quad f_y = -4y + 8 = 0 \Rightarrow (x, y) = (2, 2).$$

$$A = -2, \quad B = 0, \quad C = -4, \quad \Delta = 8 > 0.$$

Отже, це строгий максимум; $f(2, 2) = 12$.

Приклад 15. Дослідити $f(x, y) = x^2 - y^2$. **Розв'язання.** Єдина стаціонарна точка $(0, 0)$. Маємо

$$A = 2, \quad B = 0, \quad C = -2, \quad \Delta = -4 < 0.$$

Відповідь. Екстремуму немає: це сідлова точка.

Приклад 16. Дослідити $f(x, y) = x^4 + y^4$. **Розв'язання.** У точці $(0, 0)$ перші похідні дорівнюють нулю, але $A = B = C = 0$, отже $\Delta = 0$. Критерій другого порядку не застосовується. Водночас $x^4 + y^4 \geq 0$, причому рівність можлива лише в початку координат. **Відповідь.** Строгий (і глобальний) мінімум 0.

6.1. Економічна задача: максимізація прибутку

Приклад 17. Нехай прибуток від двох товарів визначається функцією

$$\Pi(x, y) = 80x + 60y - x^2 - y^2 - xy - 500, \qquad x, y \geq 0.$$

Знайти обсяги виробництва, що максимізують прибуток. **Розв'язання.**

$$\Pi_x = 80 - 2x - y = 0, \qquad \Pi_y = 60 - x - 2y = 0.$$

Розв'язавши систему $2x + y = 80$, $x + 2y = 60$, отримуємо

$$x = \frac{100}{3}, \qquad y = \frac{40}{3}.$$

Другі похідні: $A = -2$, $B = -1$, $C = -2$, $\Delta = 4 - 1 = 3 > 0$. Отже, маємо строгий локальний максимум. Оскільки квадратична форма другої похідної від'ємно визначена на всій площині, цей максимум глобальний, зокрема за $x, y \geq 0$.

$$\Pi\left(\frac{100}{3}, \frac{40}{3}\right) = \frac{3700}{3} \approx 1233{,}33.$$

Відповідь. Оптимальні обсяги $x = 100/3$, $y = 40/3$ одиниць; максимальний прибуток $3700/3$ грошових одиниць (за неперервної моделі обсягів).