ЛЕКЦІЯ № 11

Математичний аналіз

Перший курс. Спеціальність «Інженерія програмного забезпечення»

НЕПЕРЕРВНІСТЬ ТА ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

План лекції. 1. Неперервність функції двох змінних. 2. Частинні прирости. 3. Частинні похідні першого порядку. 4. Частинні похідні вищих порядків. 5. Теорема про рівність мішаних похідних.

1. Неперервність функції двох змінних

У попередній лекції ми розглянули границю функції двох змінних. Тепер з'ясуємо, коли граничне значення функції збігається з її значенням у самій точці. **Означення.** Функція $z = f(x, y)$ називається **неперервною в точці** $M_0(x_0, y_0)$ своєї області визначення, якщо

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Тут точка M_0 вважається точкою скупчення області визначення. Для неперервності потрібно: функція визначена в точці; існує скінченна границя; границя дорівнює значенню функції. **Означення.** Функція неперервна на множині D, якщо вона неперервна в кожній її точці (у граничних точках D границю розглядають відносно D).

Приклад 1. Перевірити неперервність функції $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ у точці $(1, 2)$.

Розв'язання. Многочлен є неперервним, тому

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2 + xy + y^2) = 1 + 2 + 4 = 7 = f(1, 2).$$

Відповідь. Функція неперервна в точці $(1, 2)$.

Приклад 2. Дослідити неперервність функції

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Розв'язання. Для $(x, y) \neq (0, 0)$ маємо

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \longrightarrow 0.$$

Отже, границя в початку координат дорівнює нулю, тобто збігається з $f(0,0)=0$.

Відповідь. Функція неперервна в $(0,0)$.

Приклад 3. Дослідити неперервність функції

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Розв'язання. Уздовж $y=0$ маємо $f(x,0)=0$. Уздовж $y=x$ маємо $f(x,x)=\frac{1}{2}$. Оскільки отримані граничні значення різні, границі в $(0,0)$ немає.

Відповідь. Функція розривна в $(0,0)$.

Властивості неперервних функцій

Сума, добуток і частка неперервних функцій є неперервними там, де вони визначені (для частки знаменник має бути відмінним від нуля). Композиція неперервних функцій також неперервна. Зокрема, многочлени від x,y неперервні всюди, а раціональні функції — там, де знаменник не дорівнює нулю.

Приклад 4. Де неперервна функція $f(x,y)=\dfrac{\ln(4-x^2-y^2)}{x-y}$?

Розв'язання. Для логарифма потрібно $4-x^2-y^2>0$, а для знаменника — $x\neq y$. На всій отриманій області функція є часткою неперервних функцій із ненульовим знаменником.

Відповідь. $D=\{(x,y): x^2+y^2<4,\ x\neq y\}$; функція неперервна на D.

2. Частинні прирости функції двох змінних

Нехай $z=f(x,y)$ і точка (x,y) належить області визначення. Якщо змінити лише x на $x+\Delta x$, залишивши y незмінною, дістанемо **частинний приріст за** x:

$$\Delta_x f=f(x+\Delta x,y)-f(x,y).$$

Якщо змінити лише y, дістанемо **частинний приріст за** y:

$$\Delta_y f=f(x,y+\Delta y)-f(x,y).$$

На відміну від них, **повний приріст** відповідає одночасній зміні обох аргументів:

$$\Delta f=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y).$$

Приклад 5. Знайти частинні й повний прирости функції $f(x,y)=x^2y$.

Розв'язання. За означенням

$$\begin{aligned}\Delta_x f &= (x+\Delta x)^2 y - x^2 y = 2xy\Delta x + y(\Delta x)^2,\\ \Delta_y f &= x^2(y+\Delta y) - x^2 y = x^2\Delta y,\\ \Delta f &= (x+\Delta x)^2(y+\Delta y) - x^2 y\\ &= 2xy\Delta x + y(\Delta x)^2 + x^2\Delta y + 2x\Delta x\Delta y + (\Delta x)^2\Delta y.\end{aligned}$$

Бачимо, що повний приріст загалом не дорівнює сумі двох частинних приростів: виникають додаткові змішані доданки.

3. Частинні похідні першого порядку

Означення. Частинною похідною за x функції $f(x,y)$ у точці (x,y) називають границю

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x},$$

якщо вона існує. Аналогічно **частинна похідна за** y:

$$f'_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

Правило обчислення. Для f'_x вважаємо y сталою і диференціюємо за x; для f'_y вважаємо x сталою і диференціюємо за y. Застосовуємо звичайні правила диференціювання функції однієї змінної.

Приклад 6. Знайти частинні похідні $f(x,y) = x^3y^2 + 5xy - 7y$.

Розв'язання. За x величина y стала:

$$f'_x = 3x^2y^2 + 5y.$$

За y величина x стала:

$$f'_y = 2x^3y + 5x - 7.$$

Відповідь. $f'_x = 3x^2y^2 + 5y$, $f'_y = 2x^3y + 5x - 7$.

Приклад 7. Знайти частинні похідні $f(x,y) = \sin(xy) + e^{x+2y}$.

Розв'язання. Користуємося правилом похідної складеної функції. За x внутрішня функція xy має похідну y, а $x+2y$ — похідну 1:

$$f'_x = y\cos(xy) + e^{x+2y}.$$

За y похідні внутрішніх виразів відповідно дорівнюють x і 2:

$$f'_y = x\cos(xy) + 2e^{x+2y}.$$

Приклад 8. Знайти частинні похідні $f(x,y) = \dfrac{x^2+y}{x+y^2}$, $x+y^2\neq 0$.

Розв'язання. Застосовуємо правило похідної частки: похідна чисельника, помножена на знаменник, мінус чисельник, помножений на похідну знаменника; усе ділимо на квадрат знаменника. Тоді

$$f'_x = \frac{2x(x+y^2) - (x^2+y)}{(x+y^2)^2},$$

$$f'_y = \frac{(x+y^2) - 2y(x^2+y)}{(x+y^2)^2}.$$

Приклад 9. Обчислити частинні похідні $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ у точці $(1,2)$.

Розв'язання. Для $x^2+y^2 > 0$ за правилом похідної логарифма

$$f'_x = \frac{2x}{x^2+y^2}, \qquad f'_y = \frac{2y}{x^2+y^2}.$$

Підставляємо $(x,y) = (1,2)$:

$$f'_x(1,2) = \frac{2}{5}, \qquad f'_y(1,2) = \frac{4}{5}.$$

Відповідь. $\frac{2}{5}$ і $\frac{4}{5}$.

Геометричний зміст частинних похідних

Для поверхні $z = f(x,y)$ фіксуємо $y = y_0$ і дістаємо плоску криву в площині $y = y_0$. Похідна $f'_x(x_0,y_0)$ визначає нахил дотичної до цієї кривої у напрямі осі Ox. Аналогічно $f'_y(x_0,y_0)$ описує нахил при фіксованому $x = x_0$.

Приклад 10. Для $z = x^2 + y^2$ знайти нахили відповідних перерізів у точці $(1,2)$.

Розв'язання. Маємо $f'_x = 2x$, $f'_y = 2y$. Тому $f'_x(1,2) = 2$, $f'_y(1,2) = 4$. При фіксованому $y = 2$ дотична до кривої $z = x^2 + 4$ має нахил 2; при фіксованому $x = 1$ дотична до $z = 1 + y^2$ має нахил 4.

4. Частинні похідні вищих порядків

Якщо функції f'_x і f'_y також мають частинні похідні, отримуємо **частинні похідні другого порядку**. Друга частинна похідна за x — це частинна похідна за x від першої частинної похідної f'_x. Аналогічно друга частинна похідна за y — це частинна похідна за y від f'_y:

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Похідні f''_{xy} і f''_{yx} називають **мішаними**. У першій спочатку диференціюємо за x, потім за y; у другій — навпаки.

Приклад 11. Знайти всі похідні другого порядку $f(x,y) = x^3y^2 + 2xy$.

Розв'язання. Спочатку

$$f'_x = 3x^2y^2 + 2y, \qquad f'_y = 2x^3y + 2x.$$

Диференціюємо ще раз:

$$f''_{xx} = 6xy^2, \qquad f''_{xy} = 6x^2y + 2,$$
$$f''_{yx} = 6x^2y + 2, \qquad f''_{yy} = 2x^3.$$

Отже, в цьому прикладі мішані похідні збігаються.

Приклад 12. Знайти всі похідні другого порядку $f(x,y) = e^{xy}$.

Розв'язання. Спочатку за правилом похідної складеної функції

$$f'_x = ye^{xy}, \qquad f'_y = xe^{xy}.$$

Далі застосовуємо правило похідної добутку:

$$f''_{xx} = y^2e^{xy}, \qquad f''_{xy} = e^{xy} + xye^{xy},$$
$$f''_{yx} = e^{xy} + xye^{xy}, \qquad f''_{yy} = x^2e^{xy}.$$

Відповідь. $f''_{xy} = f''_{yx} = (1+xy)e^{xy}$.

Похідні третього та вищих порядків

Означення. Частинною похідною n-го порядку за x називають частинну похідну за x від частинної похідної $(n-1)$-го порядку за x (якщо вона існує). Аналогічно визначають похідну n-го порядку за y:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}\right), \qquad \frac{\partial^n f}{\partial y^n} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}}\right).$$

Похідні, отримані послідовним диференціюванням за різними змінними, називають мішаними похідними відповідного порядку. Наприклад,

$$f'''_{xxy} = \frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x^2}, \qquad f'''_{xyy} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\,\partial x}.$$

Приклад 13. Для $f(x,y) = x^3y^2$ знайти f'''_{xxy}.

Розв'язання. Послідовно диференціюємо двічі за x і один раз за y:

$$f'_x = 3x^2y^2, \quad f''_{xx} = 6xy^2, \quad f'''_{xxy} = 12xy.$$

Відповідь. $f'''_{xxy} = 12xy$.

5. Теорема про рівність мішаних похідних

Теорема (Шварца). *Нехай функція $f(x,y)$ має в деякому околі точки (x_0,y_0) мішані похідні другого порядку f''_{xy} і f''_{yx}, причому обидві ці похідні неперервні в точці (x_0,y_0). Тоді*

$$\boxed{f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0).}$$

Зауваження. Для практичних обчислень часто використовують сильнішу, але зручну достатню умову: всі частинні похідні другого порядку неперервні в околі точки. Без відповідних умов мішані похідні можуть бути різними.

Приклад 14. Перевірити рівність мішаних похідних для $f(x,y) = x^2 \sin y + y^3 \cos x$.

Розв'язання. Обчислюємо

$$f'_x = 2x \sin y - y^3 \sin x,$$

$$f''_{xy} = 2x \cos y - 3y^2 \sin x.$$

З іншого боку,

$$f'_y = x^2 \cos y + 3y^2 \cos x,$$

$$f''_{yx} = 2x \cos y - 3y^2 \sin x.$$

Обидва результати збігаються. Оскільки ці похідні неперервні на $\mathbb{R}^2$, теорема Шварца застосовна в кожній точці.

Приклад 15. Показати, що без умов неперервності мішані похідні можуть не збігатися. Нехай

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо перші похідні на осях за означенням. Оскільки $f(h,0) = f(0,k) = 0$, маємо $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$. Для $y \neq 0$:

$$f'_x(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{y(h^2-y^2)}{h^2+y^2} = -y.$$

Отже,

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f'_x(0,k) - f'_x(0,0)}{k} = -1.$$

Для $x \neq 0$ аналогічно

$$f'_y(x,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,k) - f(x,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{x(x^2-k^2)}{x^2+k^2} = x.$$

Тому

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'_y(h,0) - f'_y(0,0)}{h} = 1.$$

Відповідь. $f''_{xy}(0,0) = -1$, $f''_{yx}(0,0) = 1$.