# ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

## МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ПІДГОТОВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ВАРІАНТАМИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

**РОЗДІЛ «ДИНАМІКА»**

**Практичні заняття №9-10**

**Завдання 7**

**Тема «Динаміка точки. Окремі випадки руху матеріальної точки»**

***План проведення практичного заняття***

***1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:***

1.Питання, які вивчає розділ теоретичної механіки «Динаміка»?

2. Сформулюйте суть прямої та оберненої задачі динаміки.

3. Як визначаються рівняння руху вільної та невільної матеріальної точки?

4. Чому дорівнює і як спрямована сила інерції матеріальної точки при її пришвидшеному русі?

5. Як визначаються сталі інтегрування у формулі руху, які її властивості?

6. Сформулюйте принцип Д'аламбера для невільної матеріальної точки?

7. Які параметри визначають початкові умови руху матеріальної точки.

8. Від чого можуть залежати діючі на матеріальну точку змінні сили?

***2. Індивідуальне тестування.***

***3. Практичні завдання.***

## Динаміка. Вільний та невільний рух матеріальної точки. Принцип Д'аламбера

(короткі теоретичні відомості)

**Динаміка – розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух матеріальних об'єктів з урахуванням сил, що прикладені до цих об'єктів.**

**У динаміці вирішуються дві основні задачі:**

а) перша – знаючи рух матеріального об'єкта, необхідно визначити діючі на об'єкт сили.

б) друга – по діючим на матеріальний об'єкт силам визначити рівняння його руху.

Предметом дослідження в динаміці є моделі матеріальних тіл – матеріальна точка, механічна система точок і абсолютно тверде тіло.

Основою для розгляду руху матеріальних точок та твердих тіл є закони Ньютона:

**Перший закон Ньютона (закон інерції):** Ізольована матеріальна

точка знаходиться у стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху до тих пір, поки вона не буде змушена прикладеними до неї силами змінити цей стан.

Такий стан точки називається інерціальним і система відліку, в який має місце такий рух є інерціальною.

**Другий закон Ньютона (основний закон динаміки):** Зміна кількості руху матеріальної точки пропорційна прикладеній до точки силі і відбувається у напрямі прямої, вздовж якої діє ця сила.

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F},\ m = const \text{ тоді } m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \text{ або } m\vec{a} = \vec{F}$$

де m – маса матеріальної точки; a – прискорення точки;

F – сила, що діє на точку.

Прискорення, з яким рухається тіло, пропорційне силі, що прикладена до тіла, і обернено пропорційне масі тіла:

$$a = F/m$$

**Третій закон І. Ньютона (закон дії і протидії):** Дві матеріальні точки (два твердих тіла) діють одна на одну з силами, які є рівні за величиною (модулем) і напрямлені вздовж однієї прямої у протилежні сторони.

З третього закону Ньютона: джерело появи сили – взаємодія матеріальної точки з іншої точкою або тілами.

$$F_A = -F_B \rightarrow m_A a_A = -m_B a_B$$
$$\frac{a_A}{a_B} = \frac{m_B}{m_A}$$

Прискорення, які надають одна одній дві матеріальні точки за модулем обернено пропорційні масам цих точок і спрямовані вздовж прямої, що з'єднує ці точки, у протилежні сторони.

**Четвертий закон І. Ньютона (закон незалежної дії сил):**

Якщо на матеріальну точку діють декілька сил, то точка одержує прискорення, яке дорівнює геометричній сумі тих прискорень, які б вона одержала під дією кожної із цих сил окремо.

Основне рівняння руху вільної матеріальної точки $F_\Sigma = F_1 + F_2 + ...F_n$ .

Рух матеріальної точки під дією множини сил $F_1...F_n$ буде таким же, як і при дії однієї сили, що дорівнює їх геометричній сумі – рівноцінній $F_\Sigma$ .

## Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки

Матеріальна точка називається **вільною**, якщо на її рух не накладені ніякі обмеження, тобто у довільний момент часу вона може зайняти довільне положення в системі відліку і мати довільну швидкість.

Диференціальне рівняння руху вільної матеріальної точки у векторній формі має вигляд:

$$m\vec{a} = \vec{F} \qquad \text{або} \qquad m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

m – маса точки; $a = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ – прискорення матеріальної точки;

F – рівнодійна сил, що діють на матеріальну точку.

Після проєкціювання обох частин рівняння руху вільної матеріальної точки на осі декартової системи координат:

$$m\ddot{x} = F_x \quad m\ddot{y} = F_y \quad m\ddot{z} = F_z$$

де $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ – проєкції вектора пришвидшення $a$ на осі координат, $F_x, F_y, F_z$ – проєкції вектора рівнодійної сил F на осі координат.

Ці рівняння називаються рівняннями руху вільної матеріальної точки в координатній формі.

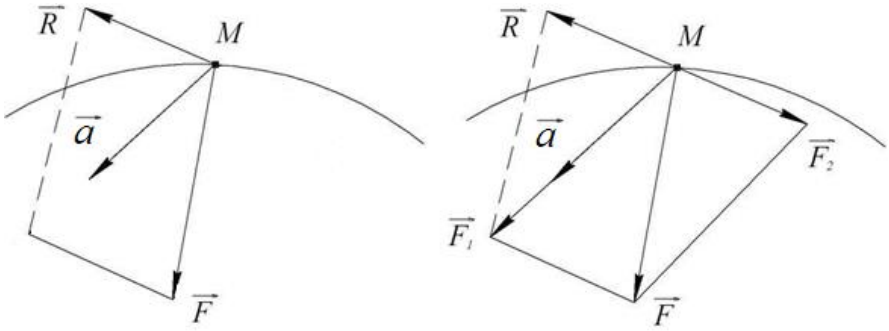
## Диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки

Матеріальна точка називається **невільною**, якщо внаслідок накладання в'язей вона не може у довільний момент часу займати довільне положення в системі відліку і мати довільну швидкість, так як здійснює рух по деякій поверхні або кривій, або рухається в деякій заданій області системи відліку.

Якщо розглянути матеріальну точку M, що рухається по кривій (рис. 1, а) з прискоренням $a$ під дією рівнодійної сили F та реакції в'язі R, після розкладення рівнодійної сили на напрями прискорення ($F_1$) і перпендикуляру до прискорення ($F_2$) утвориться еквівалентна система сил (рис. 1, б).

Складова $F_1$ обумовлює рух матеріальної точки: $m\vec{a} = \vec{F}$.

Складова $F_2$ протидіє реакції в'язі не викликаючи зміни руху матеріальної точки: $\vec{F}_2 + \vec{R} = 0$ або $\vec{F}_2 = -\vec{R}$.




а) б)

Рис. 1. Система сил, що діє на невільну матеріальну точку

Тоді диференціальне рівняння руху невільної матеріальної точки у векторній формі матиме вигляд:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R} \qquad \text{або} \qquad m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} + \vec{R}$$

Диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки у координатній формі (декартові осі координат):

$$m\ddot{x} = F_x + R_x \quad m\ddot{y} = F_y + R_y \quad m\ddot{z} = F_z + R_z$$

**Принцип Д'аламбера для невільної матеріальної точки**

Точка М здійснює невільний рух під дією сили F (рис. 2).

Застосувавши аксіому про звільнення від в'язі, можна визначити результуючу силу $\vec{F}_1 = \vec{F} + \vec{R}$.

Також, сила $F_1$ на підставі закону Ньютона $F_1 = m\vec{a}$;

Щоб привести рухому з прискоренням $\vec{a}$ матеріальну точку М до стану спокою достатньо додати до діючих на тіло сил силу $\vec{F}_{ін}$ рівну за модулем силі $\vec{F}_1$ і напрямлену вздовж лінії дії сили $\vec{F}_1$ у протилежну сторону.

Тобто: $\vec{F}_1 + \vec{F}_{ін} = 0$

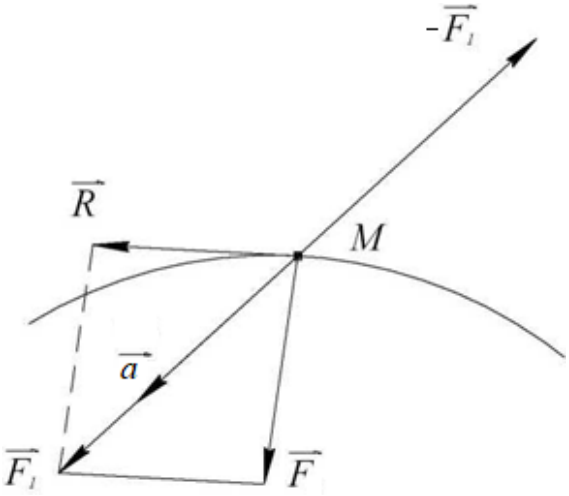



Рис. 1. Система сил, що діє на невільну матеріальну точку при застосуванні принципу Д'аламбера

Сила $F_{ін}$ рівна за модулем добутку маси точки на її прискорення і напрямлена протилежно до вектору пришвидшення точки, називається даламберовою силою інерції: $\vec{F}_{ін} = -m\vec{a}$

Якщо спроєкціювати цю векторну рівність на осі декартової системи координат:

$$F_{інx} = -ma_x \qquad F_{інy} = -ma_y \qquad F_{інz} = -ma_z$$

Рівняння рівноваги системи сил за принципом Д'аламбера має вигляд:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{F}_{ін} = 0$$

**Принцип Д'аламбера:** В кожний момент руху матеріальної точки геометрична сума прикладеної до точки сили F , реакції в'язі R та сили інерції $F_{ін}$ дорівнює нулю.

Наведене рівняння є рівнянням руху точки, записане у формі умови рівноваги сил.

Таким чином задачі динаміки можуть бути розв'язані методами статики (зміст методу кінетостатики).

### Вирішення двох задач динаміки матеріальної точки

**Пряма задача.** За відомими масою матеріальної точки і законом її руху, визначається сила, що діє на цю точку (або рівнодійна сил, що діють на точку).

**Основна задача (обернена).** За відомими масою матеріальної точки, прикладеними до точки силами і початковими умовами руху точки, визначається закон руху точки.

Діючі на матеріальну точку сили можуть бути **сталими** ($F = const$) або **змінними**. Змінна сила може:

1) змінюватись за визначеним законом з часом: ($F = f(t)$);

2) залежати від положення точки, яка визначається її радіус-вектором: ($F = f(r)$);

3) залежати від швидкості точки, що рухається: ($F = f(v)$).

У загальному випадку: $F = f(t, r, v)$

**Пряма задача динаміки** вільної матеріальної точки розв'язується шляхом диференціювання рівнянь руху точки.

Якщо відомі рівняння руху точки в декартові системі координат:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t).$$

то проєкції сили на осі координат визначаються з диференціальних рівнянь руху точки:

$$F_x = ma_x = m\ddot{x} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$
$$F_y = ma_y = m\ddot{y} = m\frac{d^2y}{dt^2}$$
$$F_z = ma_z = m\ddot{z} = m\frac{d^2z}{dt^2}$$

За відомими проєкціями сили на осі координат, можна визначити величину (модуль) сили і її напрямні косинуси за формулами:

$$F = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2 + F_Z^2};$$
$$\cos(\vec{F}, x) = \frac{F_x}{F}; \ \cos(\vec{F}, y) = \frac{F_y}{F}; \ \cos(\vec{F}, z) = \frac{F_z}{F};$$

Для розв'язання **основної (оберненої) задачі динаміки** вільної матеріальної точки потрібно двічі інтегрувати диференціальні рівняння руху точки.

Сили, що діють на матеріальну точку можуть бути сталими або змінними.

У загальному випадку, коли змінні сили змінюються за визначеним законом з часом, залежать від положення точки, яке визначається її радіус-вектором та від швидкості точки, що рухається: $F = f(t, r, v)$

Тоді диференціальні рівняння руху матимуть вигляд (при

координатному способі задання руху):

$$m\ddot{x} = F_x + F_x(t) + F_x(r) + F_x(\dot{x})$$
$$m\ddot{y} = F_y + F_y(t) + F_y(r) + F_y(\dot{y}) \qquad (3)$$
$$m\ddot{z} = F_z + F_z(t) + F_z(r) + F_z(\dot{z})$$

При інтегруванні кожного диференціального рівняння руху матеріальної точки наявні дві сталі інтегрування. Тому при інтегруванні трьох диференціальних рівнянь буде шість сталих.

Рівняння:

$$x = x(t, c_1,..., c_6)$$
$$y = y(t, c_1,..., c_6) \qquad (4)$$
$$z = z(t, c_1,..., c_6)$$

є загальним розв'язком рівнянь (3), де $c_1,..., c_6$ – сталі інтегрування.

Для визначення закону руху точки з рівнянь (4) потрібно знати початкові умови її руху.

Початковий стан руху матеріальної точки визначається її положенням та її швидкістю в початковий момент часу (t = 0).

Якщо точка рухається в декартовій системі координат, то необхідно знати її координати і проекції швидкості на осі координат у початковий момент руху:

$t = 0$; $x(0) = x_0$; $y(0) = y_0$; $z(0) = z_0$;

$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$; $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$; $\dot{z}(0) = \dot{z}_0$;

Сукупність отриманих даних – початкові умови руху матеріальної точки.

Для визначення сталих інтегрування необхідно надати рівнянням (4) значення t = 0 і, взявши похідні за часом, отримуємо шість рівнянь:

$x_0 = x(0, c_1,..., c_6)$; $\dot{x}_0 = \dot{x}(0, c_1,..., c_6)$;

$y_0 = y(0, c_1,..., c_6)$; $\dot{y}_0 = \dot{y}(0, c_1,..., c_6)$;

$z_0 = z(0, c_1,..., c_6)$; $\dot{z}_0 = \dot{z}(0, c_1,..., c_6)$;

## Приклади розв'язування задач

**Приклад 1**

Задані рівняння руху точки М масою m = 3 кг, в декартовій системі координат:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t).$$

$$x = 8t^2+1; \quad y = t^3; \quad z = 8-t^3/2.$$

Визначити значення та напрям сили, що діє на точку М у системі координат, та положення точки в момент часу t = 1 с.

**Розв'язок:** Проекції сили на осі координат визначаються з диференціальних рівнянь руху точки:

$$F_x = ma_x = m\ddot{x} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$F_y = ma_y = m\ddot{y} = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$F_z = ma_z = m\ddot{z} = m\frac{d^2z}{dt^2}$$

$\dot{x} = (8t^2+1)' = 16t$ $\quad \dot{y} = (t^3)' = 3t^2$ $\quad \dot{z} = (8-t^3/2)' = -3t^2/2$

$\ddot{x} = (8t^2+1)'' = 16$ $\quad \ddot{y} = (t^3)'' = 6t$ $\quad \ddot{z} = (8-t^3/2)'' = -6t/2$

Тоді:

$$F_x = ma_x = m\ddot{x} = 3 \cdot 16 = 48 \text{ Н}$$

$$F_y = ma_y = m\ddot{y} = 3 \cdot 6t = 18t \text{ Н}$$

$$F_z = ma_z = m\ddot{z} = 3 \cdot (-6t/2) = -9t \text{ Н}$$

Для часу t = 1 с: $F_x$ = 48 Н, $F_y$ = 18 Н, $F_z$ = -9 Н

За відомими проекціями сили на осі координат, можна визначити величину (модуль) сили і її напрямні косинуси:

$$F = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2 + F_Z^2};$$

$$\cos(\vec{F}, x) = \frac{F_x}{F}; \ \cos(\vec{F}, y) = \frac{F_y}{F}; \ \cos(\vec{F}, z) = \frac{F_z}{F};$$

$$F = \sqrt{48^2 + 18^2 + (-9)^2} = 51{,}4 \text{ Н}.$$

$$\alpha = \cos(\vec{F}, x) = \frac{48}{51{,}4}; \quad \beta = \cos(\vec{F}, y) = \frac{18}{51{,}4}; \quad \gamma = \cos(\vec{F}, z) = \frac{-9}{51{,}4}$$

$$\alpha = 21^\circ \qquad \beta = 69{,}5^\circ \qquad \gamma = 100^\circ$$

Положення точки:

$x = 8t^2+1 = 8+1 = 9$ *м*; $\quad y = t^3 = 1$ *м*; $\quad z = 8-t^3/2 = 8 - ½ = 7{,}5$ *м*

**Приклад 2**

**Вільний рух точки в однорідному полі сил тяжіння біля поверхні Землі**

Точка M масою m рухається в однорідному полі сил тяжіння під дією сили тяжіння G з початковою швидкістю $V_0$ = 100 м/с (рис. 1) під кутом 60º до горизонту (кут між віссю y і вектором швидкості, рух у площині yOz). Визначити положення характерних точок траєкторії руху та час їх проходження: точок початку і закінчення руху та точки найвищого підйому.

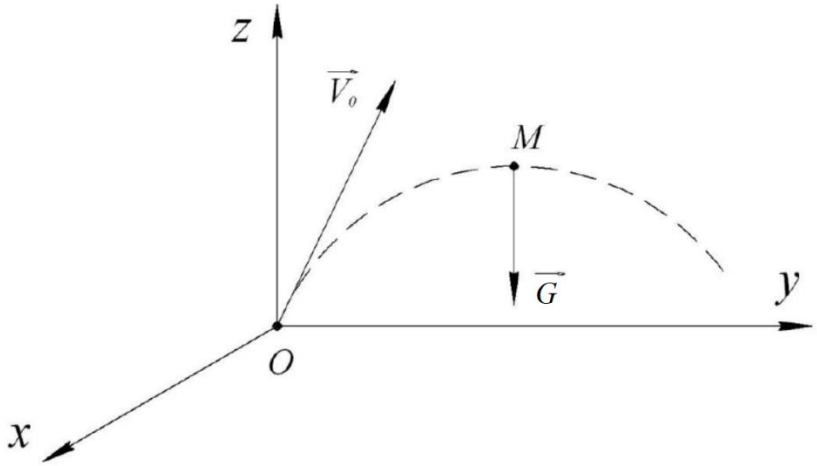



Рис. 1.

**Розв'язок:**

У вибраній системі відліку диференціальні рівняння руху точки M у координатній формі матимуть вигляд:

$$m\ddot{x} = 0 \qquad m\ddot{y} = 0 \qquad m\ddot{z} = -mg \quad \Big| \times \frac{1}{m}$$

(прискорення можна представити як похідну від швидкості по часу або другу похідну по відповідній координаті)

Якщо домножити обидві частини рівнянь на 1/m (за умови, що m ≠ 0):

$$\ddot{x} = 0 \qquad \ddot{y} = 0 \qquad \ddot{z} = -g$$

Після першого інтегрування отримаємо рівняння швидкості точки по відповідним координатам:

$$\dot{x} = c_1 \qquad \dot{y} = c_2 \qquad \dot{z} = -\int g dt + c_3 = -gt + c_3$$

Таким чином $c_1$ – це початкова швидкість по осі x: $V_{0x}$,

$c_2$ – це початкова швидкість по осі y: $V_{0y}$,

$c_3$ – це початкова швидкість по осі z: $V_{0z}$,

Швидкості по осям x та y не змінюються, по осі z – рух уповільнений, тому що прискорення вільного падіння протилежно направлене швидкості.

Тоді $V_z = -gt + V_{0z}$

Після другого інтегрування:

$$x = \int c_1 dt + c_4 = c_1 t + c_4$$

$$y = \int c_2 dt + c_5 = c_2 t + c_5$$

$$z = -\int g t dt + \int c_3 dt + c_6 = -g\frac{t^2}{2} + c_3 t + c_6$$

$c_1 = V_{0x}$, $c_2 = V_{0y}$, $c_3 = V_{0z}$ – початкові умови швидкості точки;

$c_4 = x_0$, $c_5 = y_0$, $c_6 = z_0$ – початкові умови координат точки.

Сталі інтегрування $c_1$, $c_2$,..., $c_6$ визначаються з початкових умов руху точки M.

Таким чином $c_4$ – це початкова координата по осі x: $x_0$,

$c_5$ – це початкова координата по осі y: $y_0$,

$c_6$ – це початкова координата по осі z: $z_0$.

Рух по осям x та y рівномірний:

$$x = c_1 t + c_4 = V_{0x} t + x_0$$

$$y = c_2 t + c_5 = V_{0y} t + y_0$$

Рух по осі z – уповільнений: $z = -gt^2/2 + tV_{0z} + z_0$

За умовами задачі рух відбувається з початку координат (рис. 1) – тому

$$c_4 = x_0 = 0$$

$$c_5 = y_0 = 0$$

$$c_6 = z_0 = 0$$

1. Початкові швидкості точки також визначаються умовами задачі:

$$c_1 = V_{0x} = 0$$

$$c_2 = V_{0y} = V_0 \cdot \cos 60^o = 100 \cdot 0{,}5 = 50 \text{ м/с}$$

$$c_3 = V_{0z} = V_0 \cdot \sin 60^o = 100 \cdot 0{,}866 = 86{,}6 \text{ м/с}$$

Швидкості по осям x та y не змінюються:

$$V_{0x} = V_x = 0$$

$$V_{0y} = V_y = 50 \text{ м/с}$$

По осі z – рух уповільнений, тому що прискорення вільного падіння протилежно направлене швидкості.

Тоді $V_z = -gt + V_{0z} = 86{,}6 - gt$

2. Рух по осі x не відбувається: $x = x_0 = 0$

Рух по осі y рівномірний: $y = c_2t + c_5 = V_{0y}t + y_0 = 50t + 0 = 50t$

Рух по осі z – рух уповільнений:

Тоді: $z = -gt^2/2 + tV_{0z} + z_0 = -gt^2/2 + 86,6t$

4. Визначення положення характерних точок траєкторії руху та час їх проходження:

4.1. Точки початку і закінчення руху, коли координата z = 0:

$z = -gt^2/2 + 86,6t = 0 \quad z = t(86,6 - gt/2)$

є два корені цього рівняння: $t = 0$ (початок руху) та $t = 173,2/g = 17,67$ *с.*

Швидкості в початковій точці визначені, в точці з $t = 17,67$ *с:*

$V_z = 86,6 - gt = 86,6 - 9,8 \cdot 17,67 = -86,6$ *м/с (*траєкторія руху точки симетрична).

Координата кінцевої точки по x і по z = 0, по y:

$y = 50t = 50 \cdot 17,67 = 883,5$ *м.*

3.2. Точка найвищого підйому, коли координата z максимальна або $V_z = 0$ :

$V_z = -gt + V_{0z} = 86,6 - gt = 0$

$86,6 - gt = 0: t = 86,6/g = 8,83$ *с*

Для цього значення часу (середина часу польоту) висота становитиме:

$z = -gt^2/2 + 86,6t = -9,8 \cdot 8,83^2/2 + 86,6 \cdot 8,83 = 382,05$ *м.*

Координати цієї точки по x = 0, по y: $y = 50t = 50 \cdot 8,83 = 441,8$ *м.*

**<u>Приклад 3</u>**

**Прямолінійний рух матеріальної точки під дією сили, що змінюється з часом**

Точка M масою m = 2 кг рухається прямолінійно під дією сили F = f(t) = (250t – 200) з початковою швидкістю $V_0$ = 100 м/с (рис. 2). Визначити рівняння руху, положення, швидкість та пришвидшення точки M на траєкторії її руху у моменти часу 1, 2, 3, 4, 5 секунд.

**Розв'язок:**

Для прямолінійного руху точки необхідно, щоб вектор сили був паралельним вектору початкової швидкості точки, тобто для спрощення задачі можна розглянути рух вздовж однієї осі (рис. 2).

Тоді диференціальне рівняння руху точки матиме вигляд (вісь 0x):

$$m\ddot{x} = F_x(t) \Big| \cdot \frac{1}{m}$$

Якщо помножити обидві частини рівнянь на 1/m (за умови, що m ≠ 0):

$\ddot{x} = \frac{1}{m}F_x(t)$ → перше інтегрування: $\dot{x} = \frac{1}{m}\int F_x(t)\,dt + c_1$

Друге інтегрування: $x = \frac{1}{m}\int(\int F_x(t)\,dt + c_1)dt + c_2$

де $c_1$ і $c_2$ – сталі інтегрування, що визначається з початкових умов руху матеріальної точки ($c_1 = V_{0x}$, $c_2 = x_0$).

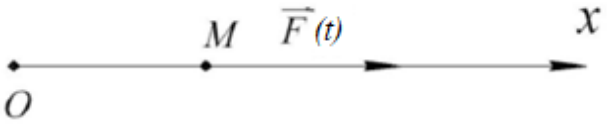



Рис. 2

За умовами задачі:

m = 2 кг, $x_0 = 0$, $V_{0x} = 100$ м/с, $F_x(t) = 250\,t - 200 = 50(5t - 4)$

Тоді: $V_x = \dot{x} = \frac{1}{2}50\int(5t-4)\,dt + 100 = 25(\frac{5t^2}{2} - 4t) + 100$ м/с.

Після підстановки в рівняння значень часу t = 1, 2, 3, 4, 5 с визначається поточна швидкість $V_x$ точки М (заносимо дані в таблицю 1).

Рівняння для визначення поточної координати x положення точки М матиме вигляд:

$$x = \int\left(25(\frac{5t^2}{2} - 4t) + 100\right)dt + 0 = 25(\frac{5t^3}{6} - \frac{4t^2}{2} + 4t) + 0 \text{ м}$$

$x = 125t^3/6 - 50t^2 + 100t$

Після підстановки в рівняння значень часу t = 1, 2, 3, 4, 5 с визначається поточна координата точки М (заносимо дані в таблицю 1).

Таблиця 1

| t (c) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 70,83 | 126,3 | 412,5 | 933,3 | 1854,2 |
| $V_x$ | 100 | 62,5 | 150 | 362,5 | 700 | 1162,5 |
| $a_x$ | -100 | 25 | 150 | 275 | 400 | 525 |

**Приклад 4.**

**Прямолінійний рух матеріальної точки під дією сили, що залежить від швидкості точки** F = F(V)).

Точка М масою m = 2 кг рухається прямолінійно під дією сили F = f(V) = 5$V$з початковою швидкістю $V_0$ = 0 м/с. Визначити рівняння руху, положення, швидкість та пришвидшення точки М на траєкторії її руху у моменти часу 1, 2, 3, 4, 5 секунд.

**Розв'язок:**

Для прямолінійного руху точки необхідно, щоб вектор сили був паралельним вектору швидкості точки, тобто для спрощення задачі можна розглянути рух вздовж однієї осі.

Тоді диференціальне рівняння руху точки матиме вигляд (вісь 0x):

$$m\ddot{x} = F_x(\dot{x}); \qquad dt = \frac{m d\dot{x}}{F_x(\dot{x})};$$

$$m\frac{d\dot{x}}{dt} = F_x(\dot{x}); \qquad t = \int \frac{m d\dot{x}}{F_x(\dot{x})} + c_1;$$

Приймаємо для початкового моменту часу $t_0 = c_1 = 0$ с.

Тоді: $t = \int \left(\frac{m}{5\dot{x}}\right) d\dot{x} + c_1 = \frac{m}{5}\, ln|\dot{x}| + 0 = \frac{m}{5}\, ln|\dot{x}|$

$ln|\dot{x}| = 5t/m \quad \rightarrow \quad \dot{x} = e^{5t/m}$ або $\frac{dx}{dt} = e^{5t/m}$

Після інтегрування: $x = \int e^{5t/m} dt + c_2 = \frac{m}{5t} e^{5t/m} + 0$

Початкова координата точки за умовами $x_0 = c_2 = 0$.

Після підстановки рівняння руху точки, її швидкості та пришвидшення матимуть вигляд:

$$x = \frac{2}{5t} e^{5t/2}$$

$$\dot{x} = e^{5t/m} = e^{5t/2}$$

$$\ddot{x} = (\dot{x})' = \left(e^{\frac{5t}{2}}\right)' = \frac{5}{2} e^{\frac{5t}{2}}$$

**<u>Завдання.</u> Задачі на окремі випадки руху матеріальної точки**

**<u>Задача 1:</u> Вільний рух точки в однорідному полі сил тяжіння біля поверхні Землі**

Точка М масою m (кг) рухається в однорідному полі сил тяжіння під дією сили тяжіння G з початковою швидкістю $V_0$ (м/с) (рис. 1) під кутом $\alpha^0$ до відповідної осі. Визначити положення характерних точок траєкторії руху, час їх проходження точкою М та її швидкість і пришвидшення: точок початку і закінчення руху та точки найвищого підйому.

Числові значення параметрів для розрахунку вибрати з таблиці 2.

Варіант згідно списку групи.

Таблиці 2

| Варіант | m, кг | $V_0$ (м/с) | α, ° | Вісь |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 20 | 10 | 0z |
| 2 | 2 | 30 | 20 | 0y |
| 3 | 3 | 40 | 30 | 0z |
| 4 | 4 | 50 | 45 | 0y |
| 5 | 5 | 60 | 60 | 0z |
| 6 | 6 | 70 | 10 | 0y |
| 7 | 7 | 80 | 20 | 0z |
| 8 | 8 | 90 | 30 | 0y |
| 9 | 9 | 120 | 45 | 0z |
| 10 | 10 | 20 | 60 | 0y |
| 11 | 11 | 30 | 10 | 0z |
| 12 | 12 | 40 | 20 | 0y |
| 13 | 13 | 50 | 30 | 0z |
| 14 | 14 | 60 | 45 | 0y |
| 15 | 15 | 70 | 60 | 0z |
| 16 | 16 | 80 | 10 | 0y |
| 17 | 17 | 90 | 20 | 0z |
| 18 | 18 | 120 | 30 | 0y |
| 19 | 19 | 150 | 45 | 0z |
| 20 | 20 | 180 | 60 | 0y |

**<u>Задача 2:</u> Прямолінійний рух матеріальної точки під дією сили, що змінюється з часом**

Точка М масою m (кг) рухається прямолінійно під дією сили F = f(t) з початковою швидкістю $V_0$ (м/с) (рис. 2). Визначити рівняння руху, положення, швидкість та пришвидшення точок траєкторії руху у моменти часу 1, 2, 3, 4, 5 секунд.

Числові значення параметрів для розрахунку вибрати з таблиці 3.

Варіант згідно списку групи.

Таблиці 3

| Варіант | m, кг | $V_0$, м/с | F, Н |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 20 | t |
| 2 | 2 | 30 | 2t+1 |
| 3 | 3 | 40 | t-2 |
| 4 | 4 | 50 | 3t-1 |
| 5 | 5 | 60 | 3-t |
| 6 | 6 | 70 | 2-3t |
| 7 | 7 | 80 | $t^2$+1 |
| 8 | 8 | 90 | $2t^2$-1 |
| 9 | 9 | 120 | 2-3t |
| 10 | 10 | 20 | 2t+1 |
| 11 | 11 | 30 | t-2 |
| 12 | 12 | 40 | 3t-1 |
| 13 | 13 | 50 | 3-t |
| 14 | 14 | 60 | 2-3t |
| 15 | 15 | 70 | $t^2$+1 |
| 16 | 16 | 80 | $2t^2$-1 |
| 17 | 17 | 90 | 4t |
| 18 | 18 | 120 | 2t+1 |
| 19 | 19 | 150 | 2t-0,5 |
| 20 | 20 | 180 | 3t-1 |

**<u>Задача 3:</u> Прямолінійний рух матеріальної точки під дією сили, що залежить від швидкості точки** F = F(V)).

Точка М масою m = 2 кг рухається прямолінійно під дією сили F = f(V) = 5$V$з початковою швидкістю $V_0$ = 0 м/с. Визначити рівняння руху, положення, швидкість та пришвидшення точки М на траєкторії її руху у моменти часу 1, 2, 3, 4, 5 секунд за прикладом 4.