ЛЕКЦІЯ № 10

Математичний аналіз

Перший курс. Спеціальність «Інженерія програмного забезпечення»

Поняття про функції багатьох змінних

План лекції. 1. Функції двох і багатьох змінних. 2. Область визначення та її геометрія. 3. Лінії рівня. 4. Границя функції двох змінних.

1. Поняття функції багатьох змінних

У попередніх лекціях розглядали функцію однієї змінної $y = f(x)$. Проте багато математичних моделей залежать одночасно від кількох параметрів. Наприклад, площа прямокутника $S = ab$ залежить від його довжини a та ширини b, а об'єм прямокутного паралелепіпеда $V = abc$ — від трьох вимірів.

Означення. Нехай $D \subset \mathbb{R}^2$. Якщо кожній парі $(x, y) \in D$ за певним правилом поставлено у відповідність *єдине* дійсне число z, то на множині D задано **функцію двох змінних**:

$$z = f(x, y), \qquad (x, y) \in D.$$

Тут x, y — незалежні змінні (аргументи), z — залежна змінна, D — область визначення, а множина всіх значень $f(x, y)$ — область значень функції.

Приклад 1. Розглянемо функцію $z = x^2 + y^2$. Для кожної пари дійсних чисел (x, y) існує єдине значення z. Тому $D = \mathbb{R}^2$, а $z \geq 0$, причому $z = 0$ лише в точці $(0, 0)$. Отже, множина значень $[0, +\infty)$.

Геометричний зміст

Графіком функції двох змінних є множина точок тривимірного простору

$$\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D,\ z = f(x, y)\}.$$

Зазвичай це поверхня. Наприклад, $z = x^2 + y^2$ задає параболоїд обертання, що відкривається вгору.

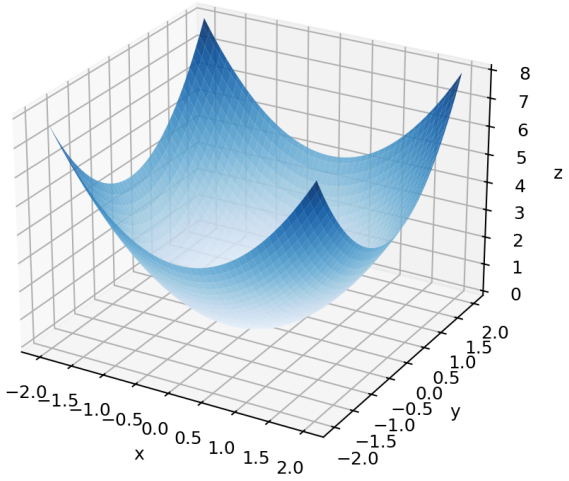

Рис. 1. Графік функції $z = x^2 + y^2$.

Означення. Функцією n змінних називають відображення $f : D \to \mathbb{R}$, де $D \subset \mathbb{R}^n$; записують

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Графік такої функції лежить у $\mathbb{R}^{n+1}$. Для $n > 2$ його вже не можна безпосередньо зобразити у звичайному тривимірному просторі.

Приклад 2. Функція $u = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ визначена на $\mathbb{R}^3$. У задачах програмної інженерії функції багатьох змінних можуть описувати час виконання алгоритму залежно від розміру вхідних даних, обсягу пам’яті та кількості потоків. Це лише приклад інтерпретації: конкретна формула залежності встановлюється окремо.

2. Область визначення функції двох змінних

Означення. Область визначення $D(f)$ — множина всіх пар (x, y), для яких вираз $f(x, y)$ має зміст як дійсне число.

При знаходженні області визначення використовуємо ті самі обмеження, що й для функцій однієї змінної: знаменник не дорівнює нулю; підкореневий вираз кореня парного степеня невід’ємний; аргумент логарифма додатний.

Приклад 3. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Розв'язання. Підкореневий вираз має бути невід'ємним:

$$9 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 \leq 9.$$

Це замкнений круг радіуса 3 із центром у початку координат; коло $x^2+y^2 = 9$ входить до області.

Відповідь. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$.

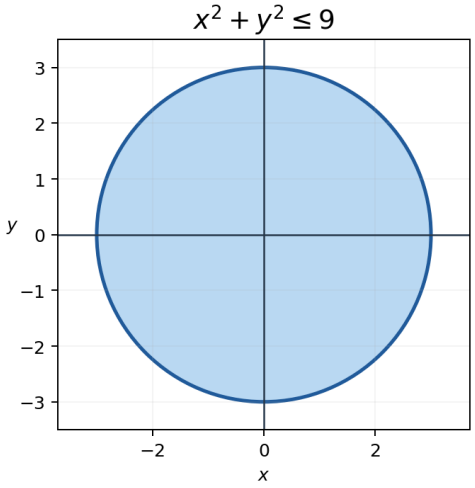

Рис. Область визначення у прикладі 3.

Приклад 4. Знайти область визначення функції $z = \ln(9 - x^2 - y^2)$.

Розв'язання. Аргумент логарифма повинен бути строго додатним:

$$9 - x^2 - y^2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 < 9.$$

Отже, маємо відкритий круг радіуса 3. Граничне коло не входить до області.

Відповідь. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 9\}$.

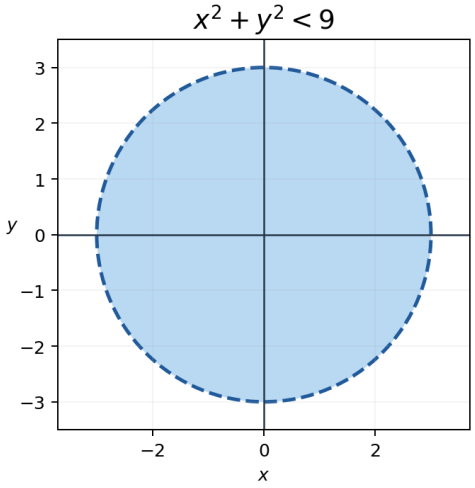

Рис. Область визначення у прикладі 4.

Приклад 5. Знайти область визначення функції $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}$.

Розв'язання. Знаменник не може дорівнювати нулю:

$$x^2 + y^2 - 1 \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 \neq 1.$$

Виключаємо лише коло радіуса 1. Точки всередині й зовні цього кола належать області визначення.

Відповідь. $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

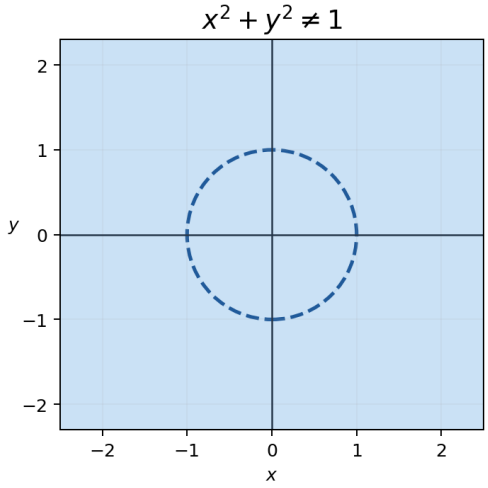

Рис. Область визначення у прикладі 5.

Точки та множини на площині

Відстань між точками $M(x, y)$ та $M_0(x_0, y_0)$ дорівнює

$$\rho(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Означення. **δ-околом** точки M_0 називають відкритий круг

$$U_\delta(M_0) = \{M : \rho(M, M_0) < \delta\}, \qquad \delta > 0.$$

Внутрішня точка множини D — точка, для якої існує окіл, цілком уміщений у D. **Гранична точка** — точка, кожен окіл якої містить і точки D, і точки її доповнення. Множина **відкрита**, якщо всі її точки внутрішні; **замкнена**, якщо вона містить усі свої граничні точки. Множина **обмежена**, якщо її можна вмістити в круг скінченного радіуса.

Зауваження. Область визначення не обов'язково є відкритою, замкненою чи зв'язною множиною. Наприклад, у прикладі 5 вона складається з двох частин, розділених виключеним колом.

Приклад 6. Знайти область визначення $z = \dfrac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{\ln(x+2)}$.

Розв'язання. Одночасно повинні виконуватися три умови:

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0, \qquad x + 2 > 0, \qquad \ln(x+2) \neq 0.$$

Остання нерівність рівносильна $x+2 \neq 1$, тобто $x \neq -1$. Таким чином, беремо круг радіуса 2, виключаємо точки з $x = -2$ (аргумент логарифма дорівнює нулю) та всі точки прямої $x = -1$, що лежать у крузі.

Відповідь. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4,\ x > -2,\ x \neq -1\}$.

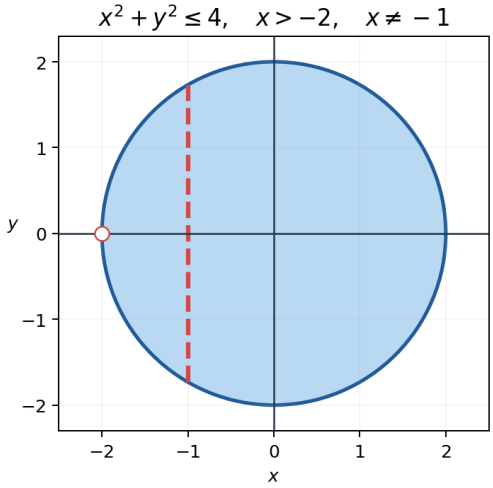

Рис. Область визначення у прикладі 6; червона пунктирна пряма виключена.

3. Лінії рівня функції двох змінних

Означення. Лінією рівня функції $z = f(x, y)$, що відповідає числу c, називають множину точок площини, для яких

$$f(x, y) = c.$$

Вона може складатися з однієї чи кількох кривих, окремих точок або бути порожньою. Лінії рівня показують, у яких точках площини функція набуває однакового значення. Їх отримують також як проєкції перетинів графіка функції з горизонтальними площинами $z = c$.

Приклад 7. Побудувати лінії рівня функції $z = x^2 + y^2$.

Розв'язання. Покладемо $z = c$. Тоді

$$x^2 + y^2 = c.$$

За $c > 0$ це коло радіуса $\sqrt{c}$; за $c = 0$ — одна точка $(0, 0)$; за $c < 0$ лінія рівня відсутня.

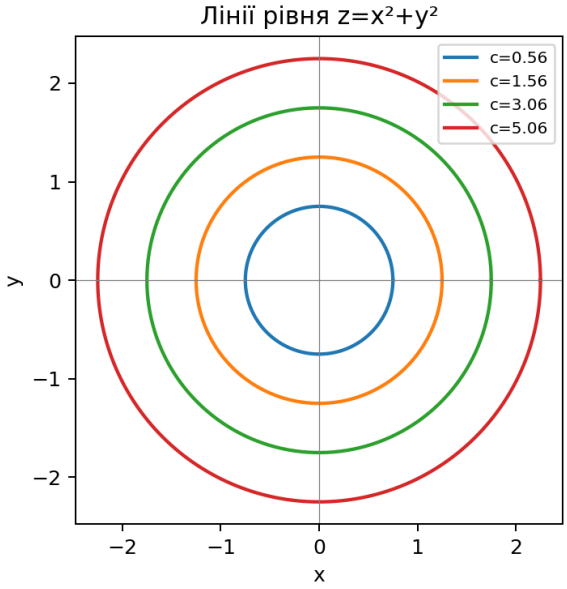

Рис. 3. Концентричні лінії рівня функції $z = x^2 + y^2$.

Приклад 8. Знайти лінії рівня функції $z = x + y$.

Розв'язання. Для фіксованого $c \in \mathbb{R}$ маємо

$$x + y = c \quad \Longleftrightarrow \quad y = -x + c.$$

Отже, лінії рівня — паралельні прямі з кутовим коефіцієнтом -1.

Приклад 9. Знайти лінії рівня функції $z = x^2 - y^2$.

Розв'язання. Маємо $x^2 - y^2 = c$. За $c > 0$ — гіперболи з гілками вздовж осі Ox, за $c < 0$ — гіперболи з гілками вздовж осі Oy, а за $c = 0$ — дві прямі $y = x$ та $y = -x$.

Практичний зміст. Лінії рівня застосовують на топографічних картах (горизонталі), картах температур, візуалізаціях полів значень та при аналізі цільових функцій у задачах оптимізації.

4. Границя функції двох змінних

4.1. Означення границі

Для функції однієї змінної аргумент наближається до точки зліва або справа. На площині до точки (x_0, y_0) можна наближатися нескінченно багатьма шляхами. Тому існування границі є суттєво сильнішою умовою.

Означення. Число A називають **границею функції** $f(x, y)$ у точці (x_0, y_0), якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх точок (x, y) з області визначення, які задовольняють

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta,$$

виконується нерівність $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. Позначення:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A.$$

Передбачається, що (x_0, y_0) є точкою скупчення області визначення функції.

Важливо. Значення функції в самій точці (x_0, y_0) не впливає на існування границі: функція може бути в цій точці навіть не визначена.

4.2. Обчислення границі

Приклад 10. Обчислити

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2 + xy + y^2).$$

Розв'язання. Многочлен є неперервним, тому можна підставити значення аргументів:

$$1^2 + 1 \cdot 2 + 2^2 = 1 + 2 + 4 = 7.$$

Відповідь. 7.

Приклад 11. Обчислити

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Розв'язання. Для $(x, y) \neq (0, 0)$ справджується оцінка

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = |y| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

При $(x, y) \to (0, 0)$ права частина прямує до нуля. За теоремою про двох міліціонерів шукана границя дорівнює нулю.

Відповідь. 0.

4.3. Залежність від шляху наближення

Необхідна умова існування границі. Якщо границя $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A$ існує, то вздовж кожного шляху з області визначення, що прямує до (x_0, y_0), значення функції також прямують до A. Тому двох шляхів із різними граничними значеннями достатньо, щоб довести неіснування загальної границі.

Приклад 12. Дослідити границю

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Розв'язання. Спочатку наближаємося вздовж осі Ox, тобто $y = 0$:

$$\frac{x \cdot 0}{x^2 + 0} = 0 \quad (x \neq 0), \qquad \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Тепер рухаємося вздовж прямої $y = x$:

$$\frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2} \quad (x \neq 0), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Отримані значення 0 і $\frac{1}{2}$ різні, тому загальної границі немає.

Відповідь. Границя не існує.

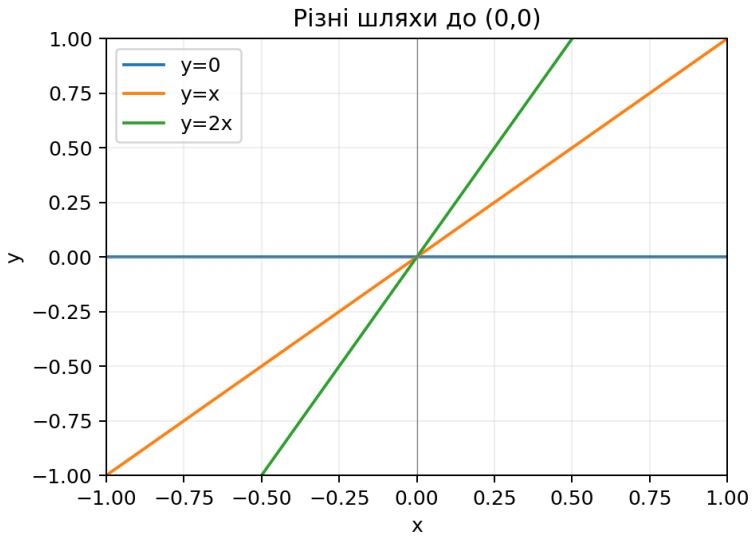

Рис. 4. Різні шляхи наближення до початку координат.

Приклад 13. Чи достатньо перевірити границю вздовж усіх прямих $y = kx$?

Розв'язання. Ні. Розглянемо

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

Уздовж довільної прямої $y = kx$ за $k \neq 0$ маємо

$$f(x, kx) = \frac{kx^3}{x^4 + k^2 x^2} = \frac{kx}{x^2 + k^2} \longrightarrow 0.$$

Для $k = 0$ також $f(x,0) = 0$. Але вздовж параболи $y = x^2$:

$$f(x, x^2) = \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}.$$

Отже, перевірка всіх прямих не доводить існування границі: слід враховувати й криволінійні шляхи.

4.4. Полярні координати в задачах на границю

Поблизу початку координат часто зручно покласти

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Тоді $(x,y) \to (0,0)$ рівносильно $r \to 0^+$, але кут φ може змінюватися. Якщо вдається знайти оцінку $|f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - A| \le g(r)$, незалежну від φ, де $g(r) \to 0$, то границя дорівнює A.

Приклад 14. Знайти

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}.$$

Розв'язання. У полярних координатах

$$\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = r^2 \cos^2\varphi \sin^2\varphi.$$

Оскільки $0 \le \cos^2\varphi \sin^2\varphi \le \frac{1}{4}$, то

$$0 \le r^2 \cos^2\varphi \sin^2\varphi \le \frac{r^2}{4} \longrightarrow 0.$$

Відповідь. 0.

Підсумок лекції

Функція двох змінних ставить кожній точці площини з області визначення у відповідність число; її графік зазвичай є поверхнею. Область визначення встановлюють за допустимістю виразу, а лінії рівня допомагають досліджувати значення функції без побудови поверхні. Границя в точці існує лише тоді, коли значення функції прямують до одного числа незалежно від шляху наближення.