ВИЩА МАТЕМАТИКА
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 13
Тема: Обчислення похідних

Мета. Закріпити поняття похідної, її геометричний та економічний зміст; навчитися застосовувати таблицю похідних, правила диференціювання суми, добутку, частки та складеної функції; знаходити рівняння дотичної.

1. Основні теоретичні відомості

Означення. Похідна функції f у точці x — границя відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Геометричний зміст: $f'(x_0)$ — кутовий коефіцієнт дотичної до графіка у точці x_0. **Економічний зміст:** похідна характеризує граничну зміну економічного показника (граничні витрати, граничний дохід). **Таблиця похідних:**

$$(C)' = 0, \quad (x)' = 1, \quad (x^n)' = n x^{n-1},$$
$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},$$
$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x,$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (e^x)' = e^x,$$
$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Правила диференціювання:

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \qquad (Cu)' = Cu',$$
$$(uv)' = u'v + uv', \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0,$$
$$(F(u(x)))' = F'(u(x))\, u'(x).$$

Порядок роботи: визначаємо вид функції, записуємо відповідне правило, підставляємо вирази та їхні похідні, спрощуємо результат.

Завдання 1. Застосування таблиці похідних

а) $y = 5$

Пояснення. Число 5 не залежить від x, тому похідна сталої дорівнює нулю.

$$y' = (5)' = 0.$$

Відповідь: $y' = 0$.

б) $y = x$

Пояснення. Похідна аргументу дорівнює одиниці.

$$y' = (x)' = 1.$$

Відповідь: $y' = 1$.

в) $y = x^5$

Пояснення. За степеневим правилом показник 5 переносимо як множник, а степінь зменшуємо на одиницю.

$$y' = (x^5)' = 5x^{5-1} = 5x^4.$$

Відповідь: $y' = 5x^4$.

г) $y = \dfrac{1}{x}$

Пояснення. Записуємо дріб як x^{-1} і використовуємо степеневе правило.

$$y' = (x^{-1})' = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Відповідь: $y' = -\dfrac{1}{x^2}$.

д) $y = \sqrt{x}$

Пояснення. Корінь подаємо як степінь $x^{1/2}$.

$$y' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Відповідь: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Завдання 2. Похідні многочленів

Правило: похідна суми дорівнює сумі похідних; числовий коефіцієнт виносимо за знак похідної.

а) $y = 3x^4 - 5x^2 + 7x - 2$

$$\begin{aligned} y' &= (3x^4)' - (5x^2)' + (7x)' - (2)' \\ &= 3 \cdot 4x^3 - 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 - 0 \\ &= 12x^3 - 10x + 7. \end{aligned}$$

Відповідь: $y' = 12x^3 - 10x + 7$.

б) $y = 2x^5 - x^3 + 4x$

$$\begin{aligned} y' &= 2(x^5)' - (x^3)' + 4(x)' \\ &= 2 \cdot 5x^4 - 3x^2 + 4 \cdot 1 \\ &= 10x^4 - 3x^2 + 4. \end{aligned}$$

Відповідь: $y' = 10x^4 - 3x^2 + 4$.

в) $y = \dfrac{x^6}{3} - 2x^4 + 5$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{3}(x^6)' - 2(x^4)' + (5)' \\ &= \frac{1}{3} \cdot 6x^5 - 2 \cdot 4x^3 + 0 \\ &= 2x^5 - 8x^3. \end{aligned}$$

Відповідь: $y' = 2x^5 - 8x^3$.

Завдання 3. Дроби та корені. Перехід до степеневого запису

Правило: $\dfrac{1}{x^m} = x^{-m}$, $\sqrt{x} = x^{1/2}$, $x^{3/2} = x\sqrt{x}$; далі використовуємо $(x^n)' = nx^{n-1}$.

а) $y = 3x^{-2} + 2x^{1/2}$

$$\begin{aligned} y' &= 3(-2)x^{-3} + 2 \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} \\ &= -6x^{-3} + x^{-1/2} = -\frac{6}{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Відповідь: $y' = -\dfrac{6}{x^3} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

б) $y = 5x^{-1} - 4x^{-3}$

$$\begin{aligned} y' &= 5(-1)x^{-2} - 4(-3)x^{-4} \\ &= -5x^{-2} + 12x^{-4} = -\frac{5}{x^2} + \frac{12}{x^4}. \end{aligned}$$

Відповідь: $y' = -\dfrac{5}{x^2} + \dfrac{12}{x^4}$.

в) $y = x^{3/2} + 2x^{-1}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{3}{2}x^{1/2} + 2(-1)x^{-2} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{2}{x^2}. \end{aligned}$$

Відповідь: $y' = \dfrac{3}{2}\sqrt{x} - \dfrac{2}{x^2}$.

Завдання 4. Похідна добутку

Формула: $(uv)' = u'v + uv'$. *Словами:* похідна першого множника на другий без змін, плюс перший без змін на похідну другого.

а) $y = (x^2+1)(2x-3)$

Пояснення. Нехай $u = x^2+1$, $v = 2x-3$. Тоді $u' = 2x$, $v' = 2$. Підставляємо ці чотири вирази у формулу.

$$\begin{aligned} y' &= \underbrace{(x^2+1)'}_{u'}\underbrace{(2x-3)}_{v} + \underbrace{(x^2+1)}_{u}\underbrace{(2x-3)'}_{v'} \\ &= 2x(2x-3) + (x^2+1)\cdot 2 \\ &= 4x^2 - 6x + 2x^2 + 2 \\ &= 6x^2 - 6x + 2. \end{aligned}$$

Відповідь: $y' = 6x^2 - 6x + 2$.

б) $y = x^3 \sin x$

Пояснення. Перший множник $u = x^3$ має похідну $u' = 3x^2$; другий $v = \sin x$ має похідну $v' = \cos x$.

$$\begin{aligned} y' &= (x^3)'\sin x + x^3(\sin x)' \\ &= 3x^2 \sin x + x^3 \cos x. \end{aligned}$$

Відповідь: $y' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$.

в) $y = (x+2)e^x$

Пояснення. Маємо $u = x+2$, $u' = 1$, $v = e^x$, $v' = e^x$. Не забуваємо, що похідна e^x дорівнює самій функції.

$$\begin{aligned} y' &= (x+2)'e^x + (x+2)(e^x)' \\ &= 1\cdot e^x + (x+2)e^x \\ &= (1+x+2)e^x = (x+3)e^x. \end{aligned}$$

Відповідь: $y' = (x+3)e^x$.

Завдання 5. Похідна частки

Формула: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. *Словами:* у чисельнику похідна чисельника на незмінний знаменник **мінус** незмінний чисельник на похідну знаменника; у знаменнику — квадрат початкового знаменника.

а) $y = \dfrac{x+1}{x-2}$

Пояснення. Позначимо $u = x+1$, $v = x-2$; тоді $u' = 1$, $v' = 1$.

$$y' = \frac{(x+1)'(x-2) - (x+1)(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{1\cdot(x-2) - (x+1)\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{x-2-x-1}{(x-2)^2} = -\frac{3}{(x-2)^2}.$$

Відповідь: $y' = -\dfrac{3}{(x-2)^2}$.

б) $y = \dfrac{x^2+3}{2x-1}$

Пояснення. Чисельник $u = x^2+3$, $u' = 2x$; знаменник $v = 2x-1$, $v' = 2$.

$$y' = \frac{(x^2+3)'(2x-1) - (x^2+3)(2x-1)'}{(2x-1)^2} = \frac{2x(2x-1) - 2(x^2+3)}{(2x-1)^2} = \frac{4x^2-2x-2x^2-6}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-6}{(2x-1)^2}.$$

Відповідь: $y' = \dfrac{2x^2-2x-6}{(2x-1)^2}$.

в) $y = \dfrac{\sin x}{x}$

Пояснення. Чисельник $u = \sin x$, $u' = \cos x$; знаменник $v = x$, $v' = 1$.

$$y' = \frac{(\sin x)'x - \sin x\,(x)'}{x^2} = \frac{x\cos x - \sin x\cdot 1}{x^2} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}.$$

Відповідь: $y' = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.

Завдання 6. Тригонометричні функції

а) $y = 3\sin x - 2\cos x$

Пояснення. Похідна $\sin x$ дорівнює $\cos x$, а похідна $\cos x$ дорівнює $-\sin x$. Мінус перед другим доданком зберігаємо.

$$y' = 3(\sin x)' - 2(\cos x)' = 3\cos x - 2(-\sin x) = 3\cos x + 2\sin x.$$

Відповідь: $y' = 3\cos x + 2\sin x$.

б) $y = x^2 \cos x$

Пояснення. Це добуток: $u = x^2$, $u' = 2x$; $v = \cos x$, $v' = -\sin x$.

$$\begin{aligned} y' &= (x^2)'\cos x + x^2(\cos x)' \\ &= 2x\cos x + x^2(-\sin x) \\ &= 2x\cos x - x^2\sin x. \end{aligned}$$

Відповідь: $y' = 2x\cos x - x^2\sin x$.

в) $y = \tan x + 2\sin x$

$$\begin{aligned} y' &= (\tan x)' + 2(\sin x)' \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} + 2\cos x. \end{aligned}$$

Відповідь: $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} + 2\cos x$.

Завдання 7. Показникові та логарифмічні функції

а) $y = e^x + 3^x$

Пояснення. Для e^x похідна та сама; для a^x похідна $a^x \ln a$, тому при $a = 3$ з'являється множник $\ln 3$.

$$y' = (e^x)' + (3^x)' = e^x + 3^x \ln 3.$$

Відповідь: $y' = e^x + 3^x \ln 3$.

б) $y = \ln x + 2\log_2 x$

Пояснення. Використовуємо $(\ln x)' = 1/x$ та $(\log_a x)' = 1/(x \ln a)$.

$$\begin{aligned} y' &= (\ln x)' + 2(\log_2 x)' \\ &= \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x \ln 2} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{2}{x \ln 2}. \end{aligned}$$

Відповідь: $y' = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x \ln 2}$.

в) $y = x \ln x$

Пояснення. Добуток: $u = x$, $u' = 1$; $v = \ln x$, $v' = 1/x$.

$$\begin{aligned} y' &= (x)' \ln x + x(\ln x)' \\ &= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1. \end{aligned}$$

Відповідь: $y' = \ln x + 1$.

Завдання 8. Складені функції: внутрішня та зовнішня

Правило ланцюга: $(F(u(x)))' = F'(u(x))\,u'(x)$. *Спочатку* диференціюємо зовнішню функцію, вважаючи внутрішній вираз одним аргументом; *потім* множимо на похідну внутрішнього виразу.

а) $y = (2x+1)^5$

Пояснення. Внутрішня функція $u = 2x+1$, $u' = 2$. Зовнішня $F(u) = u^5$, $F'(u) = 5u^4$.

$$\begin{aligned} y' &= \bigl((2x+1)^5\bigr)' \\ &= 5(2x+1)^4 \cdot (2x+1)' \\ &= 5(2x+1)^4 \cdot 2 = 10(2x+1)^4. \end{aligned}$$

Відповідь: $y' = 10(2x+1)^4$.

б) $y = \sqrt{3x^2+1}$

Пояснення. Внутрішня $u = 3x^2+1$, $u' = 6x$. Зовнішня $F(u) = \sqrt{u}$, $F'(u) = 1/(2\sqrt{u})$.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2\sqrt{3x^2+1}} \cdot (3x^2+1)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3x^2+1}} \cdot 6x \\ &= \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}. \end{aligned}$$

Відповідь: $y' = \dfrac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$.

в) $y = \sin(4x-1)$

Пояснення. Внутрішня $u = 4x-1$, $u' = 4$. Зовнішня $F(u) = \sin u$, $F'(u) = \cos u$.

$$\begin{aligned} y' &= \cos(4x-1) \cdot (4x-1)' \\ &= \cos(4x-1) \cdot 4 = 4\cos(4x-1). \end{aligned}$$

Відповідь: $y' = 4\cos(4x-1)$.

г) $y = e^{2x^2-3x}$

Пояснення. Внутрішня $u = 2x^2-3x$, $u' = 4x-3$. Зовнішня $F(u) = e^u$, $F'(u) = e^u$.

$$\begin{aligned} y' &= e^{2x^2-3x} \cdot (2x^2-3x)' \\ &= e^{2x^2-3x}(4x-3). \end{aligned}$$

Відповідь: $y' = (4x-3)e^{2x^2-3x}$.

Завдання 9. Додаткові приклади на складену функцію

а) $y = \ln(x^2 + 1)$

Пояснення. Внутрішня $u = x^2 + 1$, $u' = 2x$; зовнішня $F(u) = \ln u$, $F'(u) = 1/u$.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x^2+1} \cdot (x^2+1)' \\ &= \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}. \end{aligned}$$

Відповідь: $y' = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

б) $y = \cos(3x^2)$

Пояснення. Внутрішня $u = 3x^2$, $u' = 6x$; зовнішня $F(u) = \cos u$, $F'(u) = -\sin u$.

$$\begin{aligned} y' &= -\sin(3x^2) \cdot (3x^2)' \\ &= -\sin(3x^2) \cdot 6x = -6x \sin(3x^2). \end{aligned}$$

Відповідь: $y' = -6x \sin(3x^2)$.

в) $y = (x^2 - 2x + 5)^4$

Пояснення. Внутрішня $u = x^2 - 2x + 5$, $u' = 2x - 2$; зовнішня $F(u) = u^4$, $F'(u) = 4u^3$.

$$\begin{aligned} y' &= 4(x^2 - 2x + 5)^3 \cdot (x^2 - 2x + 5)' \\ &= 4(x^2 - 2x + 5)^3 (2x - 2). \end{aligned}$$

Відповідь: $y' = 4(x^2 - 2x + 5)^3 (2x - 2)$.

г) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

Пояснення. Переписуємо як $(x^2+1)^{-1}$. Внутрішня $u = x^2 + 1$, $u' = 2x$; зовнішня $F(u) = u^{-1}$.

$$\begin{aligned} y' &= \left((x^2+1)^{-1}\right)' \\ &= -(x^2+1)^{-2} \cdot (x^2+1)' \\ &= -(x^2+1)^{-2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Відповідь: $y' = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

Завдання 10. Значення похідної та геометричний зміст

Умова. Для $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ знайти похідну та її значення при $x = 0, 1, 2, 3$.
Розв'язання. Спочатку диференціюємо кожен доданок, потім підставляє-

мо задані значення аргументу:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (x^3)' - 3(x^2)' + (2)' = 3x^2 - 6x,\\
f'(0) &= 3\cdot 0^2 - 6\cdot 0 = 0,\\
f'(1) &= 3\cdot 1^2 - 6\cdot 1 = -3,\\
f'(2) &= 3\cdot 2^2 - 6\cdot 2 = 0,\\
f'(3) &= 3\cdot 3^2 - 6\cdot 3 = 9.
\end{aligned}
$$

Пояснення. $f'(2)=0$ означає, що дотична у точці з абсцисою 2 горизонтальна. Оскільки $f'(x)=3x(x-2)$ змінює знак з мінуса на плюс при переході через 2, тут є локальний мінімум.

Завдання 11. Рівняння дотичної

Умова. Скласти рівняння дотичної до $y=x^2-2x+3$ у точці $x_0=2$. **Розв’язання.** Використовуємо формулу $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. *Крок 1.* Знаходимо ординату точки дотику: $f(2)=2^2-2\cdot 2+3=3$. *Крок 2.* Знаходимо похідну та її значення у точці: $f'(x)=2x-2$, $f'(2)=2\cdot 2-2=2$. *Крок 3.* Підставляємо до рівняння дотичної:

$$
\begin{aligned}
y-3 &= 2(x-2),\\
y &= 2x-4+3 = 2x-1.
\end{aligned}
$$

Відповідь: $y=2x-1$.

Підсумок заняття

Щоб обчислити похідну, спочатку визначаємо будову функції. Для суми диференціюємо доданки окремо; для добутку і частки використовуємо відповідні формули зі штрихами; для складеної функції обов’язково множимо похідну зовнішньої функції на похідну внутрішньої. Для дотичної потрібні значення $f(x_0)$ і $f'(x_0)$.