ЛЕКЦІЯ
ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Лінійна алгебра та аналітична геометрія

Спеціальність «Інженерія програмного забезпечення» · перший курс

Мета лекції. Засвоїти поняття вектора, навчитися виконувати операції над векторами в координатній формі та застосовувати скалярний, векторний і мішаний добутки для розв'язування геометричних задач.

План: 1) Вектори та лінійні операції; 2) Скалярний добуток; 3) Векторний добуток; 4) Мішаний добуток; 5) Вектори в багатовимірних просторах; 6) Лінійна залежність і базис.

1. Вектори та лінійні операції над ними

Означення. Вектором у $\mathbb{R}^n$ називають впорядкований набір n дійсних чисел

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \qquad a_i \in \mathbb{R}.$$

Числа $a_1, \dots, a_n$ називають **координатами** (компонентами) вектора, а число n — його **розмірністю**. Порядок координат має значення: наприклад, $(1, 2) \neq (2, 1)$.

Геометрична інтерпретація. На площині ($n = 2$) вектор (x, y) можна зобразити напрямленим відрізком від початку координат $O(0, 0)$ до точки $M(x, y)$; у просторі ($n = 3$) — від $O(0, 0, 0)$ до $M(x, y, z)$. Напрям задається **від початку координат до зазначеної точки**. Таке зображення називають радіус-вектором точки M. Вільний вектор також можна переносити паралельно самому собі.

Вектор від точки A до точки B позначають $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$. Його довжина (модуль) — $|\vec{a}|$. Нульовий вектор $\vec{0} = (0, \dots, 0)$ має нульову довжину.

Два ненульові вектори називають **колінеарними**, якщо їхні напрямлені відрізки лежать на паралельних прямих; три вектори у тривимірному просторі називають **компланарними**, якщо їх можна розмістити в одній площині. Вектори рівні, якщо вони мають однакові довжину та напрям.

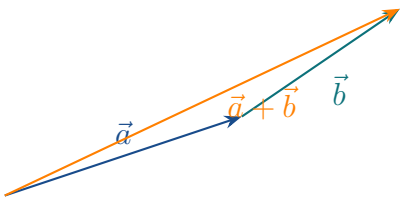

Рис. 1. Схематичне додавання векторів (правило трикутника).

У прямокутній декартовій системі координат

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}.$$

Якщо $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, то

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A).$$

Лінійні операції виконують покоординатно:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3), \quad \lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3).$$

Довжина вектора і відстань між точками:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \qquad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Для ненульового вектора $\vec{a}$ одиничний вектор його напряму дорівнює $\vec{e} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. Напрямні косинуси $\cos\alpha = \dfrac{a_1}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta = \dfrac{a_2}{|\vec{a}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{a_3}{|\vec{a}|}$ задовольняють $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Приклад. Нехай $A(1, -2, 3)$, $B(4, 2, 3)$. Знайти $\overrightarrow{AB}$, його довжину та одиничний вектор.

Розв'язання. Маємо $\overrightarrow{AB} = (3, 4, 0)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, тому $\vec{e} = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}, 0\right)$.

Відповідь. $\overrightarrow{AB} = (3, 4, 0)$, $AB = 5$, $\vec{e} = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}, 0\right)$.

2. Скалярний добуток векторів

Геометричне означення (на площині та у просторі). Скалярним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ називають число

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi},$$

де $\varphi \in [0, \pi]$ — кут між векторами. Якщо хоча б один вектор нульовий, добуток дорівнює нулю. **Формула в координатах:**

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}.$$

Основні властивості: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$; $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$; $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$; $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$. Для ненульових векторів

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}}, \qquad \boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0}.$$

Скалярна проєкція $\vec{a}$ на напрям ненульового вектора $\vec{b}$:

$$\mathrm{pr}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Приклад. Для $\vec{a} = (1, 2, 2)$, $\vec{b} = (2, -1, 2)$ знайти кут між ними.

Розв'язання. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - 2 + 4 = 4$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 3$. Отже,

$$\cos\varphi = \frac{4}{9}, \qquad \varphi = \arccos\frac{4}{9} \approx 63{,}6^\circ.$$

Відповідь. $\varphi = \arccos\dfrac{4}{9} \approx 63{,}6^\circ$.

Приклад. Визначити t, за якого $\vec{a} = (1, t, 2)$ і $\vec{b} = (3, -1, 1)$ перпендикулярні.

Розв'язання. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 - t + 2 = 5 - t$. За умовою $5 - t = 0$, звідки $t = 5$.

Відповідь. $t = 5$.

Критерій колінеарності

Теорема. Два вектори $\vec{a}, \vec{b}$ колінеарні тоді й лише тоді, коли вони лінійно залежні, тобто існують числа α, β, не обидва нульові, такі, що $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$. Для двох *ненульових* векторів це рівносильно існуванню числа λ такого, що $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

У координатах колінеарність означає пропорційність відповідних координат. Зручніше перевіряти рівності $a_i b_j - a_j b_i = 0$ для всіх i, j, не ділячи на координати, які можуть дорівнювати нулю.

Приклад. Перевірити колінеарність $\vec{a} = (2, -4, 6)$ та $\vec{b} = (-1, 2, -3)$.

Розв'язання. Оскільки $\vec{a} = -2\vec{b}$, вектори колінеарні та протилежно напрямлені.

Відповідь. Вектори колінеарні.

3. Векторний добуток векторів

Означення. Векторним добутком $\vec{a} \times \vec{b}$ називають вектор, який перпендикулярний до обох множників, має довжину $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi$ і напрямлений за правилом правої руки. Для колінеарних векторів добуток нульовий.

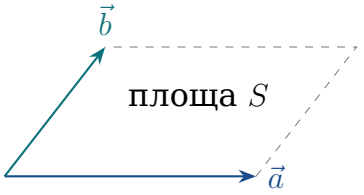

Рис. 2. Площа паралелограма дорівнює модулю векторного добутку (схема).

У координатах:

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=\big(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1\big)}.$$

Властивості: $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$; $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$; $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$. **Геометричні застосування:**

$$\boxed{S_{\text{паралелограма}}=|\vec{a}\times\vec{b}|},\qquad \boxed{S_{\text{трикутника}}=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|}.$$

Для двох ненульових векторів $\vec{a}\parallel\vec{b}\iff\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

Приклад. Знайти площу трикутника з вершинами $A(1,0,0)$, $B(3,1,0)$, $C(1,2,2)$.

Розв'язання. $\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$, $\overrightarrow{AC}=(0,2,2)$. Тоді

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&0\\0&2&2\end{vmatrix}=(2,-4,4).$$

Звідси $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4+16+16}=6$ і $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot 6=3$.

Відповідь. $S_{ABC}=3$ квадратні одиниці.

4. Мішаний добуток трьох векторів

Означення. Мішаним добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називають число $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

$$\boxed{[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}}.$$

Геометричний зміст: абсолютне значення мішаного добутку дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на трьох векторах:

$$\boxed{V_{\text{паралелепіпеда}}=|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|},\qquad \boxed{V_{\text{тетраедра}}=\frac{1}{6}|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|}.$$

Три вектори **компланарні** тоді й лише тоді, коли їхній мішаний добуток дорівнює нулю.

Приклад. Для $\vec{a}=(1,0,1)$, $\vec{b}=(0,2,1)$, $\vec{c}=(2,1,0)$ обчислити об'єм паралелепіпеда.

Розв'язання.

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&2&1\\2&1&0\end{vmatrix}=1(0-1)+1(0-4)=-5.$$

Отже, $V = |-5| = 5$.

Відповідь. $V = 5$ кубічних одиниць.

Приклад. Перевірити компланарність $\vec{a} = (1, 2, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$, $\vec{c} = (1, 3, 1)$.

Розв'язання. Оскільки $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, вектори лінійно залежні та компланарні. Справді, $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$.

Відповідь. Вектори компланарні.

5. Вектори у багатовимірних просторах

У просторі $\mathbb{R}^n$ вектор має вигляд $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. Операції додавання, віднімання, множення на число, обчислення довжини та скалярного добутку узагальнюються без змін за змістом і виконуються покоординатно:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n), \qquad \lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n),$$

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}, \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.}$$

Зберігаються властивості скалярного добутку, формула для кута між ненульовими векторами, критерій ортогональності $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ і критерій колінеарності $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ для ненульових векторів. **Зауваження:** звичайний векторний добуток із результатом у тому самому просторі та мішаний добуток у наведеному вище вигляді є спеціальними конструкціями тривимірного простору; їхні формули не переносяться безпосередньо на довільне $\mathbb{R}^n$.

Приклад. Для $\vec{a} = (1, 2, -1, 3)$, $\vec{b} = (2, 0, 4, -1)$ знайти суму, скалярний добуток і довжину $\vec{a}$.

Розв'язання.

$$\vec{a} + \vec{b} = (3, 2, 3, 2), \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 + 0 - 4 - 3 = -5,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1 + 4 + 1 + 9} = \sqrt{15}.$$

Відповідь. $(3, 2, 3, 2)$; -5; $\sqrt{15}$.

Приклад. Перевірити ортогональність п'ятивимірних векторів $\vec{u} = (1, 0, 2, -1, 3)$, $\vec{v} = (2, 1, -1, 3, 1)$.

Розв'язання. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 + 0 - 2 - 3 + 3 = 0$. Отже, $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Відповідь. Вектори ортогональні.

6. Лінійна залежність, незалежність і базис

Означення. Вектори $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ називають **лінійно залежними**, якщо існують числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, не всі нульові, для яких

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_m \vec{a}_m = \vec{0}.$$

Якщо ця рівність можлива лише за $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$, вектори називають **лінійно незалежними**.

Означення. Базисом простору $\mathbb{R}^n$ називають упорядковану систему з n лінійно незалежних векторів. Кожен вектор простору є єдиною лінійною комбінацією базисних векторів. Стандартний базис $\mathbb{R}^n$ складається з векторів $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$.

Критерій базису. n векторів у $\mathbb{R}^n$ утворюють базис тоді й лише тоді, коли визначник матриці, складеної з їхніх координат як стовпців, відмінний від нуля (еквівалентно: ранг матриці дорівнює n).

Приклад. Перевірити, чи утворюють базис $\mathbb{R}^3$ вектори $\vec{a}_1 = (1, 0, 1)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, 1)$, $\vec{a}_3 = (1, 1, 0)$.

Розв'язання. Складаємо матрицю зі стовпців цих векторів:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det A = 1(0-1) + 1(0-1) = -2 \neq 0.$$

Отже, вектори лінійно незалежні й утворюють базис $\mathbb{R}^3$.

Відповідь. Так, утворюють базис.

Приклад. Перевірити, чи утворюють базис $\mathbb{R}^4$ вектори $\vec{b}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{b}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\vec{b}_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\vec{b}_4 = (1, 1, 1, 0)$.

Розв'язання. Маємо $\vec{b}_4 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Отже, вектори лінійно залежні. Крім того, четверта координата кожного вектора нульова, тому їхні лінійні комбінації не можуть дати $\vec{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$.

Відповідь. Ні, базису $\mathbb{R}^4$ не утворюють.

Приклад. Перевірити, чи утворюють базис $\mathbb{R}^5$ вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5$ стандартного базису.

Розв'язання. Матриця з цих векторів як стовпців є одиничною матрицею I_5, а $\det I_5 = 1 \neq 0$. Отже, вектори лінійно незалежні та утворюють базис.

Відповідь. Так, утворюють базис $\mathbb{R}^5$.

Підсумкова таблиця

Операція	**Результат**	**Геометричний зміст**
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	Число	Кут, ортогональність, проєкція
$\vec{a} \times \vec{b}$	Вектор	Площа, нормаль, колінеарність
$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$	Число	Об’єм, компланарність

Завдання для самостійної роботи

1. Для $A(-1, 2, 0)$, $B(2, 6, 0)$ знайти $\overrightarrow{AB}$, довжину та одиничний вектор.
2. Обчислити кут між $\vec{a} = (1, 1, 0)$ та $\vec{b} = (1, 0, 1)$.
3. Знайти t, якщо $\vec{a} = (2, t, 1)$, $\vec{b} = (1, 2, -4)$ ортогональні.
4. Знайти площу трикутника $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 1)$, $C(0, 3, 0)$.
5. Обчислити об’єм тетраедра з вершинами $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$.
6. Перевірити компланарність векторів $(1, 0, 2)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 3)$.

Відповіді для перевірки: 1) $(3, 4, 0)$, 5, $(3/5, 4/5, 0)$; 2) $60°$; 3) $t = 1$; 4) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$; 5) 1; 6) компланарні.