ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ

Ранг матриці. Дослідження систем лінійних рівнянь за допомогою рангу матриці

Спеціальність «Інженерія програмного забезпечення» · Перший курс

1. Мета заняття

Навчитися визначати ранг матриці методом елементарних перетворень і методом мінорів; застосовувати теорему Кронекера–Капеллі для дослідження сумісності систем лінійних рівнянь; встановлювати кількість розв'язків та знаходити їх.

2. Короткі теоретичні відомості

Ранг матриці A — найбільший порядок її ненульового мінора. Позначення: $\operatorname{rank} A$ або $r(A)$. Для матриці розміру $m \times n$ маємо $0 \le r(A) \le \min(m, n)$.
Елементарні перетворення рядків, які не змінюють рангу: перестановка двох рядків; множення рядка на ненульове число; додавання до рядка іншого рядка, помноженого на довільне число.
Після зведення матриці до східчастого вигляду **ранг дорівнює кількості ненульових рядків**.

Для системи $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ позначимо через A матрицю коефіцієнтів, а через $[A \mid \mathbf{b}]$ — розширену матрицю.

Теорема Кронекера–Капеллі. Система сумісна тоді й лише тоді, коли

$$\boxed{\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A \mid \mathbf{b}].}$$

Якщо спільний ранг дорівнює кількості невідомих n, розв'язок єдиний. Якщо спільний ранг менший за n, система має нескінченно багато розв'язків (над $\mathbb{R}$). Якщо ранги різні, система несумісна.

3. Алгоритм дослідження системи

1. Записати матрицю коефіцієнтів A і розширену матрицю $[A \mid \mathbf{b}]$.
2. Виконати елементарні перетворення рядків, бажано одразу для розширеної матриці.
3. Обчислити $r(A)$ та $r([A \mid \mathbf{b}])$; порівняти ранги.
4. Якщо система сумісна, порівняти спільний ранг із кількістю невідомих.

5. За потреби знайти розв’язки з отриманої східчастої системи, виділивши вільні змінні.

4. Приклади з детальними розв’язаннями

Приклад 1. Визначення рангу матриці

Умова. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання. Застосуємо елементарні перетворення рядків:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

У східчастій матриці два ненульові рядки. Перевіримо методом мінорів: $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$, а визначник матриці третього порядку дорівнює нулю (другий рядок удвічі більший за перший).

Відповідь. $\boxed{r(A) = 2.}$

Приклад 2. Система з єдиним розв’язком

Умова. Дослідити систему та розв’язати її:

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x + 3y + z = 11, \\ x + 2y + 3z = 14. \end{cases}$$

Розв’язання. Складемо розширену матрицю й виконаємо перетворення:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right).$$

Маємо $r(A) = r([A \mid \mathbf{b}]) = 3 = n$, тому розв’язок єдиний. Із третього рядка $z = 3$, із другого $y - z = -1$, отже $y = 2$; із першого $x = 1$.

Відповідь. $\boxed{(x, y, z) = (1, 2, 3).}$

Приклад 3. Система з нескінченною кількістю розв'язків

Умова. Дослідити систему

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2x + 2y + 2z = 6, \\ x - y + z = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо розширену матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Звідси $r(A) = r([A \mid \mathbf{b}]) = 2 < 3$. Візьмемо $z = t$, $t \in \mathbb{R}$. Тоді $y = 1$, $x = 2 - t$.

Відповідь. $\boxed{(x, y, z) = (2 - t, 1, t), \quad t \in \mathbb{R}.}$

Приклад 4. Несумісна система

Умова. Дослідити систему

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2x + 2y + 2z = 6, \\ x + y + z = 4. \end{cases}$$

Розв'язання. Від третього рядка віднімемо перший, а від другого — подвоєний перший:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Отже, $r(A) = 1$, тоді як $r([A \mid \mathbf{b}]) = 2$. Останній рядок означає суперечність $0 = 1$.

Відповідь. $\boxed{\text{Система несумісна; розв'язків немає.}}$

Приклад 5. Дослідження системи з параметрами

Умова. Залежно від параметрів $a, b \in \mathbb{R}$ дослідити систему

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x + ay = b. \end{cases}$$

Розв'язання. Виконаємо перетворення $R_2 \leftarrow R_2 - R_1$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & a-1 & b-2 \end{array}\right).$$

Випадок 1: $a \neq 1$. Тоді $r(A) = r([A \mid \mathbf{b}]) = 2$, система має єдиний розв'язок:

$$y = \frac{b-2}{a-1}, \qquad x = 2 - y = \frac{2a - b}{a-1}.$$

Випадок 2: $a = 1$, $b = 2$. Тоді другий рядок нульовий, $r(A) = r([A \mid \mathbf{b}]) = 1 < 2$; $x = 2 - t$, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$.

Випадок 3: $a = 1$, $b \neq 2$. Тоді $r(A) = 1$, $r([A \mid \mathbf{b}]) = 2$; система несумісна.

Відповідь.

$$\begin{array}{ll} a \neq 1: & (x, y) = \left(\dfrac{2a - b}{a - 1}, \dfrac{b - 2}{a - 1}\right); \\ a = 1,\ b = 2: & (x, y) = (2 - t, t), \quad t \in \mathbb{R}; \\ a = 1,\ b \neq 2: & \text{розв'язків немає.} \end{array}$$

5. Підсумкова схема

Умова	Висновок
$r(A) \neq r([A \mid \mathbf{b}])$	Система несумісна
$r(A) = r([A \mid \mathbf{b}]) = n$	Єдиний розв'язок
$r(A) = r([A \mid \mathbf{b}]) < n$	Нескінченно багато розв'язків над $\mathbb{R}$

6. Завдання для самостійної роботи

1. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Дослідити систему $\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x + 2y = 6. \end{cases}$ та записати загальний розв'язок.
3. Дослідити систему $\begin{cases} x - y = 1, \\ 2x - 2y = 5. \end{cases}$.
4. Залежно від $a \in \mathbb{R}$ дослідити систему $\begin{cases} x + y = 1, \\ x + ay = 3. \end{cases}$.

Відповіді для перевірки. 1) $r(A) = 2$; 2) $(x, y) = (3 - t, t)$, $t \in \mathbb{R}$; 3) несумісна; 4) якщо $a \neq 1$, то $(x, y) = \left(\dfrac{a - 3}{a - 1}, \dfrac{2}{a - 1}\right)$; якщо $a = 1$, розв'язків немає.