Практичне заняття № 12
Визначні границі. Неперервність функції

Вища математика · Перший курс · Економічні спеціальності

1. Мета заняття

Навчитися застосовувати першу та другу визначні границі до обчислення границь функцій; розпізнавати стандартні невизначеності; використовувати число e в економічних моделях; перевіряти неперервність функції в точці та визначати характер розриву. **2. Основні теоретичні відомості**

Перша визначна границя:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$ (кут вимірюється у радіанах).

Наслідки:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{bx}=\frac{a}{b}\quad(b\neq 0),\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Друга визначна границя:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e}\qquad \boxed{\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}=e}.$$

Узагальнення (за умови $u(x)\to 0$ та $1+u(x)>0$):

$$\lim(1+u(x))^{v(x)}=e^{\lim u(x)v(x)},$$

якщо границя добутку існує та є скінченною. Корисні наслідки:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

3. Приклади на першу визначну границю

Приклад 1. **Умова.** Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}$.

Розв'язання. Домножимо й поділимо на 5 та скористаємося першою визначною границею:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}=\frac{5}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=\frac{5}{3}\cdot 1=\frac{5}{3}.$$

Відповідь. $\dfrac{5}{3}$.

Приклад 2. **Умова.** Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\tan 7x}$.

Розв’язання. Перетворимо вираз, виділивши дві стандартні границі:

$$\frac{\sin 4x}{\tan 7x} = \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{7x}{\tan 7x} \cdot \frac{4}{7}.$$

Обидва дроби прямують до одиниці, тому

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\tan 7x} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{7}.$$

Відповідь. $\dfrac{4}{7}$.

Приклад 3. Умова. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 6x}{x^2}$.

Розв’язання. Застосуємо тотожність $1-\cos t = 2\sin^2(t/2)$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 6x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 3x}{x^2} = 18 \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2 = 18.$$

Відповідь. 18.

4. Приклади на другу визначну границю

Приклад 4. Умова. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$.

Розв’язання. Покладемо $t = \frac{3}{x}$. Тоді $t \to 0$, а $2x = \frac{6}{t}$. Отже,

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x} = \lim_{t\to 0} \left[(1+t)^{1/t}\right]^6 = e^6.$$

Відповідь. e^6.

Приклад 5. Умова. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{3/x}$.

Розв’язання. Основа прямує до 1, показник — до нескінченності: маємо невизначеність 1^∞. Запишемо

$$(1+4x)^{3/x} = \left[(1+4x)^{1/(4x)}\right]^{12}.$$

За другою визначною границею вираз у квадратних дужках прямує до e.

Відповідь. e^{12}.

Приклад 6. Умова. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+5x)}{2x}$.

Розв’язання. Виділимо стандартну границю логарифма:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+5x)}{2x} = \frac{5}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+5x)}{5x} = \frac{5}{2}.$$

Відповідь. $\dfrac{5}{2}$.

5. Економічне застосування числа e

Приклад 7. Неперервне нарахування відсотків. Умова. Початковий капітал становить $P = 20\,000$ грн. Річна відсоткова ставка — $r = 0{,}12$ (12%). Знайти суму через $t = 3$ роки за умови неперервного нарахування відсотків.

Розв'язання. Якщо відсотки нараховуються m разів на рік, то

$$S_m = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}.$$

За другою визначною границею

$$S = \lim_{m\to\infty} S_m = Pe^{rt}.$$

Отже,

$$S = 20\,000e^{0{,}12\cdot 3} = 20\,000e^{0{,}36} \approx 28\,666{,}59 \text{ грн}.$$

Відповідь. Приблизно $28\,666{,}59$ грн.

6. Неперервність функції: короткі відомості

Функція f **неперервна в точці** x_0, якщо вона визначена в цій точці та

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)}.$$

Для перевірки неперервності достатньо: (1) знайти $f(x_0)$; (2) обчислити ліву та праву границі; (3) перевірити, що вони існують, рівні між собою та дорівнюють $f(x_0)$.

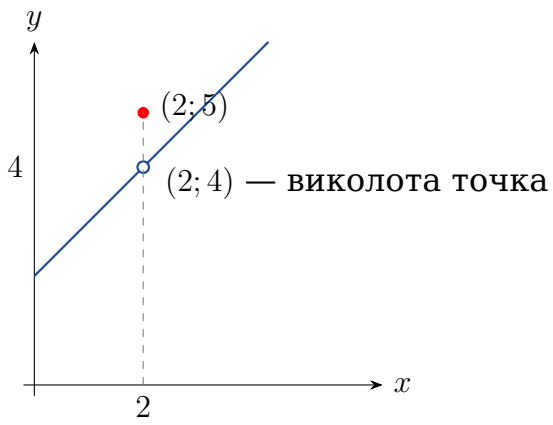
Приклад 8. Усувний розрив. Умова. Дослідити неперервність функції

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2, \\ 5, & x = 2 \end{cases} \qquad \text{у точці } x_0 = 2.$$

Розв'язання. Для $x \neq 2$ маємо $f(x) = x + 2$. Тому

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4, \qquad f(2) = 5.$$

Оскільки $4 \neq 5$, функція розривна в точці $x = 2$. Розрив усувний: достатньо покласти $f(2) = 4$.



Відповідь. У точці $x = 2$ — усувний розрив.

Приклад 9. Неперервність кусочно заданої функції. **Умова.** За якого значення a функція

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<1,\\ ax^2, & x\ge 1\end{cases}$$

неперервна в точці $x_0=1$?

Розв'язання. Зліва $\lim_{x\to 1-} f(x)=2\cdot 1+1=3$. Справа $\lim_{x\to 1+} f(x)=a$, причому $f(1)=a$. Для неперервності необхідно й достатньо, щоб $a=3$.

Відповідь. $a=3$.

Приклад 10. Стрибок функції. **Умова.** Дослідити неперервність $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ x+3, & x\ge 0\end{cases}$ у точці $x_0=0$.

Розв'язання. $\lim_{x\to 0-} f(x)=1$, $\lim_{x\to 0+} f(x)=3$, $f(0)=3$. Односторонні границі скінченні, але різні. Отже, маємо розрив першого роду (стрибок), величина стрибка $3-1=2$.

Відповідь. Розрив першого роду; стрибок дорівнює 2.

7. Завдання для самостійної роботи

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{5x}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 9x}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{3x}$.
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+2x)^{7/x}$.
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+6x)}{3x}$.
7. Знайти капітал через 2 роки, якщо вкладено 10 000 грн під 8% річних із неперервним нарахуванням відсотків.
8. Знайти a, за якого $f(x)=\begin{cases}3x-1, & x<2,\\ ax+1, & x\ge 2\end{cases}$ неперервна при $x=2$.

Відповіді для самоперевірки: $\frac{8}{5}$; $\frac{1}{3}$; 8; e^{15}; e^{14}; 2; $10\,000e^{0{,}16}\approx 11\,735{,}11$ грн; $a=2$.