ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА

Лекція 5
Теоретична механіка. Динаміка точки та твердого тіла

Викладач: доцент кафедри МІтаАТ
к.т.н. Степчин Я.А.

Динаміка як розділ теоретичної механіки

Динаміка – розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух матеріальних об'єктів з урахуванням сил, що прикладені до цих об'єктів.

У динаміці вирішуються дві основні задачі:
а) перша (пряма) – знаючи рух матеріального об'єкта, необхідно визначити діючі на об'єкт сили.
б) друга (обернена, основна) – по діючим на матеріальний об'єкт силам визначити рівняння його руху.
Предметом дослідження в динаміці є моделі матеріальних тіл – матеріальна точка, механічна система точок і абсолютно тверде тіло.

Основою для розгляду руху матеріальних точок та твердих тіл є закони Ньютона:
Перший закон Ньютона (закон інерції): Ізольована матеріальна точка знаходиться у стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху до тих пір, поки вона не буде змушена прикладеними до неї силами змінити цей стан.
Такий стан точки називається інерціальним і система відліку, в який має місце такий рух є інерціальною.

Другий закон Ньютона (основний закон динаміки): Зміна кількості руху матеріальної точки пропорційна прикладеній до точки силі і відбувається у напрямі прямої, вздовж якої діє ця сила.

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}, \qquad m = const \quad \rightarrow \quad m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \text{ або } m\vec{a} = \vec{F}$$

де m – маса матеріальної точки; a – прискорення точки;
F – сила, що діє на точку.

Прискорення, з яким рухається тіло, пропорційне силі, що прикладена до тіла, і обернено пропорційне масі тіла: $a = F/m$

Третій закон І. Ньютона (закон дії і протидії): Дві матеріальні точки (два твердих тіла) діють одна на одну з силами, які є рівні за величиною (модулем) і напрямлені вздовж однієї прямої у протилежні сторони.

Джерело появи сили – взаємодія матеріальної точки з іншої точкою або тілами.

$$F_A = -F_B \quad \rightarrow \quad m_A a_A = -m_B a_B \quad \rightarrow \frac{a_A}{a_B} = \frac{m_B}{m_A}$$

Четвертий закон І. Ньютона (закон незалежної дії сил): Якщо на матеріальну точку діють декілька сил, то точка одержує прискорення, яке дорівнює геометричній сумі тих прискорень, які б вона одержала під дією кожної із цих сил окремо.

Динаміка матеріальної точки

Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки

Матеріальна точка називається **вільною**, якщо на її рух не накладені ніякі обмеження, тобто у довільний момент часу вона може зайняти довільне положення в системі відліку і мати довільну швидкість.

Диференціальне рівняння руху вільної матеріальної точки у векторній формі має вигляд:

$$\boldsymbol{m\vec{a} = \vec{F}} \qquad \text{або} \qquad m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

m – маса точки; $a = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ – прискорення матеріальної точки;

F – рівнодійна сил, що діють на матеріальну точку.

Після проєкціювання обох частин рівняння руху вільної матеріальної точки на осі декартової системи координат:

$$\boldsymbol{m\ddot{x} = F_x} \quad \boldsymbol{m\ddot{y} = F_y} \quad \boldsymbol{m\ddot{z} = F_z}$$

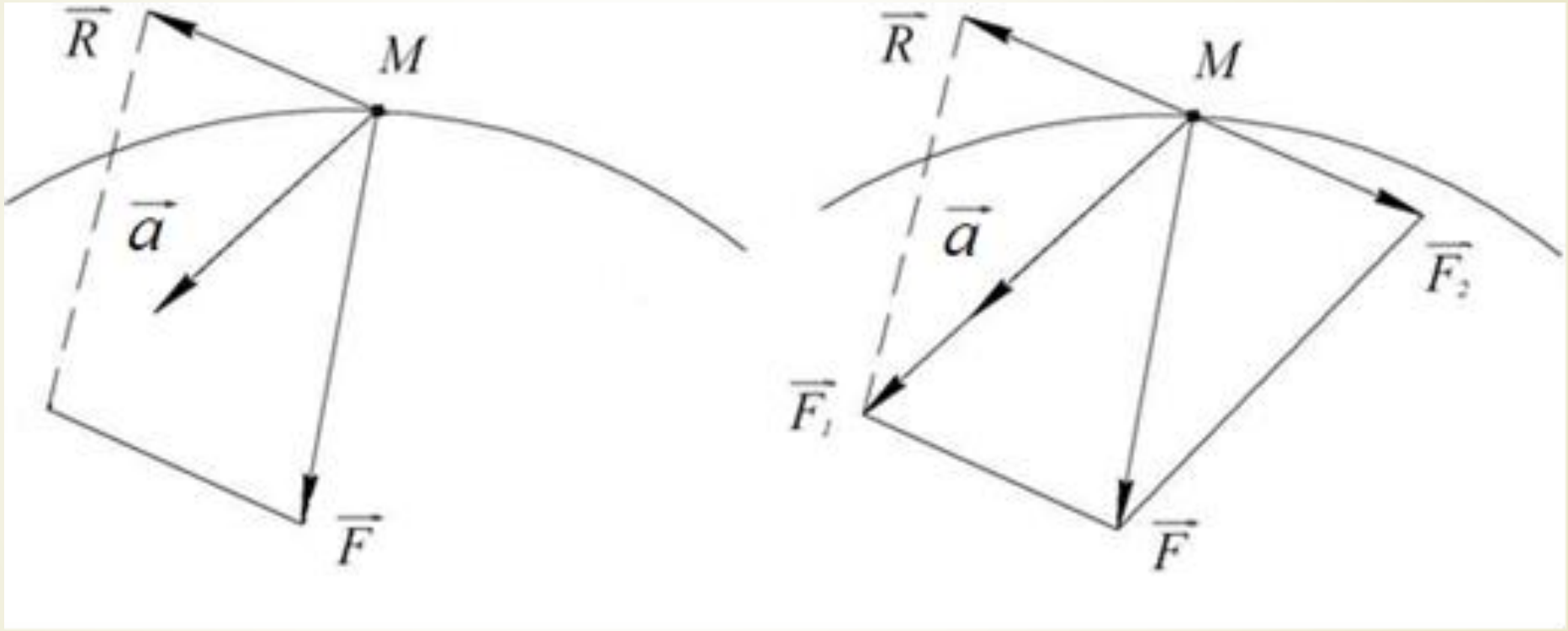
де $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ – проєкції вектора пришвидшення a на осі координат,

F_x, F_y, F_z – проєкції вектора рівнодійної сил F на осі координат.

Ці рівняння є рівняннями руху вільної матеріальної точки в координатній формі.

Диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки

Матеріальна точка називається **невільною**, якщо внаслідок накладання в'язей вона не може у довільний момент часу займати довільне положення в системі відліку і мати довільну швидкість (здійснює рух по деякій поверхні або кривій, або рухається в деякій заданій області).



а) б)

Рис. 1. Система сил, що діє на невільну матеріальну точку

F_1 обумовлює рух матеріальної точки: $m\vec{a} = \vec{F}$.

F_2 протидіє реакції в'язі без впливу на рух точки: $\vec{F}_2 + \vec{R} = 0$ або $\vec{F}_2 = -\vec{R}$.

Диференціальне рівняння руху невільної матеріальної точки у векторній формі : $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R}$ або $m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} + \vec{R}$

Диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки у координатній формі (декартові осі координат):

$$m\ddot{x} = F_x + R_x \qquad m\ddot{y} = F_y + R_y \qquad m\ddot{z} = F_z + R_z$$

Принцип Д'аламбера для невільної матеріальної точки

Точка М здійснює невільний рух під дією сили F (рис. 2).

Результуюча сила, що діє на невільну точку М: $\vec{F}_1 = \vec{F} + \vec{R}$. Також $F_1 = m\vec{a}$.

Щоб привести рухому з прискоренням $\vec{a}$ матеріальну точку М до стану спокою достатньо додати до діючих на тіло сил силу $\vec{F}_{ін}$ рівну за модулем силі $\vec{F}_1$ і напрямлену вздовж лінії дії сили $\vec{F}_1$ у протилежну сторону.

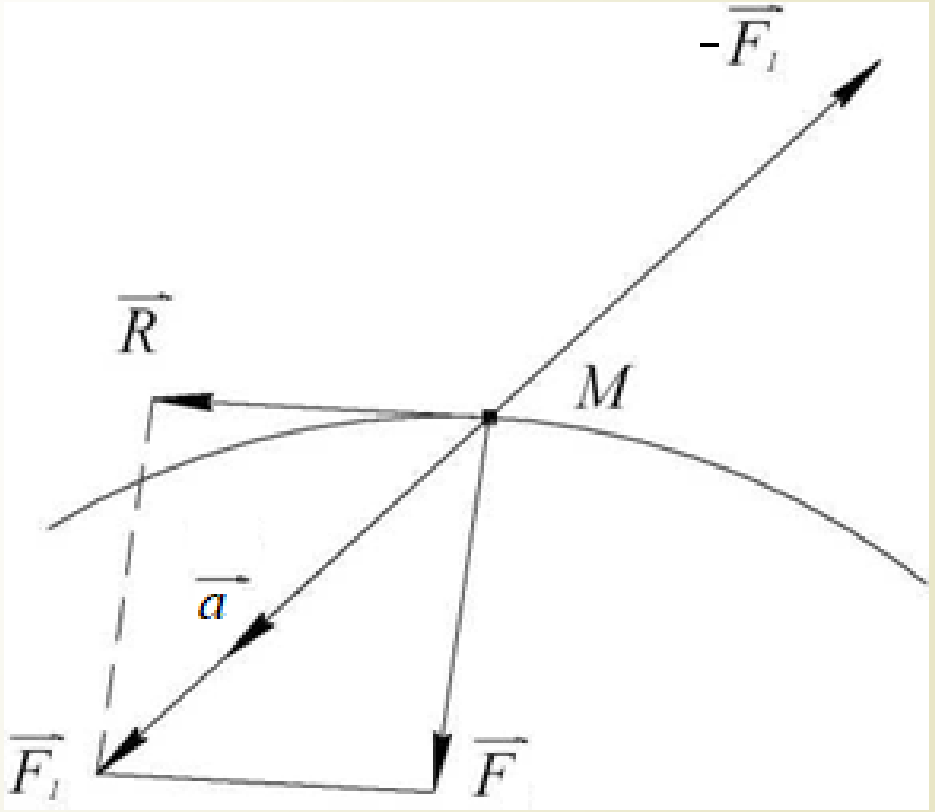


Рис. 1. Система сил при застосуванні принципу Д'аламбера

Тобто: $\vec{F}_1 + \vec{F}_{\text{ін}} = 0$

Сила $F_{\text{ін}}$ рівна за модулем добутку маси точки на її прискорення і напрямлена протилежно до вектору пришвидшення точки, називається даламберовою силою інерції: $\vec{F}_{\text{ін}} = -m\vec{a}$

Якщо спроєкціювати цю векторну рівність на осі декартової системи координат:

$$F_{\text{ін}x} = -ma_x \qquad F_{\text{ін}y} = -ma_y \qquad F_{\text{ін}z} = -ma_z$$

Рівняння рівноваги системи сил за принципом Д'аламбера має вигляд:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{F}_{\text{ін}} = 0$$

Принцип Д'аламбера: В кожний момент руху матеріальної точки геометрична сума прикладеної до точки сили F, реакції в'язі R та сили інерції $F_{\text{ін}}$ дорівнює нулю.

Наведене рівняння є рівнянням руху точки, записане у формі умови рівноваги сил.

Таким чином задачі динаміки можуть бути розв'язані методами статики (зміст методу кінетостатики).

Вирішення двох задач динаміки матеріальної точки

Пряма задача. За відомими масою матеріальної точки і законом її руху, визначається сила, що діє на цю точку (або рівнодійна сил, що діють на точку).

Основна задача (обернена). За відомими масою матеріальної точки, прикладеними до точки силами і початковими умовами руху точки, визначається закон руху точки.

Діючі на матеріальну точку сили можуть бути **сталими** ($F = const$) або **змінними**.

Змінна сила може:

1) змінюватись за визначеним законом з часом: ($F = f(t)$);

2) залежати від положення точки, яка визначається її радіус-вектором: ($F = f(r)$);

3) залежати від швидкості точки, що рухається: ($F = f(v)$).

У загальному випадку: $F = f(t, r, v)$

Пряма задача динаміки вільної матеріальної точки розв'язується шляхом диференціювання рівнянь руху точки.

Якщо відомі рівняння руху точки в декартові системі координат:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t).$$

то проекції сили на осі координат визначаються з диференціальних рівнянь руху точки:

$$F_x = ma_x = m\ddot{x} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$F_y = ma_y = m\ddot{y} = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$F_z = ma_z = m\ddot{z} = m\frac{d^2z}{dt^2}$$

За відомими проекціями сили на осі координат, можна визначити величину (модуль) сили і її напрямні косинуси за формулами:

$$F = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2 + F_Z^2};$$

$$\cos(\vec{F}, x) = \frac{F_x}{F}; \qquad \cos(\vec{F}, y) = \frac{F_y}{F}; \qquad \cos(\vec{F}, z) = \frac{F_z}{F};$$

Приклад:

Задані рівняння руху точки М масою m = 3 кг, в декартовій системі координат: $x = f_1(t);\quad y = f_2(t);\quad z = f_3(t).$

$$x = 8t^2+1;\quad y = t^3;\quad z = 8-t^3/2.$$

Визначити значення та напрям сили, що діє на точку М у системі координат, та положення точки в момент часу t = 1 с.

Проекції сили на осі координат визначаються з диференціальних рівнянь руху точки:

$$F_x = ma_x = m\ddot{x} = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad F_y = ma_y = m\ddot{y} = m\frac{d^2y}{dt^2} \qquad F_z = ma_z = m\ddot{z} = m\frac{d^2z}{dt^2}$$

$\dot{x} = (8t^2+1)' = 16t$ $\qquad \dot{y} = (t^3)' = 3t^2$ $\qquad \dot{z} = (8-t^3/2)' = -3t^2/2$

$\ddot{x} = (8t^2+1)'' = 16$ $\qquad \ddot{y} = (t^3)'' = 6t$ $\qquad \ddot{z} = (8-t^3/2)'' = -6t/2$

Тоді:

$F_x = ma_x = m\ddot{x} = 3 \cdot 16 = 48$ Н $\qquad F_y = ma_y = m\ddot{y} = 3 \cdot 6t = 18t$ Н

$F_z = ma_z = m\ddot{z} = 3 \cdot (-6t/2) = -9t$ Н

Для часу t = 1 с: $F_x = 48$ Н, $F_y = 18$ Н, $F_z = -9$ Н

За відомими проекціями сили на осі координат, можна визначити величину (модуль) сили і її напрямні косинуси:

$$F = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2 + F_Z^2};$$

$$\cos(\vec{F}, x) = \frac{F_x}{F};\ \cos(\vec{F}, y) = \frac{F_y}{F};\ \cos(\vec{F}, z) = \frac{F_z}{F};$$

$$F = \sqrt{48^2 + 18^2 + (-9)^2} = 51{,}4 \text{ Н}.$$

$$\alpha = \cos(\vec{F}, x) = \frac{48}{51{,}4};\quad \beta = \cos(\vec{F}, y) = \frac{18}{51{,}4};\quad \gamma = \cos(\vec{F}, z) = \frac{-9}{51{,}4}$$

$$\alpha = 21^\circ \qquad \beta = 69{,}5^\circ \qquad \gamma = 100^\circ$$

11

Положення точки:

$x = 8t^2+1 = 8+1 = 9$ м; $y = t^3 = 1$ м; $z = 8-t^3/2 = 8 - ½ = 7{,}5$ м

Для розв'язання **основної (оберненої) задачі динаміки** вільної матеріальної точки потрібно двічі інтегрувати диференціальні рівняння руху точки.

Сили, що діють на матеріальну точку можуть бути сталими або змінними.

У загальному випадку, коли змінні сили змінюються за визначеним законом з часом, залежать від положення точки, яке визначається її радіус-вектором та від швидкості точки, що рухається: $F = f(t, r, v)$

Тоді диференціальні рівняння руху матимуть вигляд (при координатному способі задання руху):

$$m\ddot{x} = F_x + F_x(t) + F_x(r) + F_x(\dot{x})$$
$$m\ddot{y} = F_y + F_y(t) + F_y(r) + F_y(\dot{y}) \qquad (3)$$
$$m\ddot{z} = F_z + F_z(t) + F_z(r) + F_z(\dot{z})$$

При інтегруванні кожного диференціального рівняння руху матеріальної точки наявні дві сталі інтегрування. При інтегруванні трьох диференціальних рівнянь буде шість сталих.

Рівняння:

$$x = x(t, c_1, \ldots, c_6)$$
$$y = y(t, c_1, \ldots, c_6) \qquad (4)$$
$$z = z(t, c_1, \ldots, c_6)$$

є загальним розв'язком рівнянь (3), де $c_1, \ldots, c_6$ сталі інтегрування.

Для визначення закону руху точки з рівнянь (4) потрібно знати початкові умови її руху.

Початковий стан руху матеріальної точки визначається її положенням та її швидкістю в початковий момент часу (t = 0).

Якщо точка рухається в декартовій системі координат, то необхідно знати її координати і проекції швидкості на осі координат у початковий момент руху:

$t = 0;\ x(0) = x_0;\ y(0) = y_0;\ z(0) = z_0;\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0;\ \dot{y}(0) = \dot{y}_0;\ \dot{z}(0) = \dot{z}_0;$

Сукупність отриманих даних – початкові умови руху матеріальної точки.

Для визначення сталих інтегрування надаємо рівнянням (4) значення t = 0 і, взявши необхідні за часом, отримуємо шість рівнянь:

$x_0 = x(0, c_1, \ldots, c_6);\ \dot{x}_0 = \dot{x}(0, c_1, \ldots, c_6);$

$y_0 = y(0, c_1, \ldots, c_6);\ \dot{y}_0 = \dot{y}(0, c_1, \ldots, c_6);$

$z_0 = z(0, c_1, \ldots, c_6);\ \dot{z}_0 = \dot{z}(0, c_1, \ldots, c_6);$

Звідси визначаються сталі інтегрування:

$c_1 = f_1(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0);\quad c_2 = f_2(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0);$

$c_3 = f_3(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0);\quad c_4 = f_4(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0);$

$c_5 = f_5(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0);\quad c_6 = f_6(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0);$

Тоді розв'язок рівнянь (4) набуває вигляду:

$x = x(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0);$

$y = y(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0);$

$z = z(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0);$

Отримані рівняння визначають єдиний розв'язок системи диференціальних рівнянь руху точки.

Окремі випадки руху матеріальної точки

1. **Вільний рух точки в однорідному полі сил тяжіння біля поверхні Землі**

Точка M масою m рухається в однорідному полі сил тяжіння під дією тільки однієї сили тяжіння G.

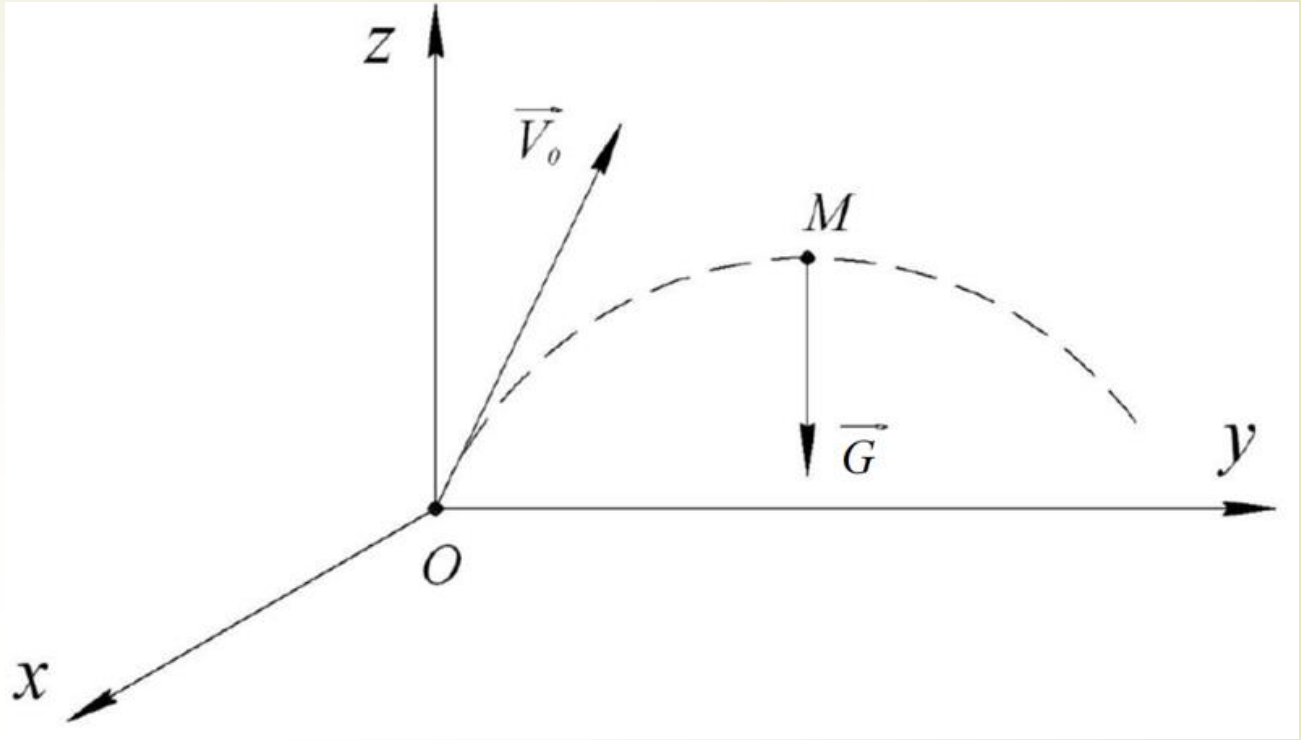


Рис. 1.

У вибраній системі відліку диференціальні рівняння руху точки M матимуть вигляд:

$$m\ddot{x} = 0 \qquad m\ddot{y} = 0 \qquad m\ddot{z} = -mg \quad \Big| \quad \times\frac{1}{m}$$

$$\ddot{x} = 0 \qquad \ddot{y} = 0 \qquad \ddot{z} = -g$$

Після першого інтегрування:

$$\dot{x} = c_1 \qquad \dot{y} = c_2 \qquad \dot{z} = -\int g dt + c_3 = -gt + c_3$$

Після другого інтегрування:

$$x = \int c_1 dt + c_4 = c_1 t + c_4 \qquad y = \int c_2 dt + c_5 = c_2 t + c_5$$

$$z = -\int g t dt + \int c_3\, dt \quad + c_6 = -g\frac{t^2}{2} + c_3 t + c_6$$

$c_1 = V_{0x}$, $c_2 = V_{0y}$, $c_3 = V_{0z}$ – початкові умови швидкості точки;

$c_4 = x_0$, $c_5 = y_0$, $c_6 = z_0$ – початкові умови координат точки.

Сталі інтегрування c_1, c_2,..., c_6 визначаються з початкових умов руху точки М.

2. Прямолінійний рух матеріальної точки під дією сили, що змінюється з часом

Для прямолінійного руху точки необхідно, щоб вектор сили був паралельним вектору початкової швидкості точки, тобто у найпростішому вигляді можна розглянути рух вздовж однієї осі (Рис. 2).

16

Тоді диференціальне рівняння руху точки матиме вигляд (вісь 0x):

$$m\ddot{x} = F_x(t) \;\Big|\; \times\frac{1}{m}$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}F_x(t)$$

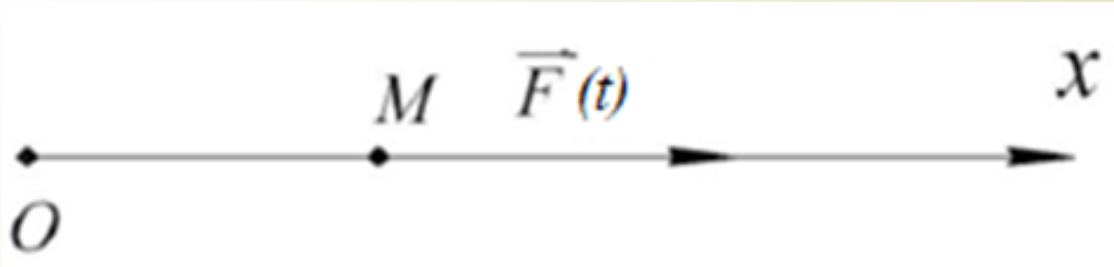


Рис. 2

Після першого інтегрування: $\dot{x} = \frac{1}{m}\int F_x(t)\,dt + c_1$

Друге інтегрування: $x = \frac{1}{m}\int\left(\int F_x(t)\,dt + c_1\right)dt + c_2$

де c_1 і c_2 – сталі інтегрування, що визначається з початкових умов руху матеріальної точки ($c_1 = V_{0x}$, $c_2 = x_0$)

Приклад: для умов m= 2 кг, $x_0 = 0$, $V_{0x} = 100$ м/с, $F_x(t) = -t + 5$

Тоді: $V_x = \dot{x} = \frac{1}{2}\int(-t+5)\,dt + 100 = -\frac{t^2}{4} + \frac{5t}{2} + 100$ м/с

$$x = \int\left(-\frac{t^2}{4} + \frac{5t}{2} + 100\right)dt + 0 = -\frac{t^3}{12} + \frac{5t^2}{4} + 100t \text{ м}$$

3. Прямолінійний рух матеріальної точки під дією сили, що залежить від положення точки

$$m\ddot{x} = F_x(x)$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}\frac{dx}{dx} = \frac{dx}{dt}\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{\dot{x}\,d\dot{x}}{dx};$$

$$Тоді \quad m\frac{\dot{x}\,d\dot{x}}{dx} = F_x(x)$$

$$\dot{x}\,d\dot{x} = \frac{1}{m}F_x(x)dx$$

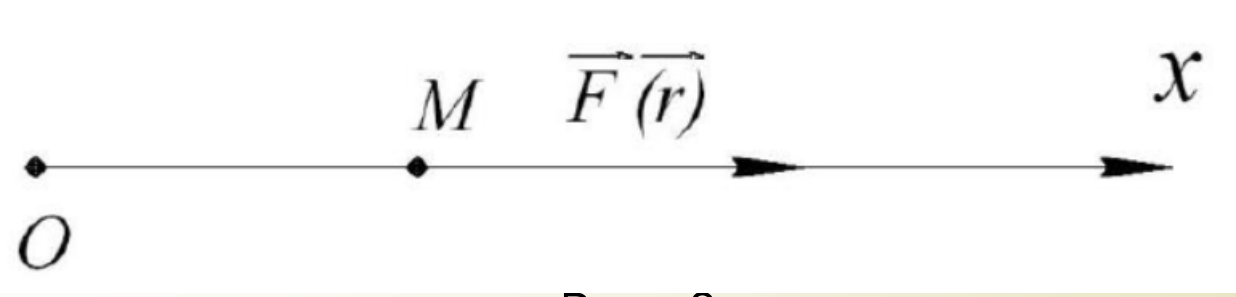


Рис. 3

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{1}{m}\int F_x(x)dx + c_1;$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\int F_x(x)dx + c_1};$$

Після інтегрування:

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\int F_x(x)dx + c_1}} + c_2;$$

Теоретично можна отримати залежність x = f(t)

Приклад: m = 2 кг, $x_0 = 0$, $V_{0x} = 100$ м/с, $F_x(x) = 2x$

Тоді: $t = \int \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{m}{2}\int 2xdx + c_1}} \right) dx + c_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{m}{2}x^2 + c_1 x}} + 0 = \frac{1}{c_1} ln \left| \frac{x}{\sqrt{\frac{m}{2}x + c_1}} \right|$

З отриманих результатів, зрозуміло, досить важко отримати залежність x=F(t), додатково враховуючи невизначеність постійної інтегрування c_1.

4. Прямолінійний рух матеріальної точки під дією сили, що залежить від швидкості точки F = F(V)).

Диференціальне рівняння руху точки:

$$m\ddot{x} = F_x(\dot{x});$$

$$m\frac{d\dot{x}}{dt} = F_x(\dot{x});$$

$$dt = \frac{md\dot{x}}{F_x(\dot{x})};$$

$$t = \int \frac{md\dot{x}}{F_x(\dot{x})} + c_1;$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \varphi(t); \quad dx = \varphi(t)dt;$$

$$x = \int \varphi(t)dt + c_2.$$

c_1 і c_2 визначаються з початкових умов руху точки.