Практичне заняття № 5

Дослідження та побудова графіка функції

Математичний аналіз. Спеціальність «Інженерія програмного забезпечення»

1. Алгоритм повного дослідження функції

Нехай задано функцію $y = f(x)$. Для побудови її графіка доцільно виконати такі кроки.

1. Знайти **область визначення** $D(f)$; установити точки розриву.
2. Перевірити **парність, непарність, періодичність** (якщо це доречно): $f(-x) = f(x)$ або $f(-x) = -f(x)$.
3. Знайти **точки перетину з осями**: розв'язати $f(x) = 0$ та обчислити $f(0)$, якщо $0 \in D(f)$; дослідити знак $f(x)$.
4. Обчислити **границі** на кінцях проміжків області визначення, зокрема біля точок розриву та при $x \to \pm\infty$.
5. Визначити **асимптоти**. Вертикальна $x = a$ існує, якщо принаймні одна одностороння границя $f(x)$ при $x \to a$ дорівнює $+\infty$ або $-\infty$. Горизонтальна $y = b$: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$. Похила $y = kx + b$ при відповідному $x \to \pm\infty$:
$$k = \lim \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim(f(x) - kx), \qquad k \neq 0.$$
6. Знайти **першу похідну** $f'(x)$, критичні точки та проміжки її знака. Встановити проміжки зростання ($f' > 0$) і спадання ($f' < 0$), локальні максимуми й мінімуми.
7. Знайти другу похідну $f''(x)$, дослідити її знак: при $f''(x) > 0$ графік опуклий донизу, при $f''(x) < 0$ — опуклий угору. Визначити точки перегину, де змінюється напрям опуклості графіка.
8. За потреби знайти **область значень**, додаткові характерні точки й побудувати графік з урахуванням усіх результатів.

2. Приклад 1. Многочлен третього степеня

Умова. Повністю дослідити та побудувати графік функції
$$f(x) = x^3 - 3x.$$

Розв'язання. Область визначення: $D(f) = \mathbb{R}$. Оскільки $f(-x) = -f(x)$, функція непарна, графік симетричний відносно початку координат. Нулі: $x(x^2-3) = 0$, тобто $x = -\sqrt{3},\ 0,\ \sqrt{3}$. Границі: $f(x) \to \pm\infty$ при $x \to \pm\infty$ відповідно. Асимптот немає.
$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1).$$

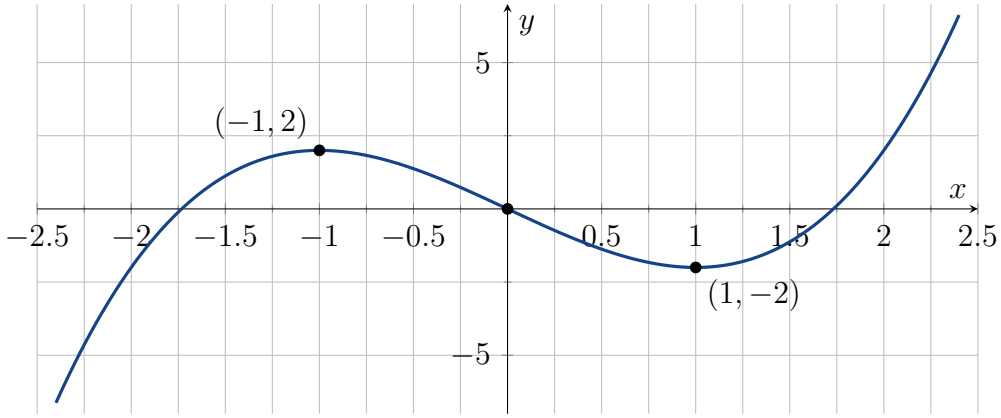


Отже, $f' > 0$ на $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, а $f' < 0$ на $(-1, 1)$. Максимум $f(-1) = 2$, мінімум $f(1) = -2$.

$$f''(x) = 6x.$$



При $x < 0$ маємо $f'' < 0$, при $x > 0$ — $f'' > 0$. Точка перегину $(0, 0)$. Область значень $E(f) = \mathbb{R}$.



Відповідь. Зростає на $(-\infty, -1)$ і $(1, +\infty)$; спадає на $(-1, 1)$; локальний максимум $(-1, 2)$, мінімум $(1, -2)$, перегин $(0, 0)$.

3. Приклад 2. Вертикальна та похила асимптоти

Умова. Повністю дослідити та побудувати графік

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}.$$

Розв'язання. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Функція не є парною чи непарною. Чисельник завжди додатний, тому нулів немає; $f(0) = -1$. Знак функції: $f(x) < 0$ при $x < 1$, $f(x) > 0$ при $x > 1$.

Вертикальна асимптота $x = 1$, оскільки

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty.$$

Знайдемо коефіцієнти похилої асимптоти $y = kx + b$ за формулами:

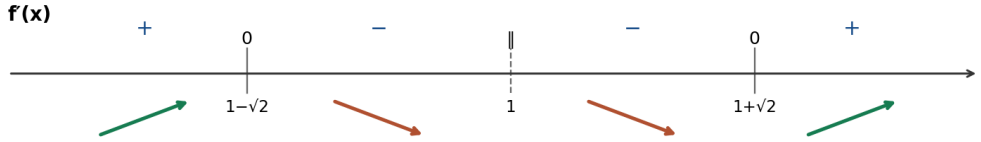
$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x(x-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 1.$$

Отже, похила асимптота — $y = x + 1$ (горизонтальних немає).

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 2}{(x-1)^2}.$$

Критичні точки: $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

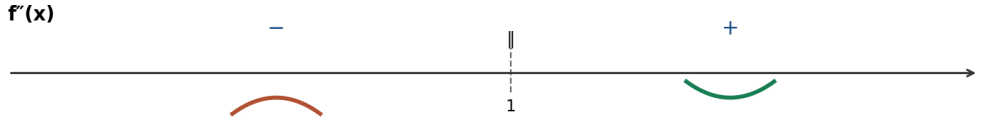


Похідна додатна при $x < 1 - \sqrt{2}$ та $x > 1 + \sqrt{2}$; від'ємна на $(1 - \sqrt{2}, 1)$ і $(1, 1 + \sqrt{2})$. Отже,

$$f(1 - \sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2}, \qquad f(1 + \sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}.$$

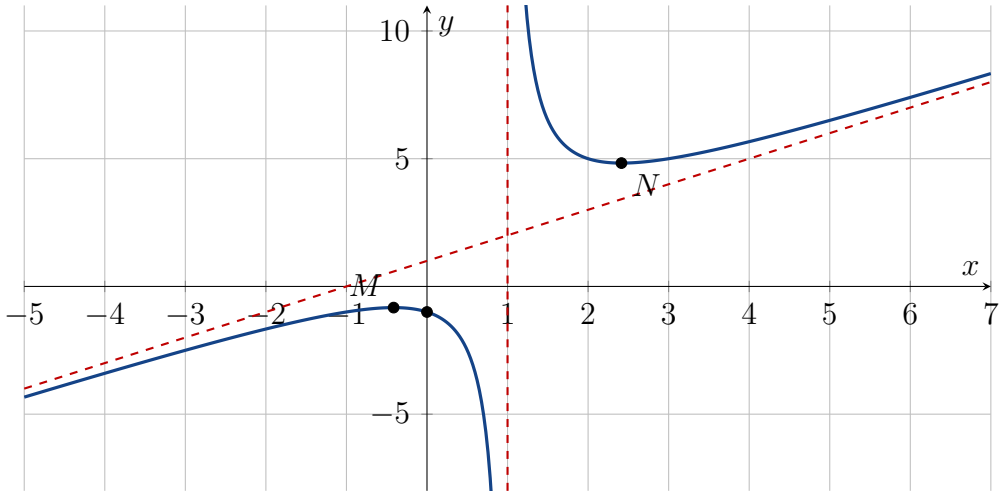
У першій точці — локальний максимум, у другій — локальний мінімум.

$$f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}.$$



Для $x < 1$ друга похідна від'ємна, для $x > 1$ — додатна. Точок перегину немає, бо $x = 1 \notin D(f)$. Область значень:

$$E(f) = (-\infty, 2 - 2\sqrt{2}] \cup [2 + 2\sqrt{2}, +\infty).$$



Пунктиром показано асимптоти $x = 1$ та $y = x + 1$.

Відповідь. Максимум $M(1 - \sqrt{2}, 2 - 2\sqrt{2})$, мінімум $N(1 + \sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2})$; асимптоти $x = 1$, $y = x + 1$.

4. Приклад 3. Дві вертикальні та горизонтальна асимптоти

Умова. Повністю дослідити та побудувати графік

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

Розв'язання. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Функція непарна: $f(-x) = -f(x)$. Єдиний нуль і перетин з обома осями — $(0, 0)$. Знак: $f < 0$ на $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$; $f > 0$ на $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$. Вертикальні асимптоти $x = -1$, $x = 1$:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty.$$

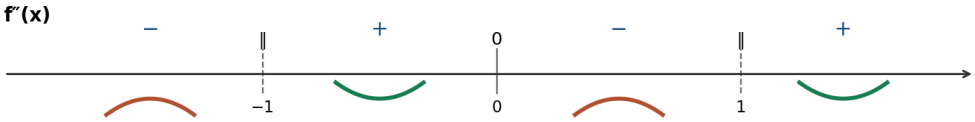
Оскільки $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$, горизонтальна асимптота — $y = 0$.

$$f'(x) = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} < 0 \quad (x \in D(f)).$$

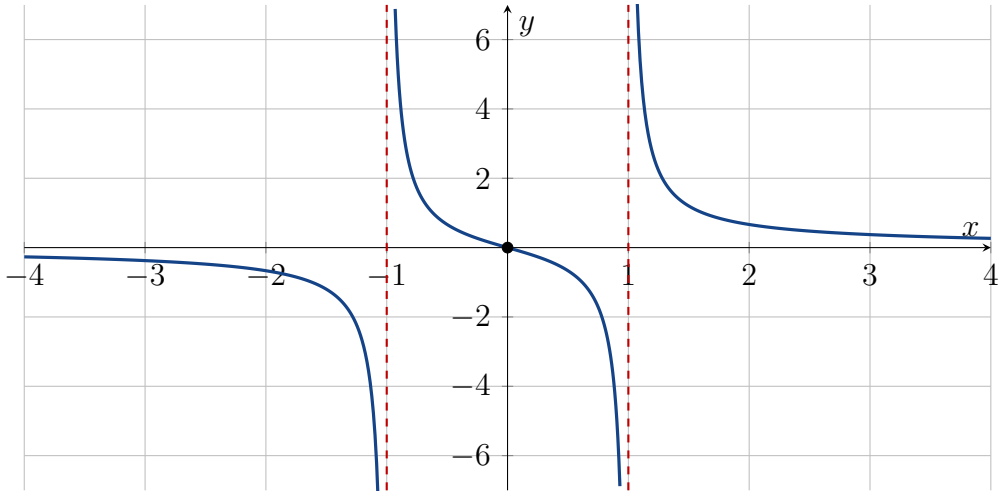


Отже, функція строго спадає на кожному з проміжків $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$; локальних екстремумів немає.

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}.$$



Знаки другої похідної: $f'' < 0$ на $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$; $f'' > 0$ на $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$. При переході через $x = 0$ знак змінюється, тому $(0, 0)$ — точка перегину. Область значень $E(f) = \mathbb{R}$.



Вертикальні асимптоти показано пунктиром; горизонтальна асимптота збігається з віссю Ox.

Відповідь. Асимптоти $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$; функція спадає на всіх трьох проміжках області визначення; точка перегину $(0, 0)$.

5. Завдання для самостійної роботи

Повністю дослідити та побудувати графіки функцій:

$$1)\ y = x^3 - 6x^2 + 9x; \qquad 2)\ y = \frac{x^2}{x-2}; \qquad 3)\ y = \frac{x+1}{x^2-4}.$$