ЛЕКЦІЯ № 4
Нечіткий вивід.
Функції належності.

1.Метою аналізу в нечіткій системі є отримання математичного опису (апроксимації) невідомої (або відомої, але занадто складної) ***оптимальної функції цілі*** $F(X)$, $X = \{x_2, x_2 \ldots\ldots\ldots x_n\}$.

Для цієї невідомої функції вважаються відомими **універсуми** – чіткі числові діапазони входів x_j та виходу $F(X)$. Універсуми входів та виходу помічаються назвами (у даному випадку – літерами $U_{X1}, U_{X1}, \ldots U_{XJ}, \ldots U_{XN}, U_{XF}$, і мають ***позитивний напрямок осей у бік зростання чисел***. В нечіткій логіці якісний універсум має числове підґрунтя. Наприклад 'Технічна досконалість', 'Якість', 'Надійність', 'Акуратність' можуть змінюватись у межах 0…100 %. Звичайно розглядають один універсум виходу, але не забороняється розгляд кількох виходів.

Терми-числа на універсумі $U_{ВАГА}$ = *Вага* = *10…40* (рис. 4.7.1) мають ***лінгвістичні назви з мірою упевненості 100 %*** («*Мала*», «*Середня*», «*Велика*») та відповідні однозначні числові значення: «*Мала*»=*10*, «*Середня*»=*25*, «*Велика*»=*40*.

Два терми («*Мала*»=*10* та «*Велика*»=*40*) завжди розміщені по краях універсуму, а кількість та розміщення інших «середніх» термів довільно визначає експерт.

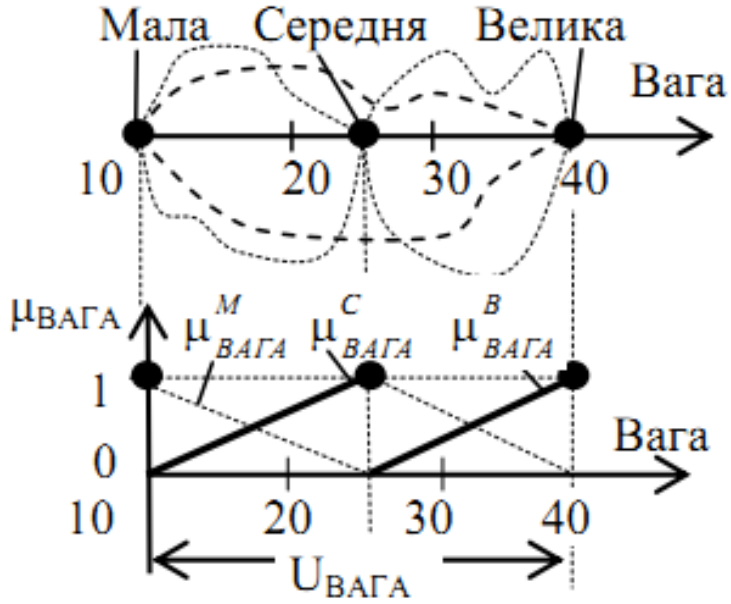


Рис. 4.7.1. Нечіткі множини, терми лінгвістичної змінної, функції упевненості

Нечітка множина належить кожному терму і складається з числових значень вздовж універсуму до сусідніх термів. Нечіткі множини взаємно перекриваються. На універсумі $U_{ВАГА}=10...40$ ці нечіткі множини, які належать термам *Мала=10, Середня=25, Велика=40*, обведені пунктирними лініями, а самі числа-терми помічені чорними точками на функціях упевненості $\mu_{ВАГА}^{M}$, $\mu_{ВАГА}^{C}$, $\mu_{ВАГА}^{B}$.

- **Лінгвістична змінна («Вага»)** може набувати значень одного з термів-чисел (*Мала=10, Середня=25, Велика=40*) з деякою мірою упевненості, яка визначається по логічній функції упевненості $\mu_{ВАГА}^{M}$, $\mu_{ВАГА}^{C}$, $\mu_{ВАГА}^{B}$, що змінюються у межах 0…1. Таким чином, лінгвістична змінна з вказаною величиною функції упевненості є *однозначним (сінонімальним) еквівалентом числа універсуму*. Коли логічна функція упевненості лінгвістичної змінної дорівнює «1», то змінна точно дорівнює числу-терму. Згідно рис. 4.7.1 одне числове значення змінної має два лінгвістичних еквіваленти з мірами упевненості, підсумок яких дорівнює 1.
- **Логічні функції упевненості** $\mu_{ВАГА}^{M}$, $\mu_{ВАГА}^{C}$, $\mu_{ВАГА}^{B}$ для термів *Мала=10, Середня=25, Велика=40* охоплюють відповідні нечіткі множини, мають у даному випадку трикутну форму і змінюються по прямих лініях від 1 на координаті власного терму до 0 на координаті сусіднього терму (можливе застосування і нелінійної функції упевненості).

Підсумок функцій впевненості сусідніх термів дорівнює «1» для будьякого числового входу (наприклад, $\mu_{ВАГА}^{M} + \mu_{ВАГА}^{C}=1$). Наведені на рис. 4.7.1 функція $\mu_{ВАГА}^{M}$ та частка функції $\mu_{ВАГА}^{C}$ для *«Ваги»=10…25* дають дубльовану інформацію, і тому одна з них може не використовуватись у розрахунках. Щоб збутися дубльованої інформації ураховуються лише ті частки функцій належності, які зростають у напрямку зростання універсуму (показані жирними лініями на рис. 4.7.1). В результаті зміна числового значення змінної на будь-якому універсумі супроводжується однозначною зміною його логічно-лінгвістичного еквіваленту і навпаки: досягається повна тотожність (сінонімальна однозначна взаємозалежність) між числовим та логічно-лінгвістичним значеннями змінних універсуму.

Два найближчі сусідні терми конкретного числа x^{Aj} універсуму мають назви *молодший терм* x^{MTj} (менше сусіднє число-терм) та *старший терм* x^{CT}_{j} (більше сусіднє число-терм). Функція упевненості для чисел між ними розраховується за формулою:

$$\mu_{xj}^{A} = (x_j^{A} - x_j^{MT}) / (x_j^{CT} - x_j^{MT}) = 0...1, \qquad (4.7.1)$$

де x_j^{A} – реальне значення змінної для вхідної точки A вздовж осі x_j; x_j^{MT}, x_j^{CT} – числові значення «молодшого» та «старшого» терму числа x_j^{A}.

Згідно формули (4.7.1) функція впевненості вказує логічну міру впевненості віднесення заданого числа x_j^{A} до множини «старшого» терму x_j^{CT}.

- При введених термах-числах функції упевненості можуть визначатись *автоматично* (без участі експерта, який може ввести суб'єктивну помилку), а при використанні метода найменших квадратів – *можна обійтись взагалі без поняття функції упевненості*.
- Опорними точками для деякої функції *F(X)* звуться вхідні точки з координатами вхідних термів-чисел. Для *реалізованих опорних точок* експерт вказує значення виходу, які у загальному випадку не співпадають з термами виходу. *Нереалізовані опорні точки* не мають значень виходу.

- **Інформаційний модуль.** Для двох вхідних змінних $\{x_1, x_2\}$ на рис. 4.7.2 наведений виділений сірим фоном *інформаційний модуль* з виходами F^0, F_{x1}, F_{x2}, F^m (виходи F^0, F_{x1}, F_{x2}, F^m можуть не дорівнювати термам виходу) для опорних точок, заданих вхідними числами-термами x_1^{MT}, x_1^{CT} та x^{2MT}, x^{2CT}.

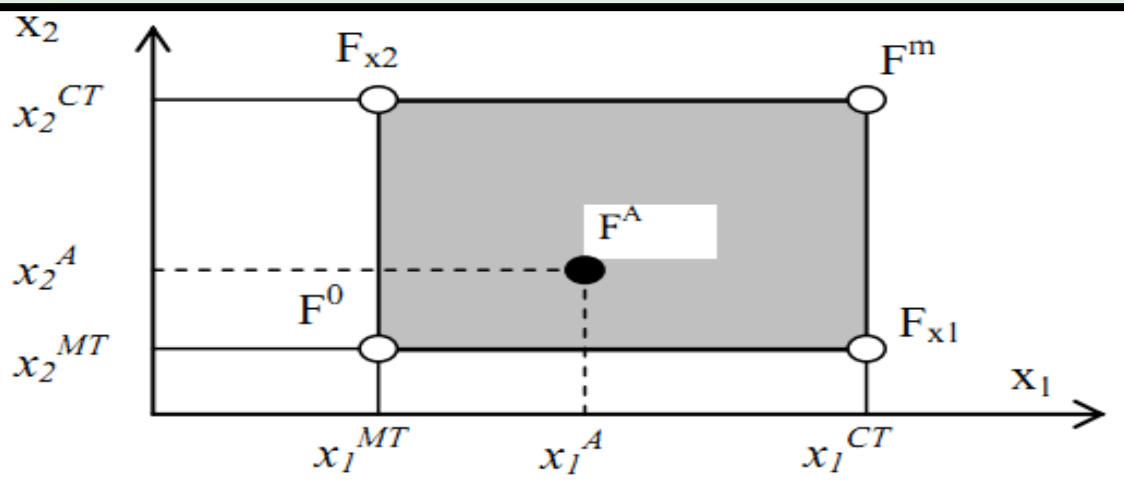


Рис. 4.7.2. Інформаційний модуль

В багатокоординатній системі будь-яка точка A з вхідними координатами $\{x_1^A, x_2^A, \ldots, x_n^A\}$ теж попадає між деякими значеннями «молодшого» та «старшого» термів по кожній осі універсумів. Отримані значення «молодшого» та «старшого» термів по осях універсумів створюють виокремлений ***інформаційний модуль***, в межах якого знаходиться точка A.

Розрахунок виходу однозначної нечіткої системи.

Розв'язок задачі за теорією однозначних нечітких систем значно спрощується у порівнянні з класичною теорією, бо можна *не ураховувати функції належності та значно спростити процес дефаззифікації*. Для цього використовується матриця спостережень табл. 4.7.1 з даними входів та виходів інформаційного модуля рис. 4.7.2 та *метод найменших квадратів* (МНК).

Примітка: МНК можна застосувати до довільної кількості інформаційних модулів та для всієї системи в цілому. В цьому разі отримана аналітична залежність не проходить через точки виходу F_t.

З інформаційного модуля рис. 4.7.2 ми маємо матрицю спостережень з відомими даними (табл. 4.7.1).

Таблиця 4.7.1.

Матриця спостережень інформаційного модуля

t	$\mathbf{x_{0t}}$	$\mathbf{x_{1t}}$	$\mathbf{x_{2t}}$	$\mathbf{F_t}$
1	1	x_1^{MT}	x_2^{MT}	F^0
2	1	x_1^{CT}	x_2^{MT}	F_{x1}
3	1	x_1^{MT}	x_2^{CT}	F_{x2}
4	1	x_1^{CT}	x_2^{CT}	F^m

Лінійна апроксимаційна формула (не інтерполяційна) має вигляд

$$F_t = \beta_0 x_{0t} + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + u_t, \qquad (4.7.2)$$

де β_0,β_1,β_2 – невідомі коефіцієнти; $x_{ot}=1=const$ – штучно введена змінна (для зручності розрахунків); u_t – випадкова величина; t – порядковий номер спостереження.

В матричній формі математична модель (4.7.2) має вигляд

$$F = XB + U, \qquad (4.7.3),$$

де $F=\begin{bmatrix} F^0 \\ F_{x1} \\ F_{x2} \\ F^m \end{bmatrix}$; $X=\begin{bmatrix} 1 & x_1^{MT} & x_2^{MT} \\ 1 & x_1^{CT} & x_2^{MT} \\ 1 & x_1^{MT} & x_2^{CT} \\ 1 & x_1^{CT} & x_2^{CT} \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$; $U=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$.

Для розв'язання задачі ми розглядаємо рівняння (4.7.3) як його математичне очікування. Із статистичного співідношення (тут E – математичне очікування; E(U) =0) $E(F)=E(XB+U)=E(XB)$, отримуємо

$$F = XB; \quad X^T F = (X^T X)B;$$

$$(X^T X)^{-1} X^T F = (X^T X)^{-1}(X^T X)B; \; B = (X^T X)^{-1} X^T F, \qquad (4.7.4)$$

де $(X^T X)$ – квадратна матриця, симетрична відносно головної діагоналі; $(X^T X)^{-1}(X^T X)$ – одинична матриця (усі елементи дорівнюють нулю, а діагональні елементи дорівнюють одиниці), яку можна опустити.

Як бачимо, у даному випадку не використовується процес дефаззифікації у традиційному його вигляді і не використовуються функції належності.
Для визначення виходу точки *A* в середині багатомірного простору інформаційного модуля можна також застосувати інтерполяційну апроксимуючу формулу:

$$y^A = y^0 + \sum_{j=1}^{n}(y^j - y^0)\mu_{xj} + [y^m + (n-1)y^0 + \sum_{j=1}^{n} y^j]\prod_{j=1}^{n}\mu_{xj}, \qquad (4.7.5)$$

де $j = 1, 2, \ldots, n$ – порядковий номер вхідних змінних; $X^A = \{x_1^A, x_2^A, \ldots, x_n^A\}$ – вектор вхідних координат досліджуваної точки *A* в інформаційному модулі; $y^0\ \{x_1^{MT}, x_2^{MT}, \ldots, x_n^{MT}\}$ – значення виходу y^0 в опорній точці, у якій кожна координата входу $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ дорівнює найменшому числовому значенню відповідного вхідного терму інформаційного модуля (*молодшому терму*);

$y^m\ \{x_1^{CT}, x_2^{CT}, \ldots, x_n^{CT}\}$ – значення виходу y^m в опорній точці, у якій кожна координата входу $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ дорівнює найбільшому числовому значенню відповідного вхідного терму інформаційного модуля (*старшому терму*); $y^1 = f\{x_1^{CT}, x_2^{MT}, \ldots, x_j^{MT}, \ldots, x_n^{MT}\}$ – числовий вихід для осьової опорної точкитерму по осі x_1; $y^2 = f\{x_1^{MT}, x_2^{CT}, \ldots, x_j^{MT}, \ldots, x_n^{MT}\}$ – числовий вихід для осьової опорної точки-терму по осі x_2; $y^j = f\{x_1^{MT}, x_2^{MT}, \ldots, x_j^{CT}, \ldots, x_n^{MT}\}$ – числовий вихід для осьової опорної точки-терму по осі x_j; $y^n = f\{x_1^{MT}, x_2^{MT}, \ldots, x_j^{MT}, \ldots, x_n^{CT}\}$ – числовий вихід для осьової опорної точки-терму по осі x_n; $\mu_{xj} = (x_j^A - x_j^{MT}) / (x_j^{CT} - x_j^{MT}) = 0 \ldots 1$ – логічна функція упевненості щодо віднесення вхідного значення змінної x_j^A до найближчого старшого терму x_j^{CT} по даній вхідній осі x_j.

Для двохмірного простору вихід для заданої точки A в середині інформаційного модуля рис. 4.7.4 з вхідними координатами x_1^A, x_2^A може бути розрахований за апроксимуючою інтерполяційною формулою:

$$F^A = F^0 + (F_{x1} - F^0)\mu_{x1}^A + (F_{x2} - F^0)\mu_{x2}^A + [F^m + F^0 - (F_{x1} + F_{x2})]\mu_{x1}^A \mu_{x2}^A \qquad (4.7.6).$$

Наведемо приклад використання принципів нечіткої логіки:

На основі теорії однозначних нечітких систем М. В. Турти розглянемо приклад, який наводиться в *Matlab* для пояснення роботи класичної нечіткої системи Л. Заде. Вважаємо, що *чайові F в ресторані* (універсум U^F =0…100 %, лінгвістична змінна «Чайові», терми-числа F^M=0 %; F^C =50 %; F^B =100 %) залежать від (рис. 4.7.5):

- *якості страв* x^1 (універсум U^{x1}=0…100 %; лінгвістична змінна «Страви»; терми-числа $x1^M$=0 %, $x1^C$=50 %, $x1^B$=100 %);

- *якості обслуговування* $x2$ (універсум U^{x2} =0…100 %; лінгвістична змінна «Обсл»; терми-числа x^{2M}=0 %, x^{2C}=50 %, x^{2B}=100 %).

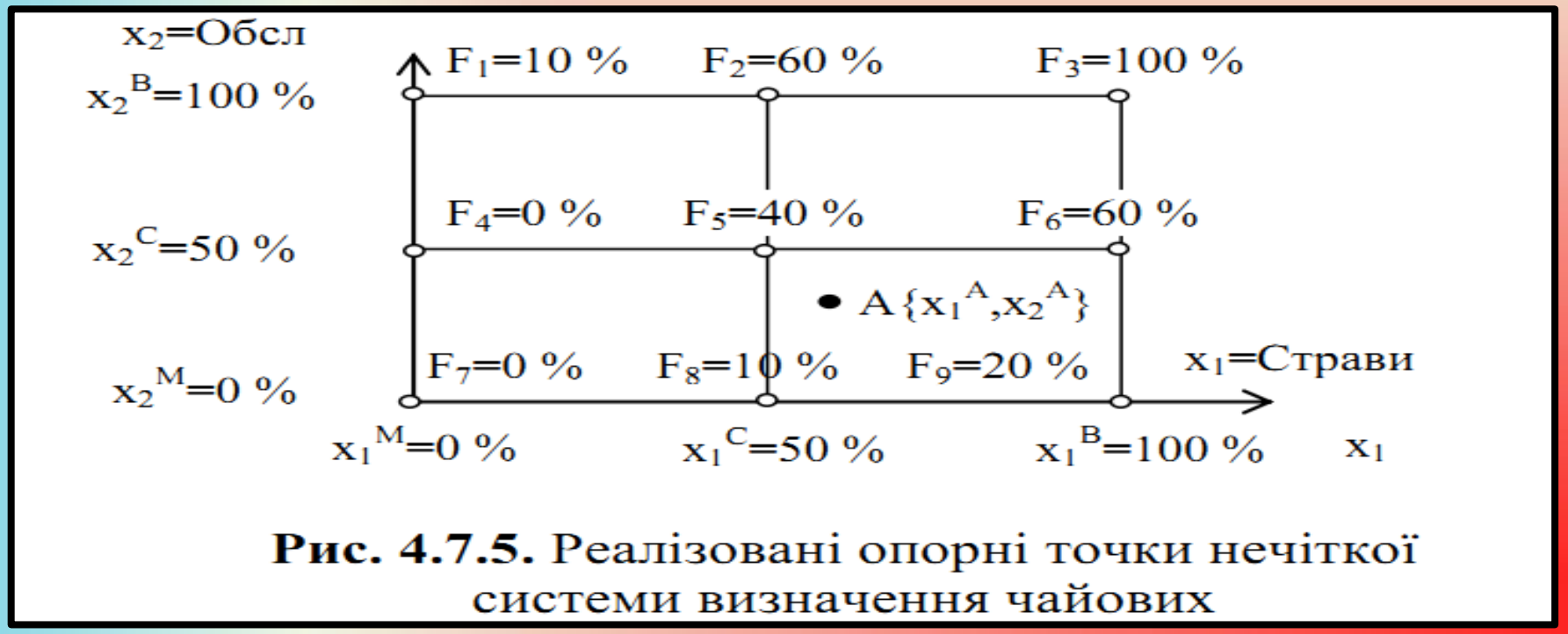


Рис. 4.7.5. Реалізовані опорні точки нечіткої системи визначення чайових

Експерт визначає по двох осях координат (x_1, x_2) терми [«Страви (якість страв)» = (x_1^M, x_1^C, x_1^B); «Обсл (якість обслуговування)» = (x_2^M, x_2^C, x_2^B)], які ділять весь площину ознак (x_1, x_2) на чотири інформаційних модуля прямокутної форми. Точки пересічення термів звуться *опорними точками*: вони позначені на рис. 4.7.5 білими колами. Для всіх опорних точок експерт записує значення чайових F_1 – F_9, керуючись наступними розмірковуваннями:

F_7 = 0 % (тому що якість страв x_1^M=0 % та якість обслуговування x_2^M=0 %);

F_3 = 100 % (тому що якість страв x_1^B=100 % та якість обслуговування x_2^B=100 %);

F_5 = 40 % (тому що точка F_5 знаходиться «посередині» між точками F_7 та F_3). Ці дані суб'єктивно визначаються експертом;

F_9 = 20 % (тому що так суб'єктивно вважає експерт для обслуговування x_1^B=100 % та x_2^M=0 %);

F_8 = 10 % (тому що F_8 знаходиться посередині між точками F_7 та F_9);

F_6 = 60 % (згідно розрахунку, при лінійній зміні значення F від F_9=20 % до F_3=100 %).

F_1 = 10 % (тому що так суб'єктивно вважає експерт для обслуговування x_1^M=0 % та x_2^B=100 %);

F_4 = 10 % (тому що так суб'єктивно вважає експерт для обслуговування x_1^M=0 % та x_2^C=50 %);

F_2 = 60 % (тому що так суб'єктивно вважає експерт при зміні значення F від F_1=10 % до F_3=100 %).

Сукупність отриманих точок складають базу незалежних даних нечіткої системи. Цю базу даних можна відобразити як сукупність незалежних продукційних правил:

- *if* x_1 = 0% *and* x_2 = 0% *then* F = 0%.
- *if* x_1 = 50% *and* x_2 = 0% *then* F =10%.
- *if* x_1 =100% *and* x_2 =100% *then* F =100%.

З інформаційного модуля рис. 4.7.5, обмеженого значеннями вихідної функції (F_5=40 %; F_6=60 %; F_8=10 %; F_9=20 %) ми маємо матрицю спостережень, яка використовується в методі найменших квадратів (МНК) з відомими даними (табл. 4.7.2).

Таблиця 4.7.2

Матриця спостережень одного інформаційного модуля для використання МНК (тут t – порядковий номер спостереження)

t	x_0	x_1	x_2	F
1	1	x_1=50 %	x_2=50 %	F_5=40 %
2	1	x_1=100 %	x_2=50 %	F_6=60 %
3	1	x_1=50 %	x_2=0 %	F_8=10 %
4	1	x_1=100 %	x_2=0 %	F_9=20 %

Лінійна апроксимаційна формула «інформаційного модуля з координатами (x_1=50…100 %; x_2=0…50 %)» має вигляд $F = \beta_0 x_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$, де $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ – невідомі коефіцієнти; $x_o = 1 = const$ – штучно введена змінна (для зручності розрахунків).

Розв'язок матричного рівняння для «інформаційного модуля з координатами (x_1= 50…100 %; x_2=0…50 %)» $F = XB$,

де $F = \begin{bmatrix} F_5 = 40 \\ F_6 = 60 \\ F_8 = 10 \\ F_9 = 20 \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 = 50 & x_2 = 50 \\ 1 & x_1 = 100 & x_2 = 50 \\ 1 & x_1 = 50 & x_2 = 0 \\ 1 & x_1 = 100 & x_2 = 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$;

F, X – вектор вихідних значень та матриця змінних (визначаються по матриці спостережень); B – вектор коефіцієнтів, отримується в MathCAD (або MatLab) за методом найменших квадратів (МНК) у вигляді

$$B = (X^T X)^{-1} X^T F = \begin{bmatrix} -7{,}5 \\ 0{,}3 \\ 0{,}7 \end{bmatrix}.$$

звідки для точки $A\{x_1^A = 60\%;\ x_2^A = 30\%\}$ розрахунок дає значення

$$F = \beta_0 x_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = -7{,}5 + 0{,}3x_1 + 0{,}7x_2 = -7{,}5 + 0{,}3 \cdot 60 + 0{,}7 \cdot 30 = 31{,}5\%.$$

Як бачимо, у даному випадку не використовується процес дефаззифікації у традиційному його вигляді. а функції належності навіть не згадуються.

2. Функції належності.

Системи нечіткого висновку призначені для перетворення значень вхідних змінних процесу управління у вихідні змінні на основі використання нечітких правил. Для цього системи нечіткого висновку мають містити базу правил нечітких продукцій і реалізовувати нечіткий висновок на основі посилань або умов, представлених у формі нечітких лінгвістичних висловлювань.

Для отримання висновків у системах нечіткого логічного рішення запропоновані декілька алгоритмів, які базуються на розподілі процесу висновку на ряд послідовних етанів. Таким чином можливо не тільки досягнути певної систематизації розглянутих понять нечіткої логіки, а й отримати деяку загальну схему, на базі якої можна створювати індивідуальні алгоритми нечіткого висновку.

Основними етапами *нечіткого висновку* є такі дії (рис. 1):

1. *Формування бази правил систем нечіткого висновку.*
2. *Фазифікація вхідних змінних.*
3. *Агрегування підумов у нечітких правилах.*
4. *Активізація або композиція висновків у нечітких правилах.*
5. *Акумулювання висновків нечітких правил продукцій.*



Рис. 1. Діаграма дій за формуванням висновку

2.1. Формування бази правил систем нечіткого висновку

База правил систем нечіткого висновку призначена для формального наведення емпіричних знань або знань експертів у тій чи іншій проблемній сфері. *У системах нечіткого висновку використовуються правила нечітких продукцій, у яких умови і висновки сформульовані в термінах нечітких лінгвістичних висловлювань. Сукупність таких правил будемо далі називати базами нечітких знань — нечітких продукцій*.

Розглянемо правила нечітких продукцій, що в максимальному наближенні відповідають алгоритму висновку Мамдані, який найбільш широко практично застосовується для систем нечіткого моделювання.

Розглянемо формування бази нечітких правил. *База нечітких правил* є кінцевою множиною правил нечітких продукцій, погоджених шодо використаних у них лінгвістичних змінних. Найбільш часто база правил наводиться у формі структурованого тексту:

ПРАВИЛО_1: ЯКЩО «Умова_1» ТО «Висновок_1» (F_1)
ПРАВИЛО_2: ЯКЩО «Умова_2» ТО «Висновок_2» (F_2)
ПРАВИЛО_*n*: ЯКЩО «Умова_ *m*» ТО «Висновок_ *m*» (F_n)
або в еквівалентній формі:

RULE_1: IF Condition_1 THEN Conclusion_1(F_1)
RULE_2: IF Condition_2 THEN Conclusion_2 (F_2)
…
…
RULE_n: IF Condition_n THEN Conclusions (F_n)

Через $F_i\ (i \in \{1, 2, \ldots, n\})$ позначені *коефіцієнти визначеності* або *вагові коефіцієнти* відповідних правил. Ці коефіцієнти можуть набувати значень з інтервалу [0. 1]. У випадку, якщо ці вагові коефіцієнти відсутні, зручно вважати, що їх значення на рівні 1.

Погодженість правил щодо використаних лінгвістичних змінних означає, що умови і висновки правил сформовані нечіткими лінгвістичними висловлюваннями, і для кожного з нечітких висловлювань визначені функції належності терм-множини для кожної з лінгвістичних змінних.

2.2 Фазифікація

Уконтексті нечіткої логіки під фазифікацією розуміють не тільки окремий етап виконання нечіткого висновку, але й власне *процес або процедуру знаходження значень функцій належності нечітких множин (термів) на основі звичайних (не нечітких) вхідних даних*. Фазифікацію ще називають *вступом до нечіткості*.

Метою етапу фазифікації є встановлення відповідності між конкретним (звичайно — числовим) значенням окремої базової вхідної змінної (параметра) системи нечіткого висновку і значенням функції належності відповідного їй терму вхідної лінгвістичної змінної. Після завершення цього етапу для всіх вхідних змінних мають бути визначені конкретні значення функцій належності за кожним з лінгвістичних термів, які використовуються в підумовах бази правил системи нечіткого висновку.

Формально процедура фазифікації виконується в такий спосіб. До початку цього етапу передбачаються відомими конкретні значення всіх вхідних змінних системи нечіткого висновку, тобто множина значень $U_i = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$. У загальному випадку кожне $u_i \in U_i$, де U_i ,- універсум лінгвістичної змінної β_i. Ці значення можуть бути отримані або від датчиків, або деяким іншим зовнішнім стосовно системи нечіткого висновку способом.

Далі розглядається кожна з підумов виду «$\beta_i \in a_l$» правил системи нечіткого висновку, де a_l — деякий терм із відомою функцією належності $\mu(u)$. У цьому разі значення u_i використовується як аргумент $\mu(u)$, тим самим знаходиться кількісне значення $b_i'=\mu(u)$. Це значення і є результатом фазифікації підумови «$\beta_i \in a_l$».

Етап фазифікації вважається закінченим, коли будуть знайдені всі значення $b_i'=\mu(c_i)$ для кожної з підумов усіх правил, що входять до розглянутої бази правил системи нечіткого висновку. Цю множину значень позначимо через $B=\{b_i'\}$. У випадку, коли деякий терм a_i- лінгвістичної змінної β_i-, не присутній у жодному з нечітких висловлювань (є нульовим), то відповідне йому значення функції належності не використовується в процесі фазифікації.

Якщо в деякій підумові зустрічається терм із модифікатором, то процедура фазифікації виконується аналогічним чином відповідно до функції належності терма після виконання операції, відповідної до такого модифікатора.

Приклад 1

Для ілюстрації виконання цього етапу розглянемо процес фазифікації трьох нечітких висловлювань: «напруга є низька», «напруга є середня», «напруга є висока» для вхідної лінгвістичної змінної β_1 (напруга джерела живлення) універсуму U. Їм відповідають нечіткі висловлювання першого виду: «$\beta_1 \in \alpha_1$», «$\beta_1 \in \alpha_2$», «$\beta_1 \in \alpha_3$».

Припустимо, що поточна напруга дорівнює 55 В, тобто u=55 В.

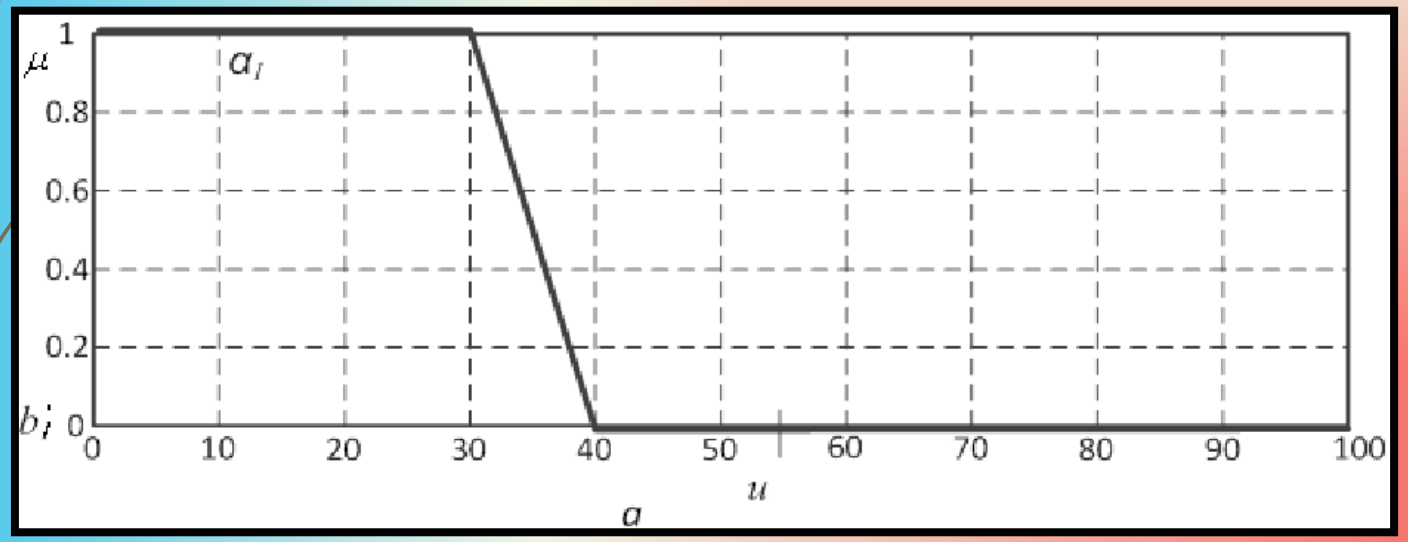


Рис. 1. Приклад фазифікації вхідної лінгвістичної змінної *«напруга»* для трьох нечітких висловлювань: *а – «напруга є низька»; б – «напруга є середня»; б – «напруга є висока»*

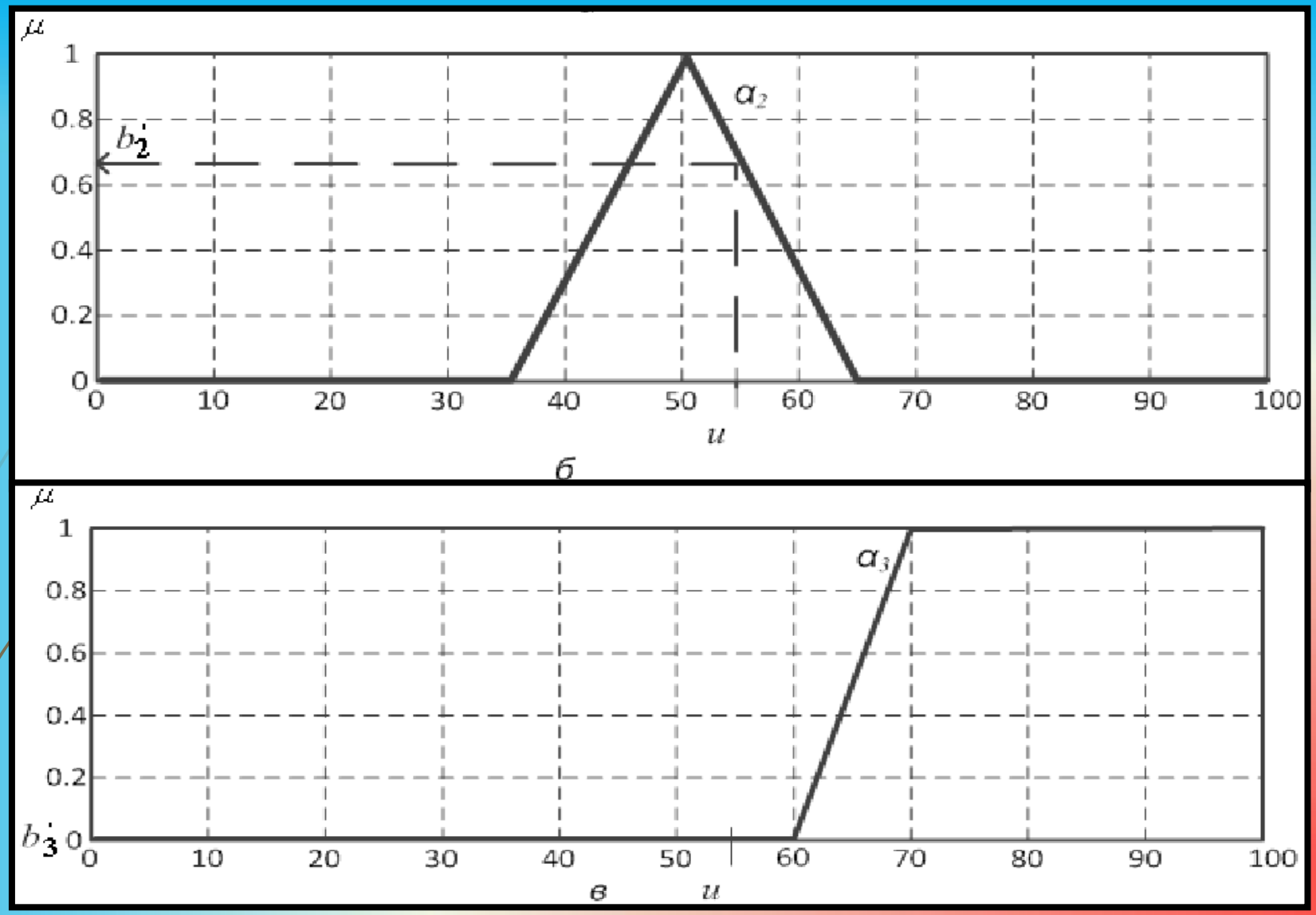


Рис. 2. Приклад фазифікації вхідної лінгвістичної змінної *«напруга»* для трьох нечітких висловлювань: *а – «напруга є низька»; б – «напруга є середня»; б – «напруга є висока»*

Фазифікація першого нечіткого висловлювання дає в результаті число 0, яке означає його ступінь істинності і отримане підстановкою значення $u=55$ В у якості аргументу функції належності терма (рис. 2, *а*). Фазифікація другого нечіткого висловлювання дає в результаті число 0,67 (наближене значення), яке визначає його ступінь істинності та отримане підстановкою значення $u=55$ В. у якості аргументу функції належності терма a_2 (рис. 2, *б*). Фазифікація третього нечіткого висловлювання дає в результаті число 0, яке визначає його ступінь істинності та отримане підстановкою значення $u=55$ В.у якості аргументу функції належності терма a_3 (рис. 2, *в*).

2.3. Агрегування (Aggregation)

Агрегування *є процедурою визначення ступеня істинності умов за кожним із правил системи нечіткого висновку.*

Формально процедура агрегування виконується в такий спосіб. До початку цього етану передбачаються відомими значення істинності всіх підумов системи нечіткого висновку, тобто множина значень $B=\{b_i'\}$. Далі розглядається кожна з умов правил системи нечіткого висновку. Якщо умова правила є нечітким висловлюванням, то ступінь його істинності дорівнює відповідному значенню b_i'.

Якщо ж умова складається з декількох підумов виду, причому лінгвістичні змінні в підумовах попарно не ідентичні одна одній, то визначається ступінь істинності складного висловлювання на основі відомих значень істинності підумов. У цьому разі для визначення результату дії сполучника «І» може бути використана операція нечіткої кон'юнкції, а для визначення результату дії сполучника «АБО» може бути використана операція нечіткої диз'юнкції. У цьому разі значення b_i' використовуються як аргументи відповідних логічних операцій. Саме так знаходяться кількісні значення істинності всіх умов правил системи нечіткого висновку.

Приклад 2

Для ілюстрації виконання цього етапу розглянемо приклад процесу агрегування двох нечітких висловлювань: «струм є середній» І «напруга є висока» і «струм є середній» АБО «напруга є висока» для вхідної лінгвістичної змінної

β_1 – струм $j_i \in J_i$, де J_i – універсум лінгвістичної змінної β_1 та β_2 – напруга $u_i \in U_i$, де U_i – універсум лінгвістичної змінної β_2.

Припустимо, що поточний струм дорівнює 55 А, тобто j_1=55 А, а напруга дорівнює u_2=70 В. Тоді агрегування першого нечіткого висловлювання з використанням операції нечіткої кон'юнкції (*min*) (рис. 3) дає в результаті число b_1''=0,67 (наближене значення), яке визначає його ступінь істинності і виходить як мінімальне зі значень 0,67 і 0,8 (рис. 3, *а*). Агрегування другого нечіткого висловлювання з використанням операції нечіткої диз'юнкції (*max*) дає в результаті число b_1''=0,8, яке визначає його ступінь істинності й виходить як максимальне зі значень 0,67 і 0,8 (рис. 3, б).

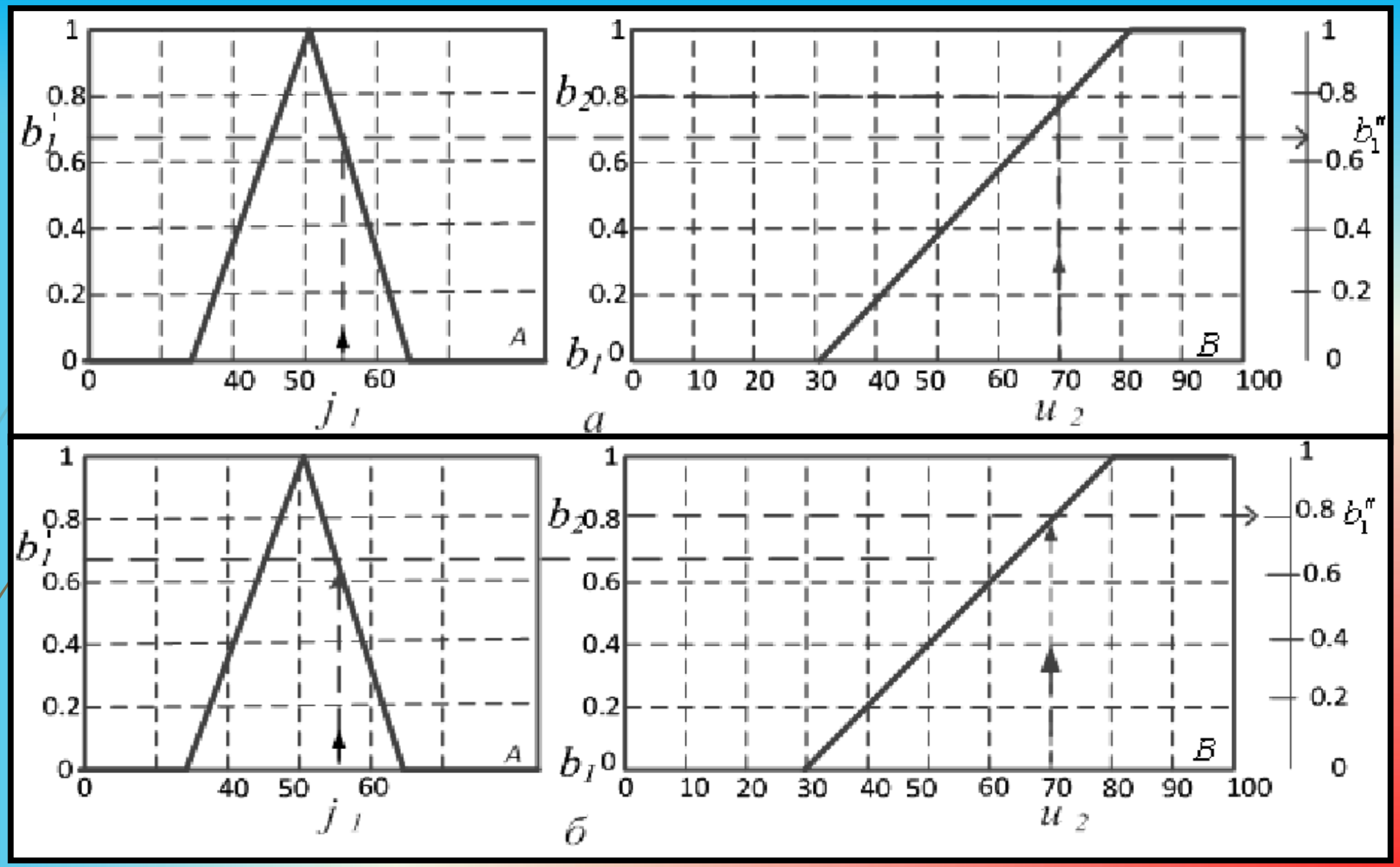


Рис. 3. Приклади агрегування підумов для двох нечітких висловлювань: *а — «струм є середній»* І *«напруга є висока»; б — «струм є середній»* АБО *«напруга є висока»*

2.4. Активація (Activation) - імплікація

Активація *в системах нечіткого висновку є процедурою або процесом знаходження ступеня істинності кожного з висновків нечітких правил.*

У випадку формування бази правил системи нечіткого висновку задаються вагові коефіцієнти F_i для кожного правила (за замовчуванням передбачається, якщо ваговий коефіцієнт не заданий явно, його значення на рівні **1**).

Формально процедура активації виконується в такий спосіб. До початку цього етану передбачаються відомими значення істинності всіх умов системи нечіткого висновку, тобто множина значень $B''=\{b_1'', b_2'',..., b_n''»\}$ і значення вагових коефіцієнтів для кожного правила. Далі розглядається кожен з висновків правил бази знань. Якщо висновок правила є нечітким висловлюванням, то ступінь його істинності дорівнює алгебраїчному добутку відповідного значення b_i'' на ваговий коефіцієнт F_j.

Якщо ж висновок складається з декількох підвисновків виду 3, причому лінгвістичні змінні в підвисновках попарно не рівні один одному, то ступінь істинності кожного з підвисновків дорівнює алгебраїчному добутку відповідного значення b_i" на ваговий коефіцієнт F_j. Таким чином, знаходяться усі значення ступенів істинності підвисновків для кожного із правил, що входять в базу правил системи нечіткого висновку. Цю множину значень позначимо через C={c/, *C2, Cq}₉* де q — загальна кількість підвисновків у базі правил.

Після знаходження множини $C=\{c_1, c_2, \ldots, c_q\}$ визначаються функції належності кожного з підвисновків для розглянутих вихідних лінгвістичних змінних. З цією метою можна використовувати один з методів, що є модифікацією того або іншого методу нечіткої композиції:

- **Min**-активація: $\mu'(y)= \min\{c_i, \mu(y)\}$;
- Prod- активація: $\mu'(y)= c_i \cdot \mu(y)$;
- Average- активація: $\mu'(y)= 0.5(c_i + \mu(y))$,

де $\mu(y)$ — функція належності терма, який є значенням деякої вихідної змінної ω_j, заданої на універсумі $\mathbf{Y}$.

Етап активації вважається закінченим, коли для кожної з вихідних лінгвістичних змінних, що входять в окремі підвисновки нечітких правил, будуть визначені функції належності нечітких множин їх значень, тобто сукупність нечітких множин: c_1, c_2, …, c_q, де q - загальна кількість підвисновків у базі правил системи нечіткого висновку.

Приклад 3

Дія ілюстрації виконання цього етапу розглянемо ***приклад*** *процесу активації висновку в наступному нечіткому правилі:*

ЯКЩО *«струм є середній»*, ТО *«кут є великий»*.

Вхідною лінгвістичною змінною в цьому правилі є β_1 *— струм, а вихідною змінною є* β_2 *— кут вмикання.*

Припустимо, що поточний струм у колі має значення 55 А, тобто j_1=55 (рис. 4).

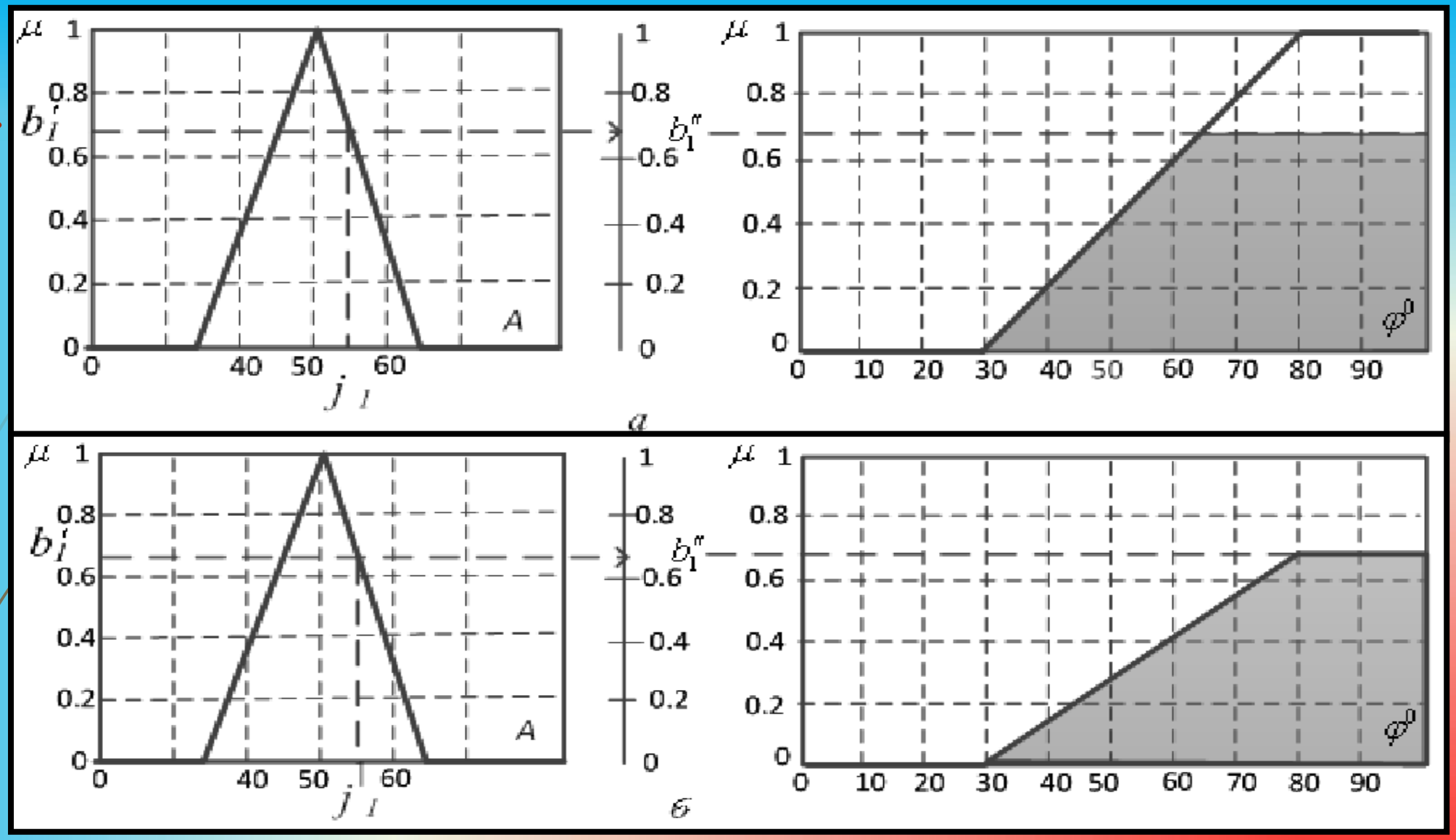


Рис. 4. Приклад активації висновку:
а - методом Min-активізації; *б* - методом Prod-активізації

Оскільки агрегування умови цього правила дає в результаті $b_1''=0{,}67$, а ваговий коефіцієнт дорівнює 1 (за замовчуванням), то значення 0,67 буде використовуватися як c_1 для одержання результату активізації. Результат, отриманий методом min—активізації, зображений на рис. 4, *а* сірим кольором; результат, отриманий методом prod—активізації, зображений на рис. 4, *б* сірим кольором.

2.5. Акумуляція (Accumulation)

Акумуляція *або акумулювання в системах нечіткого висновку є процедурою або процесом знаходження функції належності для кожної з вихідних лінгвістичних змінних множин* $W=\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s\}$.

Мета акумуляції полягає в тому, щоб об'єднати або акумулювати всі ступені істинності висновків (підвисновків) для одержання функції належності кожної з вихідних змінних. Причина необхідності виконання цього етапу полягає в тому, що підвисновки, які відносяться до однієї і тієї ж вихідної лінгвістичної змінної, належать різним правилам системи нечіткого висновку.

Формально процедура акумуляції виконується в такий спосіб. До початку цього етапу передбачаються відомими значення істинності всіх висновків для кожного із правил R_k, що входять у розглянуту базу правил P системи нечіткого висновку, у формі сукупності нечітких множин:

$$C_1, C_2, \ldots, C_q;$$

де q - загальна кількість підвисновків у базі правил. Далі послідовно розглядається кожна з вихідних лінгвістичних змінних $\omega_j \in W$ та нечіткі множини, що відносяться до неї:

$$C_{j1}, C_{j2}, \ldots, C_{jq}$$

Результат акумуляції для вихідної лінгвістичної змінної $ц$ визначається як об'єднання нечітких множин $C_{j1}, C_{j2}, \ldots, C_{jq}$ за однією з формул об'єднання, що висвітлені раніше.

Етап акумуляції вважається закінченим, коли для кожної з вихідних лінгвістичних змінних будуть визначені підсумкові функції належності нечітких множин їх значень, тобто сукупність нечітких множин:

$$C_1', C_2', \ldots, C_s',$$

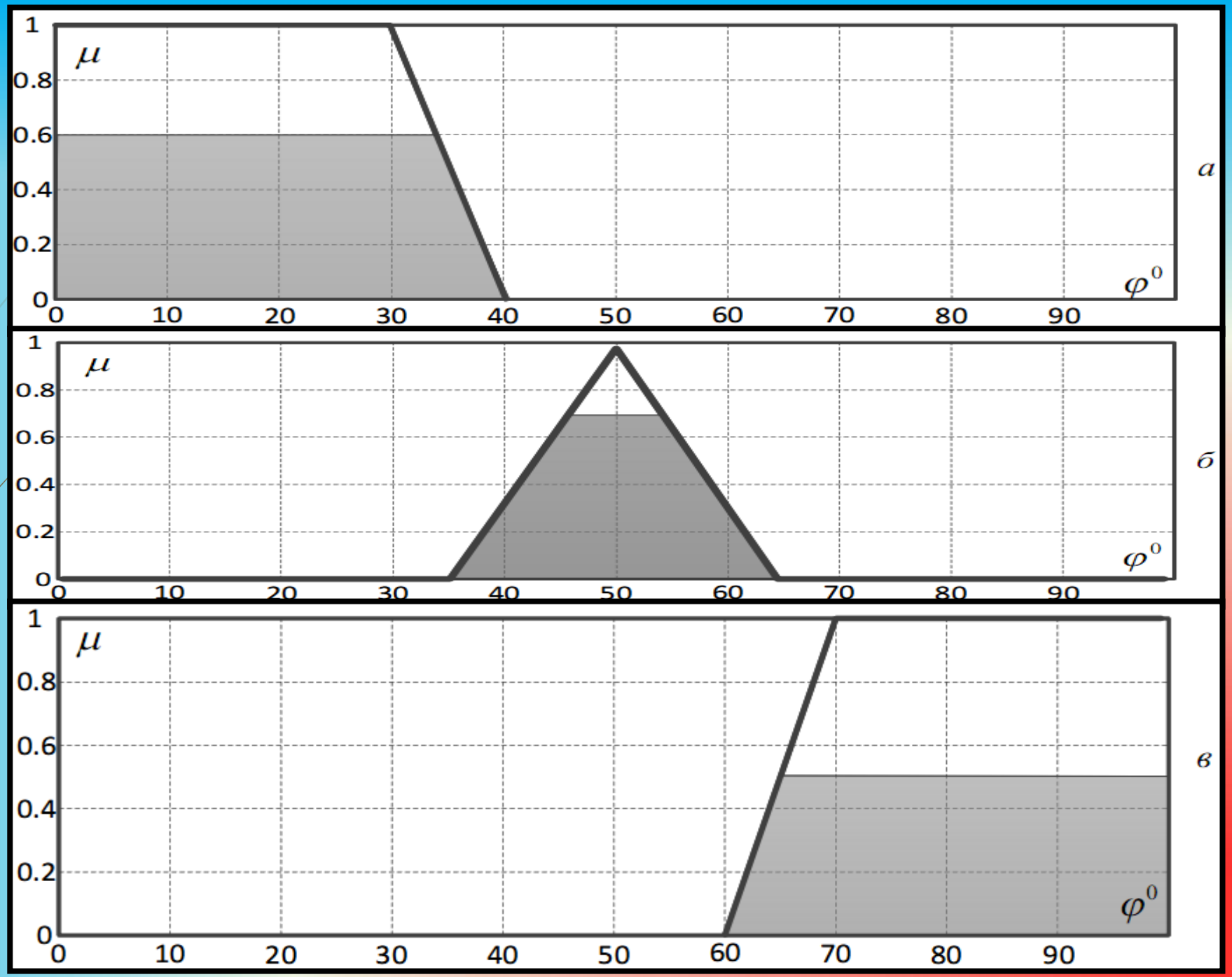
де S — загальна кількість вихідних лінгвістичних змінних у базі правил системи нечіткого висновку.

Приклад 4

Для ілюстрації виконання цього етапу розглянемо приклад процесу акумуляції висновків для трьох нечітких множин C_{11}, C_{12}, C_{13}, *отриманих у результаті виконання процедури активізації для вихідної лінгвістичної змінної «кут» вмикання тиристора у деякій системі нечіткого висновку.*

Припустимо, що функції належності цих нечітких множин зображені на рис. 5, *а, б, в* відповідно.

Акумуляція цих функцій належності методом *max*—об'єднання нечітких множин C_{11}, C_{12}, C_{13} дає змогу одержати в результаті функцію належності вихідної лінгвістичної змінної *«кут» вмикання тиристора,* яка представлена на рис. 5, *г.* Контуром затемненої фігури і є функція належності, яка описує нечітку множину C_1 вихідної лінгвістичної змінної ω_1.


μ
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
φ⁰
а
μ
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
φ⁰
б
μ
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
φ⁰
в

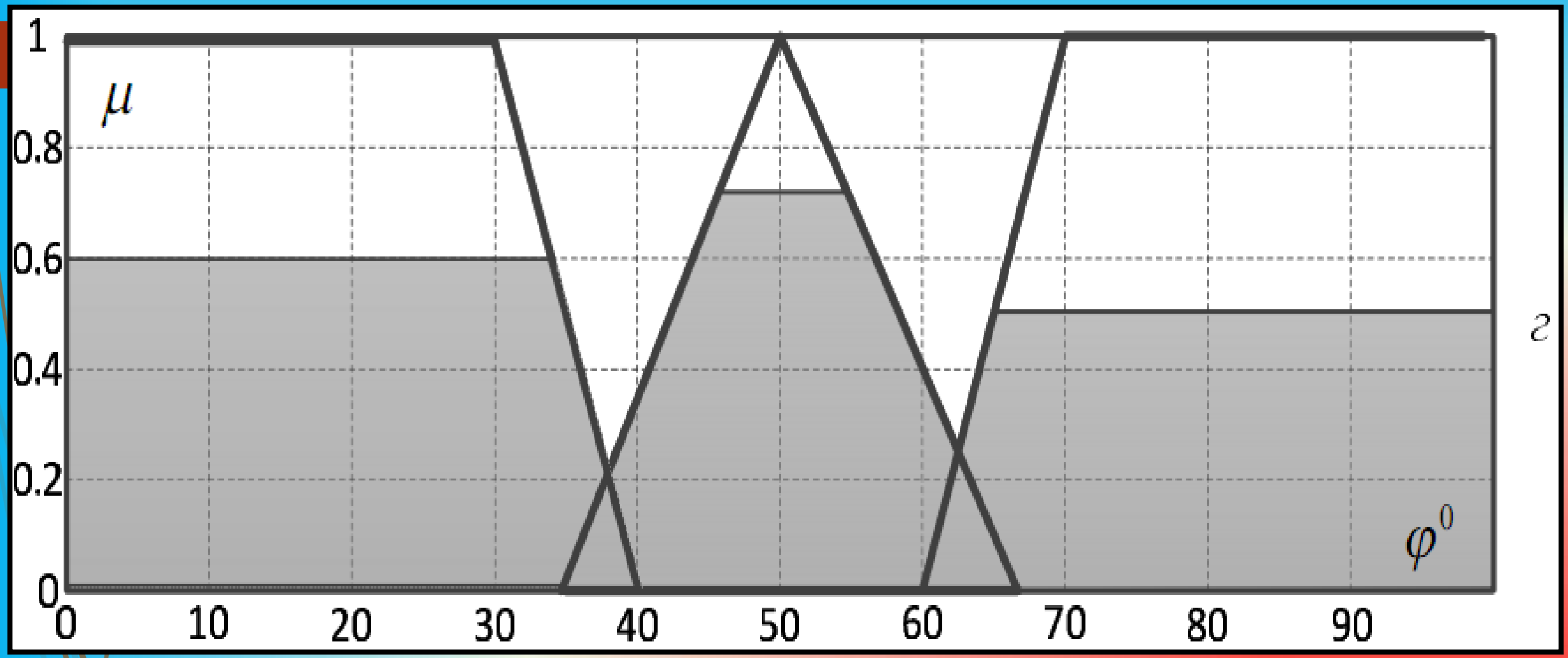


Рис. 5. Приклад акумуляції висновку для вихідної лінгвістичної змінної *«кут» вмикання тиристора: а* - нечітка множина C_{11}; *б* — нечітка множина C_{12}; *в* - нечітка множина C_{13}; *г* - max-об'єднання нечітких множин C_{11}, C_{12}, C_{13}

Приклад 5

Розглянемо формування моделі акумуляції висновку у разі прийняття рішення щодо визначення чайових ***tip*** *за двома вхідними параметрами: сервіс обслуговування* ***service*** *та якість їжі* ***food*** *— за обід у ресторані.*

Вхідні параметри *сервіс* та *якість їжі* визначимо лінгвістичними змінними ***service*** та ***food*** і представимо гіпотетично нечіткими множинами, опишемо їх функціями належності в рейтинговому інтервалі від 0 до 10. Вихідну лінгвістичну змінну ***tip*** представимо гіпотетично нечіткими множинами, опишемо їх функціями належності в рейтинговому інтервалі від 0 до 30 %.

1. Сформуємо нечітку терм-множину вхідної лінгвістичної змінної гаусовими функціями належності ***service {poor, good, excellent}***

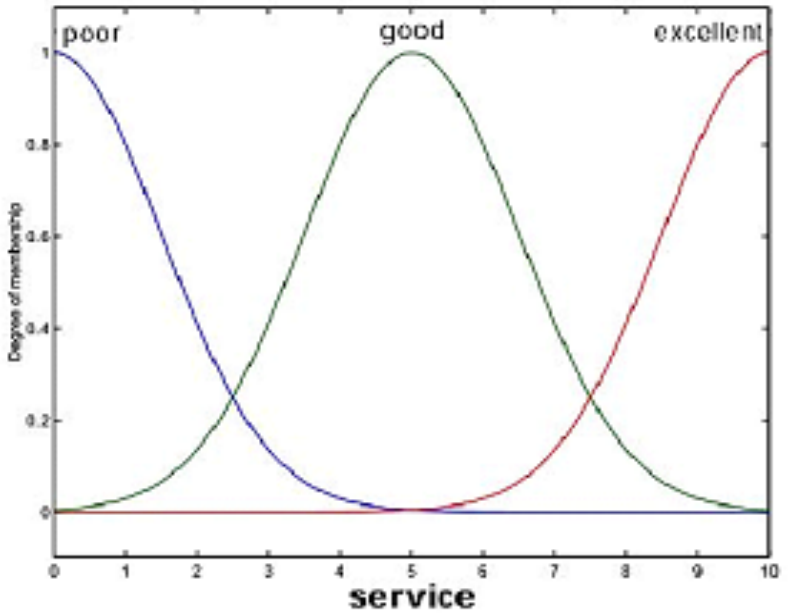


Рис. 6. Терм—множина змінної ***service***

2. Сформуємо нечітку терм—множину вхідної лінгвістичної змінної Z та S функціями належності *food {rancid, delicious}*

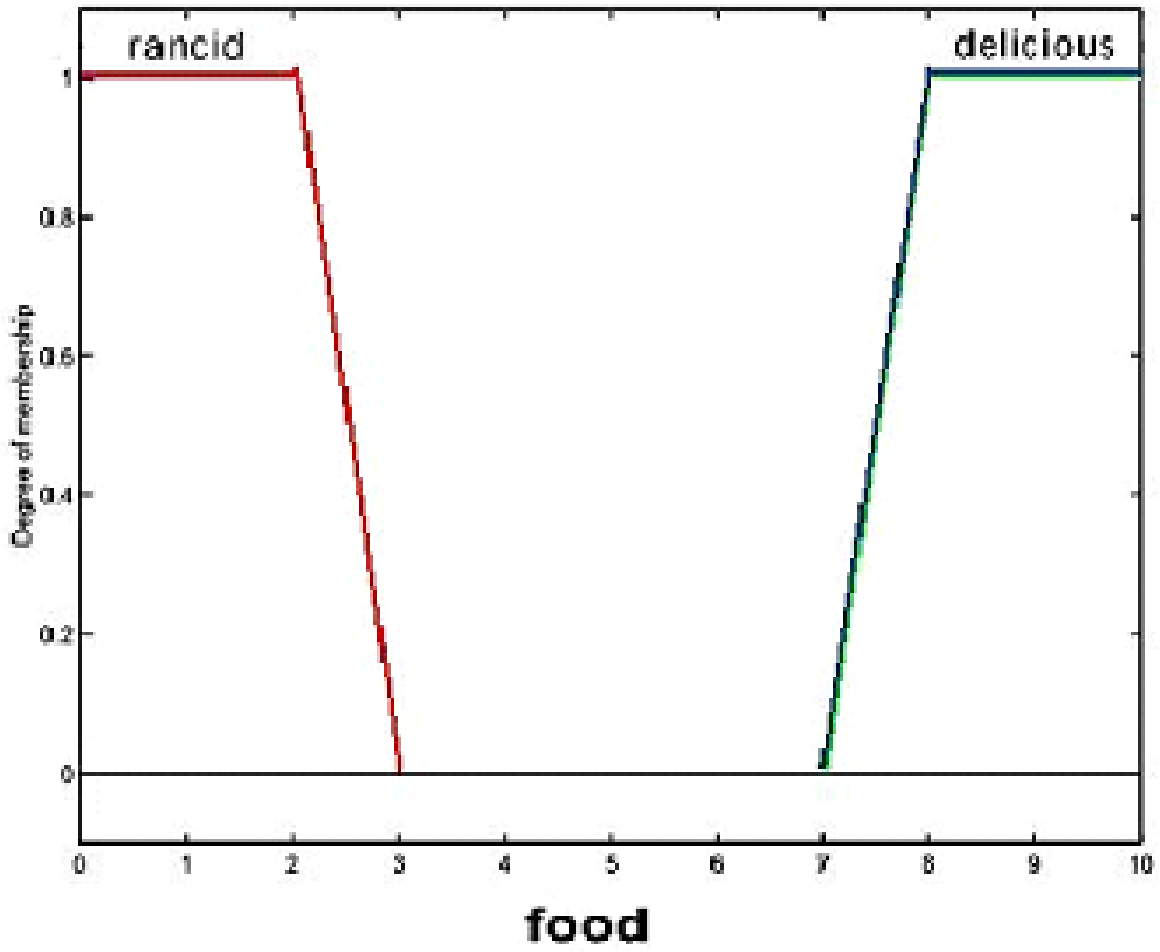


Рис. 7. Терм—множина змінної **food**

3. Сформуємо нечітку терм—множину вихідної лінгвістичної ***tip {cheap, average, generous}*** трикутними функціями належності.

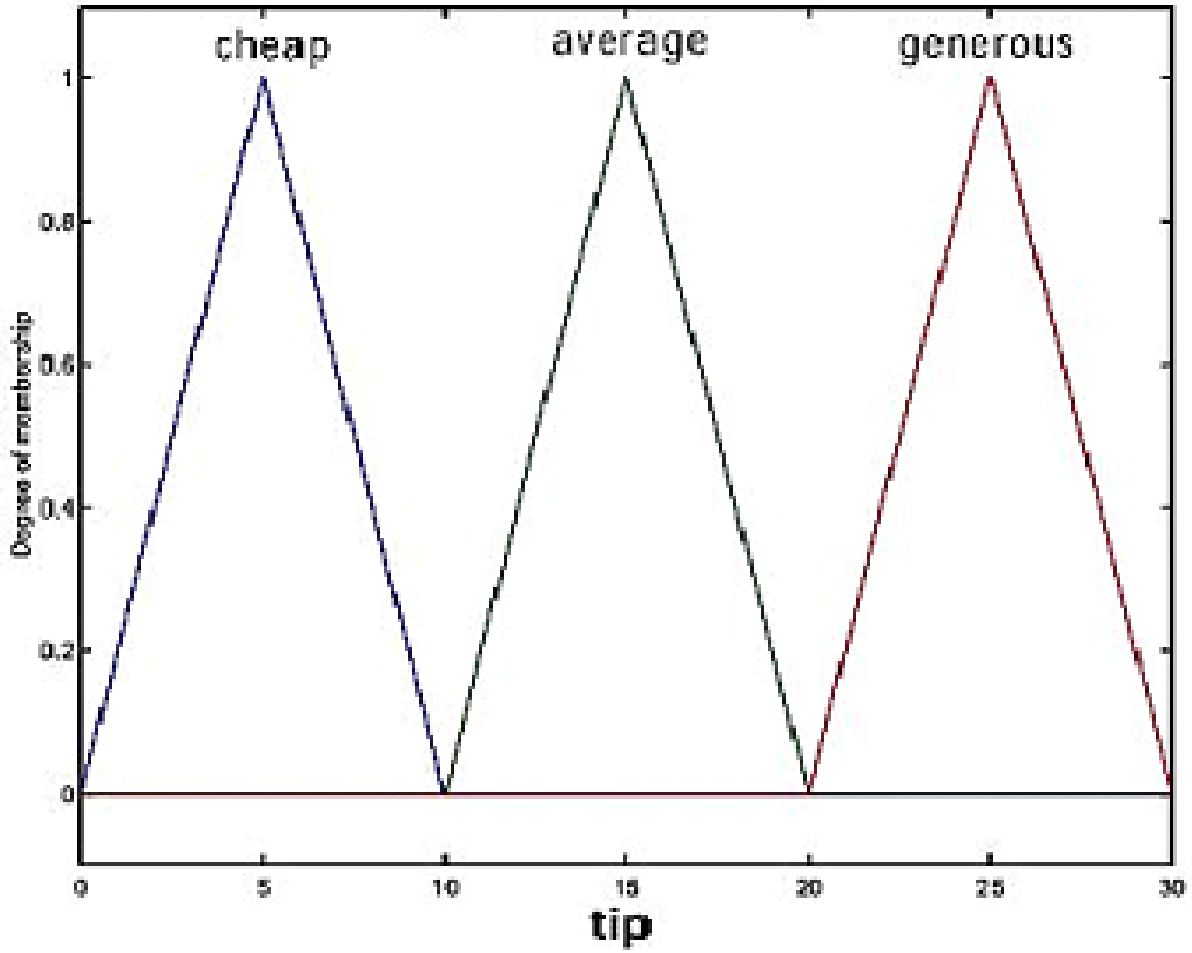


Рис. 8. Терм—множина змінної ***tip***

4.Визначимо правила прийняття рішення щодо чайових у використання однієї лінгвістичної змінної *service.*

1. If service is poor, then tip is cheap

2. If service is good, then tip is average

3. If service is excellent, then tip is generous

Доповнення бази правил за другою лінгвістичною змінною *food*

4. If food is rancid, then tip is cheap

5. If food is delicious, then tip is generous

Проведемо оптимізацію правил бази знань.

1. If service is poor or the food is rancid, then tip is cheap

2. If service is good, then tip is average

3. If service is excellent or food is delicious, then tip is generous

5. Представимо структуру нечіткого логічного рішення графічно

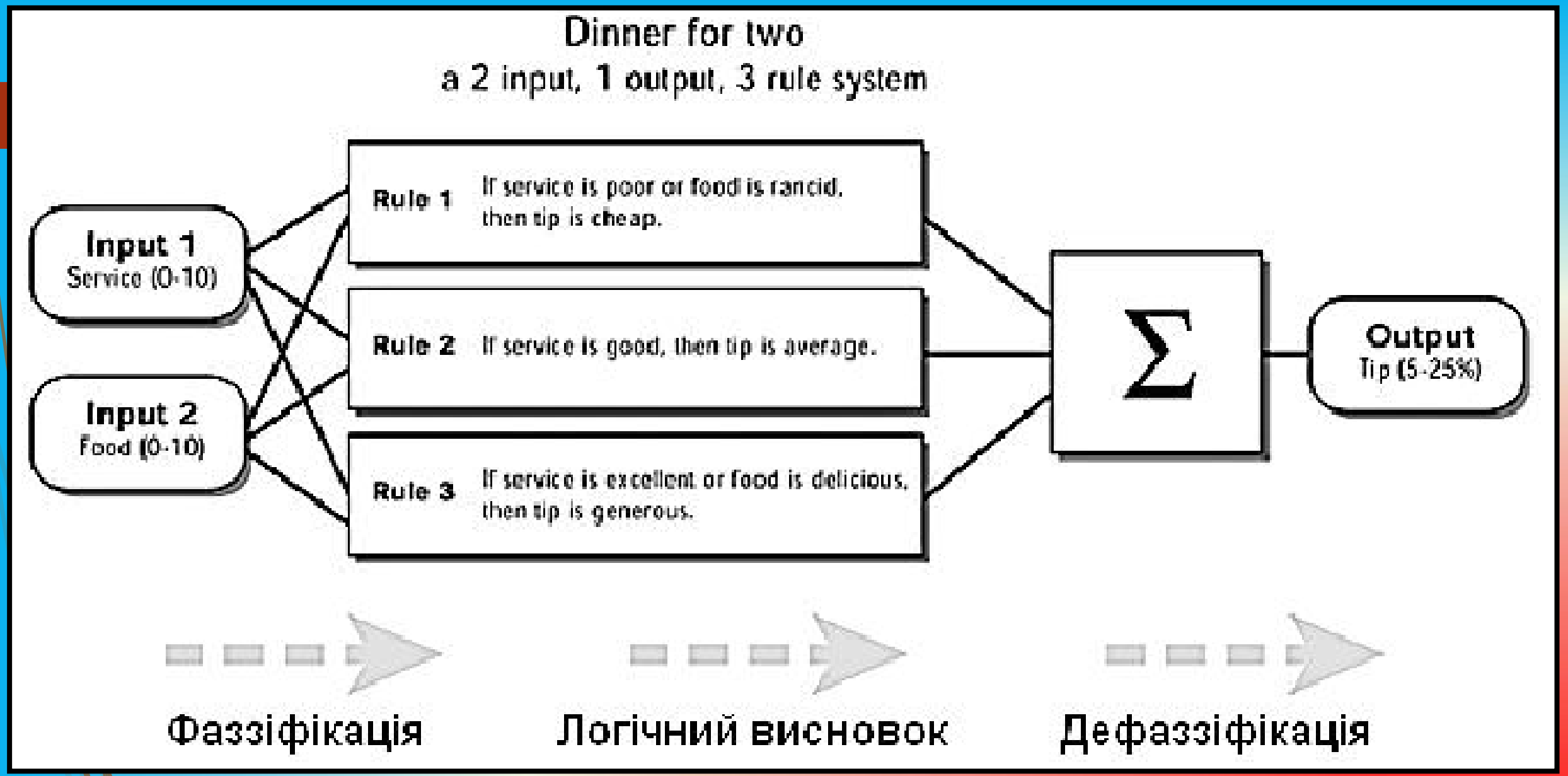


Рис. 9. Структура нечіткого логічного рішення

6. Виконаємо нечіткий логічний висновок за алгоритмом

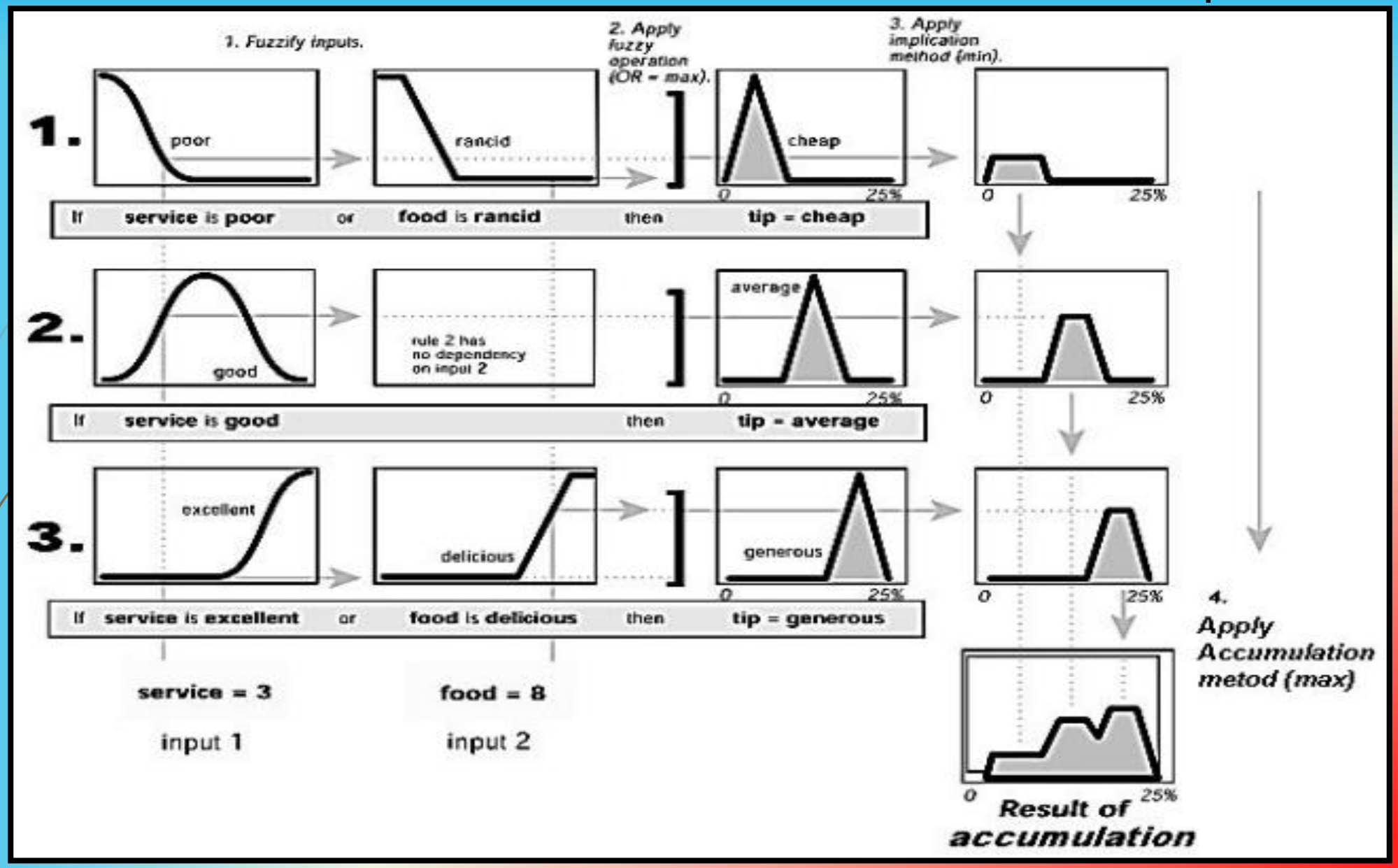


Рис. 10. Алгоритм логічного висновку

2.6. Дефазифікація нечіткого логічного висновку

Дефазифікація (defuzziflcation) в системах нечіткого висновку є процедурою або процесом знаходження реального фізичного (не нечіткого) значення для кожної з вихідних лінгвістичних змінних множини $W=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_s\}$

Мета дефазифікації полягає в тому, щоб, використовуючи результати акумуляції всіх вихідних лінгвістичних змінних, одержати звичайне кількісне значення (crisp value) кожної з вихідних змінних, тобто сигнал управління або рішення щодо управління, яке може бути використане спеціальними пристроями, зовнішніми по відношенню до системи нечіткого висновку.

У сучасних системах управління пристрої та механізми здатні сприймати традиційні команди у формі кількісних значень відповідних сигналів управління. Саме з цієї причини необхідно перетворити нечіткі множини в деякі конкретні значення змінних. Тому дефазифікацію називають також приведенням до чіткості.

Формально процедура дефазифікації виконується в такий спосіб. До початку цього етану передбачаються відомими функції належності всіх вихідних лінгвістичних змінних у формі нечітких множин: $C_1', C_2', \ldots, C_s'$: де s — загальна кількість вихідних лінгвістичних змінних у базі правил системи нечіткого висновку. Далі послідовно розглядаються кожна з вихідних лінгвістичних змінних $\omega_j \in W$ і нечітка множина, що відноситься до неї C_j'. Результат дефазифікації для вихідної лінгвістичної змінної ω_j визначається у вигляді кількісного значення $y_j \in R$, одержаного за однією з математичних формул.

Етап дефазифікації вважається закінченим, коли для кожної з вихідних лінгвістичних змінних будуть визначені підсумкові кількісні значення у формі деякого дійсного числа, тобто у вигляді $y_1, y_2, \ldots, y_s$, де s — загальна кількість вихідних лінгвістичних змінних у базі правил системи нечіткого висновку.

Для виконання числових розрахунків на етані дефазифікації можуть бути використані такі основні математичні методи дефазифікації: *центру ваги, центру ваги для одноточкових множин, центру площі, лівого модального значення, правого модального значення.*

Метод центру ваги

Центр ваги (Cog, COG, Centre of Gravity) або центроїд площі розраховується за формулою:

$$y = \frac{\int_{Min}^{Max} x \cdot \mu(x) dx}{\int_{Min}^{Max} \mu(x) dx}$$

У формулі використовуються такі позначення: y - результат дефазифікації; x - змінна, що відповідає вихідній лінгвістичній змінній ω; $\mu(x)$ — функція належності нечіткої множини, що відповідає вихідній змінній ω після етапу акумуляції; *Min* і *Max* — ліва й права точки інтервалу носія нечіткої множини вихідної змінної ω.

У випадку дефазифікації методом центру ваги звичайне (не нечітке) значення вихідної змінної дорівнює абсцисі центру ваги плоскої фігури, обмеженої графіком кривої функції належності відповідної вихідної змінної.

Графічна інтерпретація процедури дефазифікації методом центру ваги функції належності вихідної лінгвістичної змінної *«кут» вмикання тиристора* зображено на рис. 11. У цьому випадку $y_1 = 37^0$ (приблизне значення). Це значення є точкою рівноваги однорідної плоскої фігури, обмеженої ламаною кривою функції належності вихідної лінгвістичної змінної та віссю абсцис.

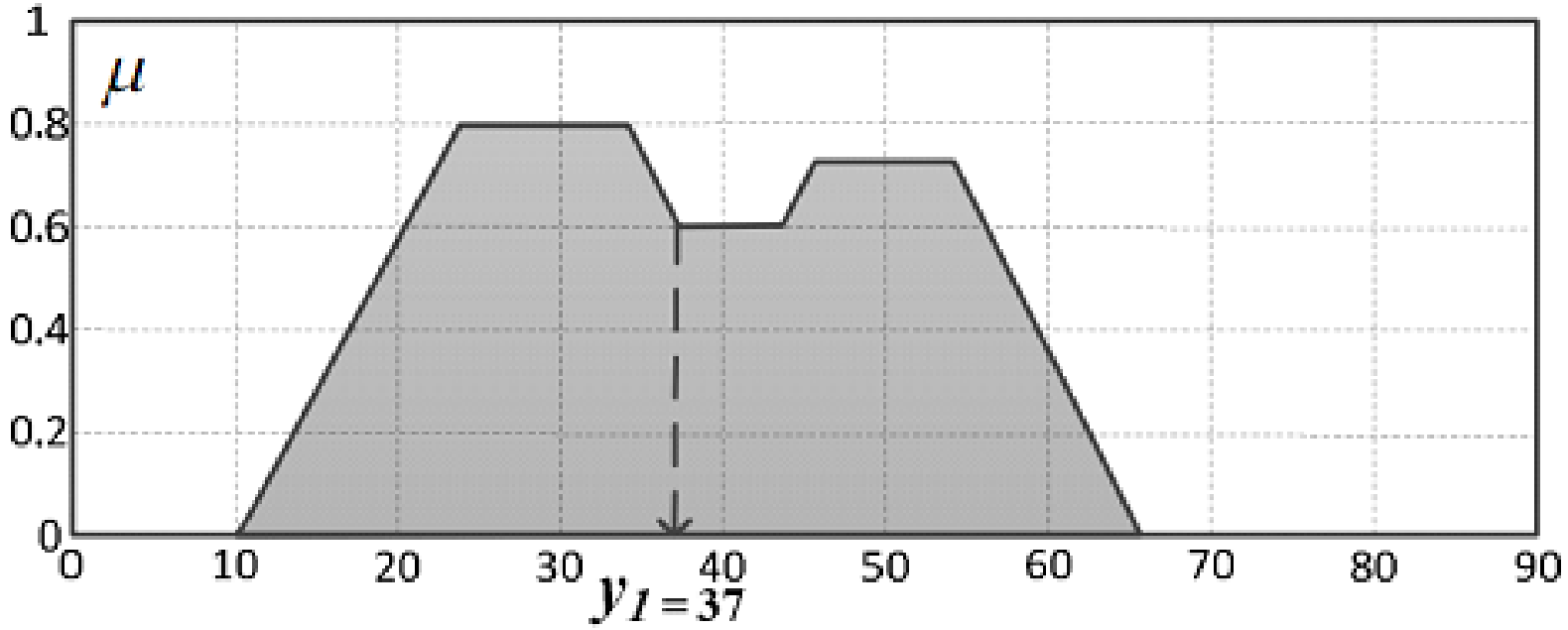


Рис. 11. Дефазифікація вихідної лінгвістичної змінної *«кут» вмикання тиристора* методом центру ваги

Метод центру ваги для одноточкових множин

Центр ваги (COGS, Centre of Gravity for Singletons) для одноточкових множин розраховується за формулою:

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \mu(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mu(x_i)},$$

де n — число одноточкових (одноелементних) нечітких множин, кожне з яких характеризує єдине значення розглянутої вихідної лінгвістичної змінної.

Графічна інтерпретація процедури дефазифікації методом центру ваги для одноточкових множин функції належності вихідної лінгвістичної змінної *«кут» вмикання тиристора* зображено на рис. 12. У цьому випадку приблизно y_1=41°.

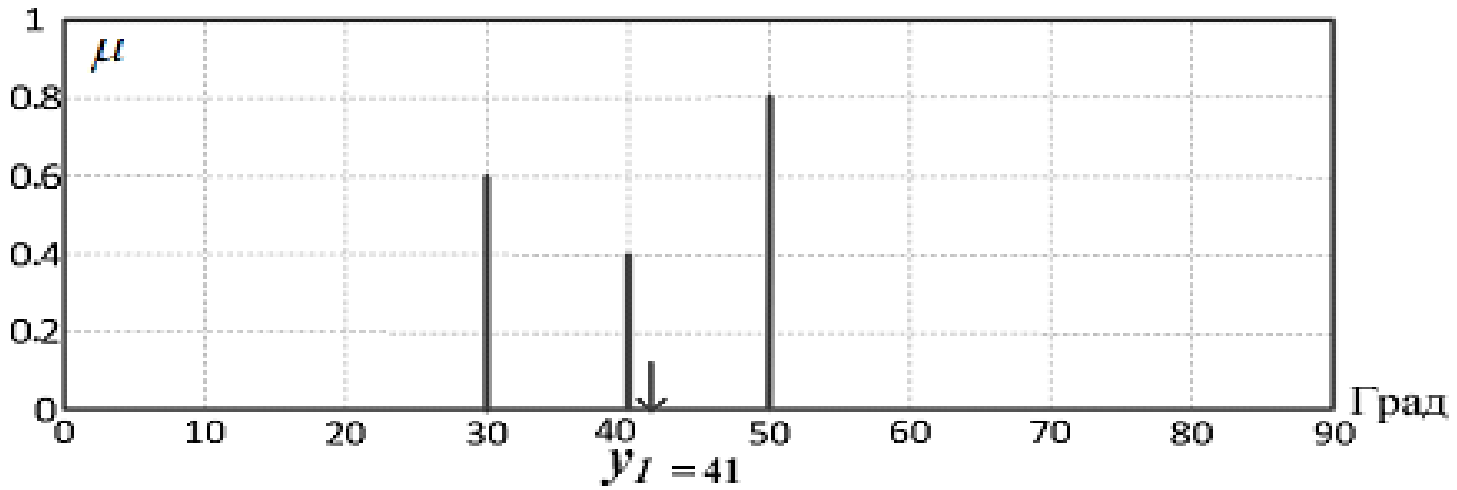


Рис. 12. Дефазифікація лінгвістичної змінної *«кут» вмикання тиристора* методом центру ваги для одноточкових множин

3.1 Алгоритм Мамдані (Mamdani)

Алгоритм Мамдані є одним з перших, який знайшов застосування в системах нечіткого висновку. Він був запропонований в 1975 р. англійським математиком Е. Мамдані (Ebrahim Mamdani) як метод для керування паровим двигуном. За своїм змістом цей алгоритм використовує розглянуті вище етапи, оскільки найбільш відповідає їхнім параметрам.

Формально *алгоритм Мамдані* може бути визначений у такій послідовності:

- **Формування бази правил систем нечіткого висновку.**
- **Фазифікація вхідних змінних.**
- **Агрегування підумов у нечітких правилах.** Для знаходження ступеня істинності умов кожного із правил нечітких продукція використовуються нечіткі логічні операції. Ті правила, ступіні істинності умов яких відмінні від нуля, вважаються *активними* і використовуються для подальших розрахунків.
- **Активація підвисновків у нечітких правилах.** Для скорочення часу висновку враховуються тільки активні правила нечітких продукцій.
- **Акумуляція висновків нечітких правил.** Для об'єднання нечітких множин, відповідних до термів підвисновків.
- **Дефазифікація вихідних змінних.** Традиційно використовується метод центру ваги або метод центру площі.