ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ПІДГОТОВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ВАРІАНТАМИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

РОЗДІЛ «КІНЕМАТИКА»

Практичне заняття №8

Тема «Прості рухи абсолютно твердого тіла»

Задача К2 – найпростіші рухи абсолютно твердого тіла

6.1. Умова задачі, розрахункові дані

Умова задачі. Механізм складається із ступінчатих коліс 1–3, що знаходяться в зачепленні або зв'язані пасовою передачею, зубчатої рейки 4 і вантажа 5, прив'язаного до кінця нитки, що намотана на одне з коліс (рис. К2.0 – К2.9, табл. К2). Радіуси ободів коліс рівні відповідно: у колеса 1 – r_1=2 см, R_1=4 см, у колеса 2 – r_2=6 см, R_2=8 см, у колеса 3 – r_3=12 см, R_3=16 см. На ободах коліс розташовані точки A, B і C.

В колонці "Дано" (табл. К2), вказаний закон руху або закон зміни швидкості ведучої ланки механізму, де $\varphi_i(t)$ – закон обертального руху i-го колеса, $s_j(t)$ – закон руху рейки або вантажа, $\omega_i(t)$ – закон зміни кутової швидкості i-го колеса, $v_j(t)$ – закон зміни швидкості рейки або вантажа (φ виражено в радианах, s – в сантиметрах, t – в секундах). Додатній напрямок для φ і ω проти ходу стрілки годинника, для s і v – вниз.

6.3. Приклад розв'язання задачі К2

Умова задачі. Механізм складається з ступінчатих коліс 2–4, які знаходяться в зачепленні або зв'язані ремінною передачею, зубчатої рейки 5 і вантажа 1, прив'язаного до кінця нитки, що намотана на колесо 2 (рис. К2а). Вантаж рухається по закону $s_1=f(t)$.

Дано: $s_1=8(6t-t^2)$ *см*; R_2=40 *см*; r_2=20 *см*; R_3=20 *см*; r_3=10 *см*; R_4=30 *см*; r_4=15 *см*; t_1=2 *с*.

Знайти: швидкості ω_3, ω_4, v_A, v_5; пришвидшення ε_3, ε_4, a_B, a_5.

Розв'язок

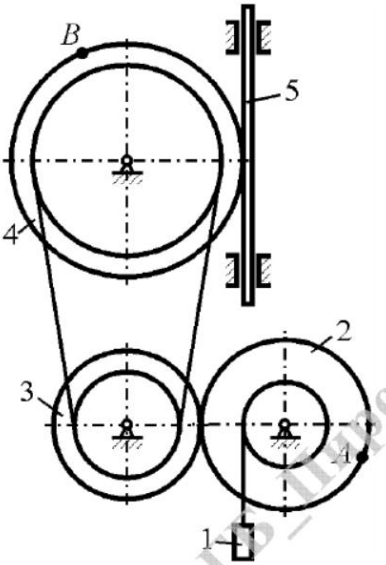


Рис. К2а

1. Будуємо розрахункову схему для швидкостей (рис. К2б). Визначаємо швидкість тіла 1, для якого задано закон руху:

$$v_1 = \dot{s}_1 = [8(6t - t^2)]' = 8(6 - 2t)\ .$$

При t_1 отримуємо

$$v_1 = 8 \cdot (6 - 2 \cdot 2) = 16\ \ см/с.$$

2. Знаходимо зв'язки між швидкостями, обравши за незалежну швидкість тіла 1 – v_1, при цьому виражаємо всі швидкості через швидкість v_1. Домовимось позначати швидкості точок, які лежать на зовнішніх ободах коліс (радіуса R_i), через v_i, а точок, які лежать на внутрішніх ободах (радіуса r_i) – через u_i.

$$u_2 = v_1;\ \ \omega_2 = \frac{u_2}{r_2} = \frac{v_1}{r_2};\ \ v_3 = v_2 = v_A = \omega_2 R_2 = \frac{v_1 R_2}{r_2};\ \ \omega_3 = \frac{v_3}{R_3} = \frac{v_1 R_2}{r_2 R_3};$$

$$u_3 = \omega_3 r_3 = \frac{v_1 R_2 r_3}{r_2 R_3};\ \ u_4 = u_3;\ \ \omega_4 = \frac{u_4}{r_4} = \frac{v_1 R_2 r_3}{r_2 R_3 r_4};$$

$$v_4 = \omega_4 R_4 = \frac{v_1 R_2 r_3 R_4}{r_2 R_3 r_4} = v_5 = v_B\ .$$

3. Будуємо розрахункову схему для пришвидшень (рис. К2в). Визначаємо пришвидшення тіла 1:

$$a_1 = \dot{v}_1 = [8(6 - 2t)]' = 8 \cdot (-2) = -16\ \ см/с^2.$$

Знак "–" перед пришвидшенням вказує на те, що пришвидшення будуть направлені в протилежний бік від напрямків швидкостей. На рис. К2в показані дійсні напрямки пришвидшень.

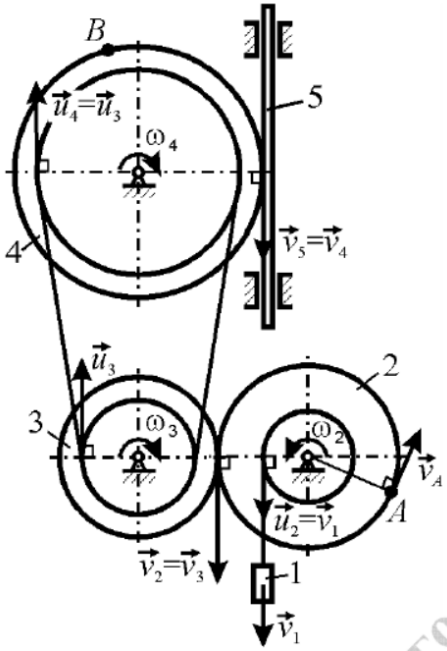


Рис. К2б

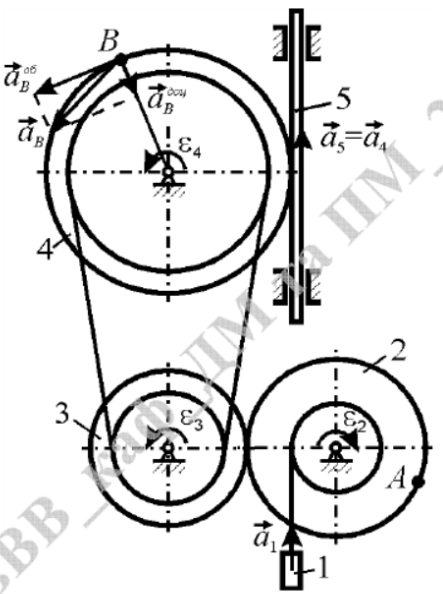


Рис. К2в

4. Знаходимо зв'язки між пришвидшеннями. Обравши за незалежне пришвидшення тіла 1 – a_1, отримаємо:

$$\varepsilon_2=\dot{\omega}_2=\frac{a_1}{r_2};\quad \varepsilon_3=\dot{\omega}_3=\frac{a_{23}}{R_3}=\frac{a_1R_2}{r_2R_3};$$

$$\varepsilon_4=\dot{\omega}_4=\frac{a_3}{r_4}=\frac{a_1R_2r_3}{r_2R_3r_4};\quad a_5=a_4=\varepsilon_4R_4=\frac{a_1R_2r_3R_4}{r_2R_3r_4}.$$

5. Проводимо розрахунки. Підставляємо вихідні дані у вирази для швидкостей та пришвидшень, тоді при t_1 отримаємо:

$$v_A=\frac{16\cdot40}{20}=32\ \textit{см/с};\quad \omega_3=\frac{16\cdot40}{20\cdot20}=1{,}6\ \textit{рад/с};$$

$$\omega_4=\frac{16\cdot40\cdot10}{20\cdot20\cdot15}=1{,}067\ \textit{рад/с};\quad v_5=\frac{16\cdot40\cdot10\cdot30}{20\cdot20\cdot15}=32\ \textit{см/с}.$$

$$\varepsilon_3=\frac{(-16)\cdot40}{20\cdot20}=-1{,}6\ \textit{рад/с}^2;\quad \varepsilon_4=\frac{(-16)\cdot40\cdot10}{20\cdot20\cdot15}=-1{,}067\ \textit{рад/с}^2;$$

$$a_5=(-1{,}067)\cdot30=-32\ \textit{см/с}^2.$$

илиюникинГБ_ДоговВВ_кафТДМ№ПМ_2

Пришвидшення точки B має вигляд:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^{\,об} + \vec{a}_B^{\,доц},$$

де

$$a_B^{об} = \varepsilon_4 R_4 = (-1{,}067)\cdot 30 = -32 \ \ см/с^2,$$

$$a_B^{доц} = \omega_4^2 R_4 = 1{,}067^2 \cdot 30 = 34{,}15 \ \ см/с^2.$$

Модуль пришвидшення точки B:

$$a_B = \sqrt{\left(a_B^{об}\right)^2 + \left(a_B^{доц}\right)^2} = \sqrt{(-32)^2 + 34{,}15^2} = 46{,}8 \ \ см/с^2.$$

Відповідь: $v_A = 32 \ \ см/с$; $\omega_3 = 1{,}6 \ \ рад/с$; $\omega_4 = 1{,}067 \ \ рад/с$; $v_5 = 32 \ \ см/с$; $\varepsilon_3 = -1{,}6 \ \ рад/с^2$; $\varepsilon_4 = -1{,}067 \ \ рад/с^2$; $a_5 = -32 \ \ см/с^2$; $a_B = 46{,}8 \ \ см/с^2$.

Задача К3 – плоскопаралельний рух абсолютно твердого тіла

7.1. Умова задачі, розрахункові дані

Умова задачі. Плоский механізм складається із ланок 1, 2, 3, 4 і повзуна B або E (рис. К3.0 – К3.7), або із ланок 1, 2, 3 і повзунів B і E (рис. К3.8, К3.9), з'єднаних один з одним і з нерухомими опорами O_1, O_2 шарнірами; точка D знаходиться посередині ланки AB. Довжини ланок рівні відповідно l_1=0,4 м, l_2=1,2 м, l_3=1,4 м, l_4=0,6 м. Положення механізму визначається кутами α, β, γ, φ, θ. Значення цих кутів та інших заданих величин вказані в табл. К3а (для рис. К3.0 – К3.4), або в табл. К3б (для рис. К3.5 – К3.9); при цьому в табл. К3а ω_1 і ω_4 – величини сталі.

Дугові стрілки на рисунках показують те, як повинні відкладатися відповідні кути при побудові креслення механізму (за ходом чи проти ходу стрілки годинника). Побудову креслення слід розпочинати із ланки, напрямок якої визначається кутом α; повзун з направляючими (рис. К3.10а) для наочності показати так, як показано на рис. К3.10б.

Задані кутову швидкість і кутове пришвидшення вважати направленими проти годинникової стрілки, а задані швидкість v_B і пришвидшення a_B – від точки B до b (на рис. К3.5 – К3.9).

***Знайти*:** величини вказані в стовпчику "Знайти".

7.3. Приклад розв'язання задачі К3

Умова задачі. Плоский механізм (рис. К3а) складається із ланок 1, 2, 3, 4 і повзуна B, з'єднаних один з одним і з нерухомими опорами O_1 і O_2 шарнірами.

Дано: $\alpha=60^0$, $\beta=150^0$, $\gamma=90^0$, $\varphi=30^0$, $\theta=30^0$, $AD=DB$, $l_1=0{,}4$ м, $l_2=1{,}2$ м, $l_3=1{,}4$ м, $l_4=0{,}6$ м, $\omega_1=2$ рад/с, $\varepsilon_1=7$ рад/с^2.

***Знайти*:** швидкості v_B, v_E і ω_2; пришвидшення ε_3 і a_B.

Розв'язок

1. Будуємо схему для швидкостей (рис. К3б). Будуємо положення механізму у відповідності із заданими кутами розпочинаючи з ланки, напрямок якої визначається кутом α.

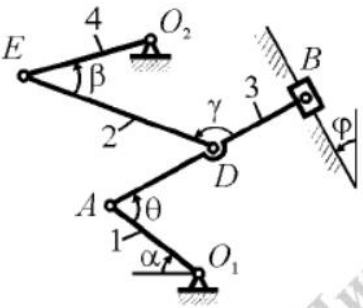


Рис. К3а

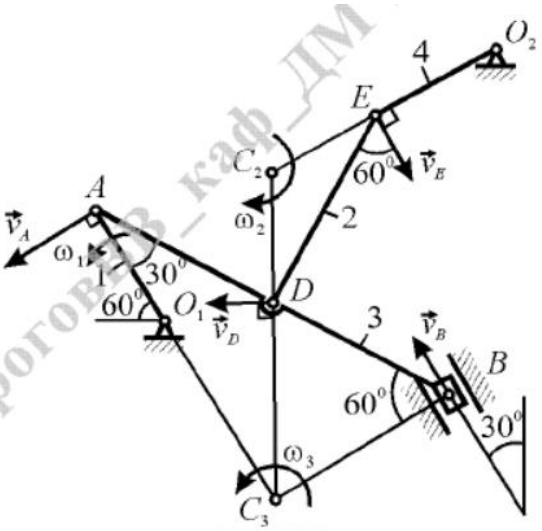


Рис. К3б

Побудову схеми швидкостей розпочнемо з першої ланки механізма (для якої задана кутова швидкість ω_1). Швидкість $\vec{v}_A$ направлена в сторону повороту і так, що $\vec{v}_A \perp O_1A$. Розглядаючи сусідню ланку 3, знайдемо спочатку напрямок швидкості точки B (вектор швидкості $\vec{v}_B$ паралельний напрявляючим по яким рухається повзун. Для цього будуємо миттєвий центр швидкостей (МЦШ) ланки AB – це точка C_3, що лежить на перетині перпендикулярів до швидкості $\vec{v}_A$ і напрямній вздовж якої рухається повзун, проведених із точок A і B. Враховуючи напрямок швидкості $\vec{v}_A$, кутова швидкість обертання ланки 3 ω_3, буде направлена проти ходу стрілки годинника. Вектори $\vec{v}_B$ і $\vec{v}_D$ направлені в сторону повороту ланки AB, причому $\vec{v}_D \perp C_3D$.

ЛДМОНТИНГБ_Пироговська_каф_ДМ

Розглянемо ланку 2. Так як точка E належить одночасно ланці 4, що обертається навколо O_2, то $\vec{v}_E \perp O_2E$. Тоді, провівши перпендикуляри з точок E і D до швидкостей $\vec{v}_E$ і $\vec{v}_D$, побудуємо МЦШ C_2 ланки 2. По напрямку вектора $\vec{v}_D$ визначаємо напрямок повороту ланки 2 навколо центра C_2. Вектор $\vec{v}_E$ направлений в сторону поворота цієї ланки.

2. Знаходимо швидкості. З рис. К3б отримуємо, що:

$$v_A = \omega_1 l_1 = 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8 \ м/с.$$

Для знаходження швидкості точки B використаємо теорему про проекції швидкостей двох точок тіла на пряму, що з'єднує ці точки (пряма AB), тоді

$$v_A \cos 60^0 = v_B \cos 30^0 ,$$

звідки

$$v_B = \frac{v_A \cos 60^0}{\cos 30^0} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}5}{0{,}866} = 0{,}462 \text{ м/с}.$$

Величину v_D знайдемо з пропорції:

$$\frac{v_D}{C_3D} = \frac{v_B}{C_3B}. \qquad (1)$$

Знайдемо C_3D і C_3B. Розглядаючи ΔAC_3B знайдемо, що

$$C_3B = AB\sin 30^0 = 0{,}5AB = BD = 0{,}7 \text{ м},$$

$$C_3A = AB\cos 30^0 = 1{,}4 \cdot 0{,}866 \approx 1{,}21 \text{ м}.$$

Тоді ΔBC_3D є рівностороннім трикутником і C_3B=C_3D. З рівності (1) отримуємо, що $v_D = v_B = 0{,}462$ м/с.

Знайдемо кутову швидкість ω_3:

$$\omega_3 = \frac{v_A}{C_3A} = \frac{0{,}8}{1{,}21} \approx 0{,}66 \text{ рад/с}.$$

Величину v_E знайдемо з пропорції:

$$\frac{v_E}{C_2E} = \frac{v_D}{C_2D}. \qquad (2)$$

Знайдемо C_2D і C_2E. З рис. К3б видно, що $\angle C_2ED$=$\angle C_2DE$=30^0 і

$$C_2E = C_2D = 0{,}5l_2 / \cos 30^0 \approx 0{,}693 \text{ м}.$$

З рівності (2) отримуємо, що $v_E = v_D = 0{,}462$ м/с.

З рис. К3б знайдемо, що

$$\omega_2 = \frac{v_D}{C_2D} = \frac{0{,}462}{0{,}693} \approx 0{,}667 \text{ рад/с}.$$

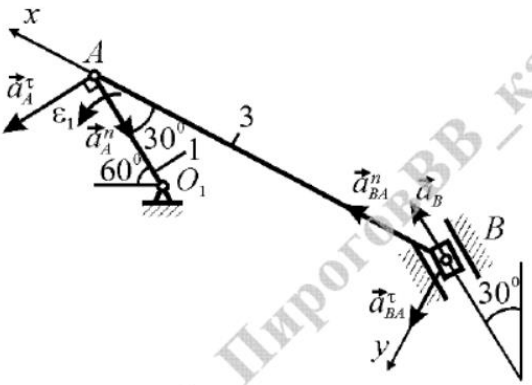


Рис. К3в

И.Лимонихин В.Пирогов
С_Пирогов ВВ _ каф_

4. Визначаємо пришвидшення точки *B*. Знайдемо пришвидшення $\vec{a}_A^{\,\tau}$, $\vec{a}_A^{\,n}$, $\vec{a}_{BA}^{\,n}$:

$$a_A^{\tau} = \varepsilon_1 l_1 = 7 \cdot 0{,}4 = 2{,}8 \ м/с^2; \quad a_A^n = \omega_1^2 l_1 = 2^2 \cdot 0{,}4 = 1{,}6 \ м/с^2;$$

$$a_{BA}^n = \omega_3^2 l_3 = 0{,}66^2 \cdot 1{,}4 \approx 0{,}61 \ м/с^2.$$

Для знаходження невідомих пришвидшень $\vec{a}_B$, $\vec{a}_{BA}^{\,\tau}$ скористаємося методом проекцій. Для цього введемо координатні осі x та y і спроектуємо на них векторне рівняння (4) (рис. К3в), матимемо:

$$x: \ a_B \cos 30^0 = a_A^{\tau} \cos 60^0 - a_A^n \cos 30^0 + a_{BA}^n;$$

$$y: \ -a_B \sin 30^0 = a_A^{\tau} \sin 60^0 + a_A^n \sin 30^0 + a_{BA}^{\tau}. \qquad (5)$$

Розв'язуємо отриману систему рівнянь (5) відносно невідомих $\vec{a}_B$, $\vec{a}_{BA}^{\,\tau}$. З першого рівняння системи (5), знайдемо:

$$a_B = \frac{a_A^{\tau} \cos 60^0 - a_A^n \cos 30^0 + a_{BA}^n}{\cos 30^0} = \frac{2{,}8 \cdot 0{,}5 - 1{,}6 \cdot 0{,}866 + 0{,}61}{0{,}866} \approx 0{,}72 \ м/с^2.$$

Так як $a_B > 0$, то вектор $\vec{a}_B$ направлений так як показано на рис. К3в. Розв'яжемо друге рівняння системи (5), отримаємо:

$$a_{BA}^{\tau} = -a_B \sin 30^0 - a_A^{\tau} \sin 60^0 - a_A^n \sin 30^0 =$$

$$= -0{,}72 \cdot 0{,}5 - 2{,}8 \cdot 0{,}866 - 1{,}6 \cdot 0{,}5 \approx -3{,}585 \ м/с^2.$$

Знак "–" вказує, що напрямок $\vec{a}_{BA}^{\,\tau}$ протилежний показаному на рис. К3в. З рівності $a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_3 l_3$ отримаємо:

$$\varepsilon_3 = \frac{\left|a_{BA}^{\tau}\right|}{l_3} = \frac{3{,}585}{1{,}4} \approx 2{,}56 \ рад/с^2.$$

Відповідь: $v_B = 0{,}462$ м/с; $v_E = 0{,}462$ м/с; $\omega_2 = 0{,}667$ рад/с; $a_B = 0{,}72 \ м/с^2$; $\varepsilon_3 = 2{,}56$ рад/с^2.

Індивідуальні завдання

Умова задачі. Механізм складається із ступінчатих коліс 1–3, що знаходяться в зачепленні або зв'язані пасовою передачею, зубчатої рейки 4 і вантажа 5, прив'язаного до кінця нитки, що намотана на одне з коліс (рис. К2.0 – К2.9, табл. К2). Радіуси ободів коліс рівні відповідно: у колеса 1 – r_1=2 см, R_1=4 см, у колеса 2 – r_2=6 см, R_2=8 см, у колеса 3 – r_3=12 см, R_3=16 см. На ободах коліс розташовані точки A, B і C.

В колонці "Дано" (табл. К2), вказаний закон руху або закон зміни швидкості ведучої ланки механізму, де $\varphi_i(t)$ – закон обертального руху i-го колеса, $s_j(t)$ – закон руху рейки або вантажа, $\omega_i(t)$ – закон зміни кутової швидкості i-го колеса, $v_j(t)$ – закон зміни швидкості рейки або вантажа (φ виражено в радианах, s – в сантиметрах, t – в секундах). Додатній напрямок для φ і ω проти ходу стрілки годинника, для s і v – вниз.

***Знайти*:** в момент часу t_1=2 с вказані в таблиці К2 в колонках «Знайти» швидкості (v – лінійні, ω – кутові) і пришвидшення (a – лінійні, ε – кутові) відповідних точок або тіл.

Таблиця К2

Номер умови	Дано	Знайти	
		швидкості	пришвидшення
0	$s_4=4(7t-t^2)$	v_B, v_C	ε_2, a_A, a_5
1	$v_5=2(t^2-3)$	v_A, v_C	ε_3, a_B, a_4
2	$\varphi_1=2t^2-9$	v_4, ω_2	ε_2, a_C, a_5
3	$\omega_2=7t-3t^2$	v_5, ω_3	ε_2, a_A, a_4
4	$\varphi_3=3t-t^2$	v_4, ω_1	ε_1, a_B, a_5
5	$\omega_1=5t-2t^2$	v_5, v_B	ε_2, a_C, a_4
6	$\varphi_2=2(t^2-3t)$	v_4, ω_1	ε_1, a_C, a_5
7	$v_4=3t^2-8$	v_A, ω_3	ε_3, a_B, a_5
8	$s_5=2t^2-5t$	v_4, ω_2	ε_1, a_C, a_4
9	$\omega_3=8t-3t^2$	v_5, v_B	ε_2, a_A, a_4

Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача К2 – на дослідження найпростіших рухів твердого тіла. При розв'язанні задачі врахувати, що, коли два колеса знаходяться в зачепленні, швидкість точки зачеплення кожного колеса буде однакова, а коли два колеса зв'язані пасовою передачею, то швидкості всіх точок паса і, відповідно, точок, що лежать на ободі кожного з коліс, в данный момент часу чисельно однакові; при цьому вважається, що пас по ободу колеса не ковзає.

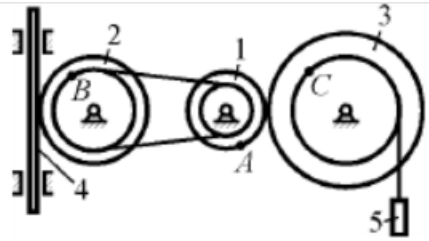


Рис. К2.0

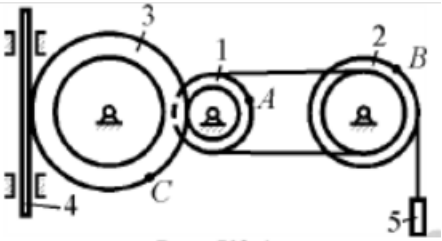


Рис. К2.1

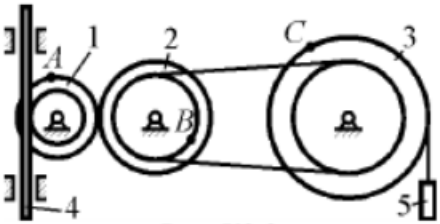


Рис. К2.2

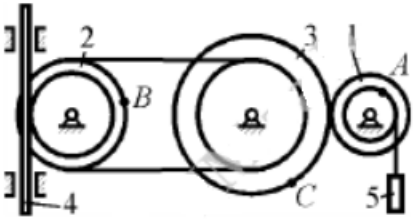


Рис. К2.3

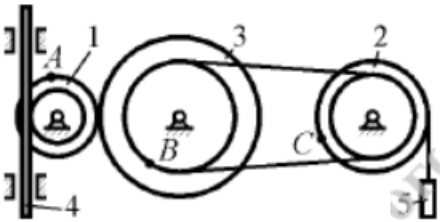


Рис. К2.4

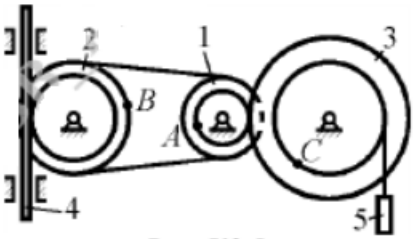


Рис. К2.5

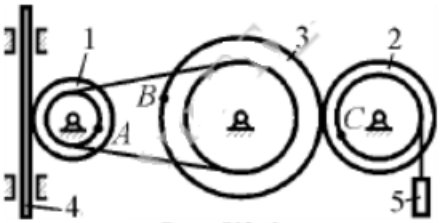


Рис. К2.6

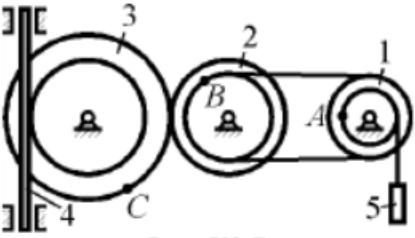


Рис. К2.7

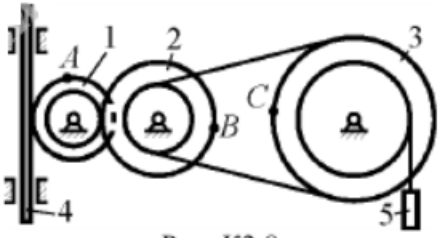


Рис. К2.8

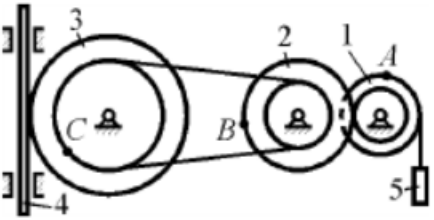


Рис. К2.9